初中数学几何作辅助线的102条规律（各个图形）

初中优学 今天

初中数学几何作辅助线的102条规律

线、角、相交线、平行线

规律 1.如果平面上有 $n(n\geq2)$个点，其中任何三点都不在同一直线上，那么每两点画一条直线，一共可以画出$\frac{1}{2}n(n-1)$条.

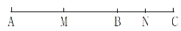
规律 2.平面上的 n 条直线<u>最多</u>可把平面分成〔$\frac{1}{2}n(n+1)+1$〕个部分.

规律 3.如果一条直线上有 n 个点，那么在这个图形中共有线段的条数为$\frac{1}{2}n(n-1)$条.

规律 4.线段（或延长线）上任一点分线段为两段，这两条线段的中点的距离等于线段长的一半.

例：如图，B 在线段 AC 上，M 是 AB 的中点，N 是 BC 的中点.

求证：$MN=\frac{1}{2}AC$



证明：∵M 是 AB 的中点，N 是 BC 的中点

∴$AM=BM=\frac{1}{2}AB$,$BN=CN=\frac{1}{2}BC$

∴$MN=MB+BN=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB+BC)$

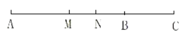
∴$MN=\frac{1}{2}AC$

练习：1.如图，点 C 是线段 AB 上的一点，M 是线段 BC 的中点.

求证：$AM=\frac{1}{2}(AB+BC)$

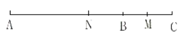
2.如图，点 B 在线段 AC 上，M 是 AB 的中点，N 是 AC 的中点.

求证：$MN=\frac{1}{2}BC$



3.如图，点 B 在线段 AC 上，N 是 AC 的中点，M 是 BC 的中点.

求证：$MN=\frac{1}{2}AB$



规律 5.有公共端点的 n 条射线所构成的交点的个数一共有$\frac{1}{2}n(n-1)$个.

规律 6.如果平面内有 n 条直线都经过同一点，则可构成小于平角的角共有 $2n$（$n-1$）个.

规律 7. 如果平面内有 n 条直线都经过同一点，则可构成 n（$n-1$）对对顶角.

规律 8.平面上若有 n（$n\geq3$）个点，任意三个点不在同一直线上，过任

意三点作三角形一共可作出 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 个.

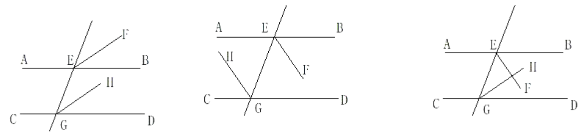
规律 9.互为邻补角的两个角平分线所成的角的度数为 90^o.

规律 10.平面上有 n 条直线相交，最多交点的个数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个.

规律 11.互为补角中较小角的余角等于这两个互为补角的角的差的一半.

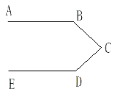
规律 12.当两直线平行时，同位角的角平分线互相平行，内错角的角平分线互相平行，同旁内角的角平分线互相垂直.

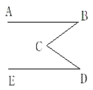
例：如图，以下三种情况请同学们自己证明.

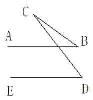


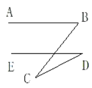
13.已知 $AB // DE$,如图(1)～(6),规律如下：

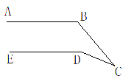
规律

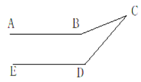
(1)  $\angle ABC+\angle BCD+\angle CDE=360°$

(2)  $\angle BCD=\angle ABC+\angle CDE$

(3)  $\angle BCD=\angle CDE-\angle ABC$

(4)  $\angle BCD=\angle ABC-\angle CDE$

(5)  $\angle CDE=\angle BCD+\angle ABC$

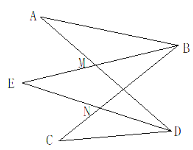
(6)  $\angle ABC=\angle BCD+\angle CDE$

规律

14.成“8”字形的两个三角形的一对内角平分线相交所成的角等于另两个内角和的一半.

例：已知，BE、DE 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$，

若 $\angle A=45^o,\angle C=55^o$,求 $\angle E$ 的度数.



解：$\angle A+\angle ABE=\angle E+\angle ADE$ ①

$\angle C+\angle CDE=\angle E+\angle CBE$ ②

①＋②得

$\angle A+\angle ABE+\angle C+\angle CDE=\angle E+\angle ADE+\angle E+\angle CBE$

∵BE 平分$\angle ABC$、DE 平分$\angle ADC$，

∴$\angle ABE=\angle CBE$，$\angle CDE=\angle ADE$

∴$2\angle E=\angle A+\angle C$

∴$\angle E=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$

∵ $\angle A=45^o$, $\angle C=55^o$,

∴ $\angle E=50^o$

三角形部分

规律 15．在利用三角形三边关系证明线段不等关系时，如果直接证不出来，可连结两点或延长某边构造三角形，使结论中出现的线段在一个或几个三角形中，再利用三边关系定理及不等式性质证题.

例：如图，已知 D、E 为$\triangle ABC$ 内两点，

求证：$AB+AC>BD+DE+CE$.

证法（一）：将 DE 向两边延长，分别交 AB、AC 于 M、N

在$\triangle AMN$ 中，$AM+AN>MD+DE+NE$ ①

在$\triangle BDM$ 中，$MB+MD>BD$ ②

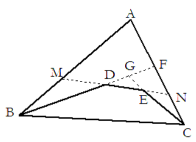
在$\triangle CEN$ 中，$CN+NE>CE$ ③

①+②+③得

$AM+AN+MB+MD+CN+NE>MD+DE+NE+BD+CE$

∴$AB+AC>BD+DE+CE$

证法（二）延长 BD 交 AC 于 F，延长 CE 交 BF 于 G,在$\triangle ABF$ 和$\triangle GFC$ 和$\triangle GDE$ 中有，



①$AB+AF>BD+DG+GF$

②$GF+FC>GE+CE$

③$DG+GE>DE$

∴①+②+③有

$AB+AF+GF+FC+DG+GE>BD+DG+GF+GE+CE+DE$

∴$AB+AC>BD+DE+CE$

注意：利用三角形三边关系定理及推论证题时，常通过引辅助线，把求证的量（或与求证有关的量）移到同一个或几个三角形中去然后再证题.

练习：已知：如图 P 为$\triangle ABC$ 内任一点，

求证：$\frac{1}{2}(AB+BC+AC)<PA+PB+PC<AB+BC+AC$

规律 16．三角形的一个内角平分线与一个外角平分线相交所成的锐角，等于第三个内角的一半.

例：如图，已知 BD 为△ABC 的角平分线，CD 为△ABC 的外角$\angle ACE$

的平分线，它与 BD 的延长线交于 D.

求证：$\angle A = 2\angle D$

证明：∵BD、CD 分别是$\angle ABC$、$\angle ACE$ 的平分线

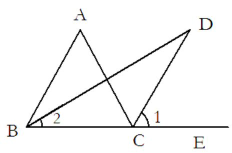
∴$\angle ACE = 2\angle 1$，$\angle ABC = 2\angle 2$

∵$\angle A = \angle ACE - \angle ABC$

∴$\angle A = 2\angle 1 - 2\angle 2$

又∵$\angle D = \angle 1 - \angle 2$

∴$\angle A = 2\angle D$



规律 17. 三角形的两个内角平分线相交所成的钝角等于 90^o 加上第三个内角的一半.

例：如图，BD、CD 分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$，求证：$\angle BDC = 90^o + \frac{1}{2}\angle A$

证明：∵BD、CD 分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$

∴$\angle A + 2\angle 1 + 2\angle 2 = 180^o$

∴$2(\angle 1 + \angle 2) = 180^o - \angle A$①

∵$\angle BDC = 180^o - (\angle 1 + \angle 2)$

∴$(\angle 1 + \angle 2) = 180^o - \angle BDC$②

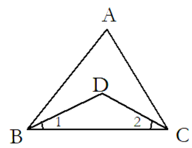
把②式代入①式得

$2(180^o - \angle BDC) = 180^o - \angle A$

即：$360^o - 2\angle BDC = 180^o - \angle A$

∴$2\angle BDC = 180^o + \angle A$

∴$\angle BDC = 90^o + \frac{1}{2}\angle A$



规律 18. 三角形的两个外角平分线相交所成的锐角等于 90^o 减去第三个内角的一半.

例：如图，BD、CD 分别平分$\angle EBC$、$\angle FCB$，求证：$\angle BDC = 90^o - \frac{1}{2}\angle A$

证明：∵BD、CD 分别平分$\angle EBC$、$\angle FCB$

∴$\angle EBC = 2\angle 1$、$\angle FCB = 2\angle 2$

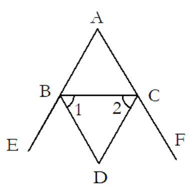
∴$2\angle 1 = \angle A + \angle ACB$　①

$2\angle 2 = \angle A + \angle ABC$　②

①+②得

$2(\angle 1 + \angle 2) = \angle A + \angle ABC + \angle ACB + \angle A$

$2(\angle 1 + \angle 2) = 180^o + \angle A$



$\therefore$ （$\angle 1+\angle 2$） $=90^o+\dfrac{1}{2}\angle A$

$\because \angle BDC=180^o-(\angle 1+\angle 2)$

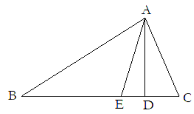
$\therefore \angle BDC=180^o-(90^o+\dfrac{1}{2}\angle A)$

$\therefore \angle BDC=90^o-\dfrac{1}{2}\angle A$

规律 19. 从三角形的一个顶点作高线和角平分线，它们所夹的角等于三角形另外两个角差（的绝对值）的一半.

例：已知，如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$， $AD\perp BC$于D， AE平分$\angle BAC$.

求证：$\angle EAD=\dfrac{1}{2}(\angle C-\angle B)$



证明：$\because AE$平分$\angle BAC$

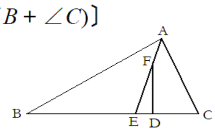
$\therefore \angle BAE=\angle CAE=\dfrac{1}{2}\angle BAC$

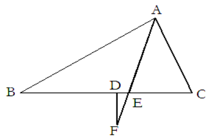
$\because \angle BAC=180^o-(\angle B+\angle C)$

$\therefore \angle EAC=\dfrac{1}{2}$〔$180^o-(\angle B+\angle C)$〕

$\because AD\perp BC$

$\therefore \angle DAC=90^o-\angle C$





$\because \angle EAD=\angle EAC-\angle DAC$

$\therefore \angle EAD=\dfrac{1}{2}$〔$180^o-(\angle B+\angle C)$〕 $-(90^o-\angle C)$

$=90^o-\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)-90^o+\angle C$

$=\dfrac{1}{2}(\angle C-\angle B)$

如果把 AD 平移可以得到如下两图，$FD\perp BC$ 其它条件不变，结论为 $\angle EFD=\dfrac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

注意：同学们在学习几何时，可以把自己证完的题进行适当变换，从而使自己通过解一道题掌握一类题，提高自己举一反三、灵活应变的能力.

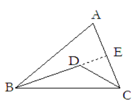
规律 20.在利用三角形的外角大于任何和它不相邻的内角证明角的不等关系时，如果直接证不出来，可连结两点或延长某边，构造三角形，使求证的大角在某个三角形外角的位置上，小角处在内角的位置上，再利用外角定理证题.

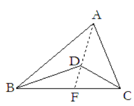
例：已知D为$\triangle ABC$内任一点，求证：$\angle BDC>\angle BAC$

证法（一）：延长BD交AC于E，

$\because \angle BDC$是$\triangle EDC$ 的外角，

$\therefore \angle BDC>\angle DEC$





同理：$\angle DEC>\angle BAC$

$\therefore \angle BDC > \angle BAC$

证法（二）：连结 AD，并延长交 BC 于 F

$\because \angle BDF$ 是$\triangle ABD$ 的外角，

$\therefore \angle BDF > \angle BAD$

同理$\angle CDF > \angle CAD$

$\therefore \angle BDF + \angle CDF > \angle BAD + \angle CAD$

即：$\angle BDC > \angle BAC$

规律 21.有角平分线时常在角两边截取相等的线段，构造全等三角形.

例：已知，如图，AD 为$\triangle ABC$ 的中线且$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，

求证：$BE + CF > EF$

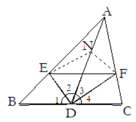
证明：在 DA 上截取 $DN = DB$，连结 NE、NF，则 $DN = DC$

在$\triangle BDE$ 和$\triangle NDE$ 中，

$DN = DB$

$\angle 1 = \angle 2$

$ED = ED$



$\therefore \triangle BDE \cong \triangle NDE$

$\therefore BE = NE$

同理可证：$CF = NF$

在$\triangle EFN$ 中，$EN + FN > EF$

$\therefore BE + CF > EF$

规律 22. 有以线段中点为端点的线段时，常加倍延长此线段构造全等三角形.

例：已知，如图，AD 为$\triangle ABC$ 的中线，且$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，求证：

$BE + CF > EF$

证明：延长 ED 到 M，使 $DM = DE$，连结 CM、FM

$\triangle BDE$ 和$\triangle CDM$ 中，

$BD = CD$

$\angle 1 = \angle 5$

$ED = MD$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDM$

$\therefore CM = BE$

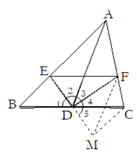
又$\because \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^o$

$\therefore \angle 3 + \angle 2 = 90^o$

即$\angle EDF = 90^o$

$\therefore \angle FDM = \angle EDF = 90^o$



$\triangle EDF$ 和$\triangle MDF$ 中

$ED = MD$

$\angle FDM = \angle EDF$

$DF = DF$

∴$\triangle EDF \cong \triangle MDF$

∴$EF = MF$

∵在$\triangle CMF$中，$CF + CM > MF$

$BE + CF > EF$

（此题也可加倍FD，证法同上）

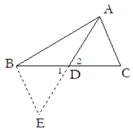
规律 23．在三角形中有中线时，常加倍延长中线构造全等三角形．

例：已知，如图，AD为$\triangle ABC$的中线，求证：$AB + AC > 2AD$

证明：延长AD至E，使$DE = AD$，连结BE

∵AD为$\triangle ABC$的中线

∴$BD = CD$



在$\triangle ACD$和$\triangle EBD$中

$BD = CD$

$\angle 1 = \angle 2$

$AD = ED$

∴$\triangle ACD \cong \triangle EBD$

∵$\triangle ABE$中有$AB + BE > AE$

∴$AB + AC > 2AD$

规律 24.截长补短作辅助线的方法

截长法：在较长的线段上截取一条线段等于较短线段；

补短法：延长较短线段和较长线段相等．

这两种方法统称截长补短法．

当已知或求证中涉及到线段 a、b、c、d 有下列情况之一时用此种方法：

①$a > b$

②$a \pm b = c$

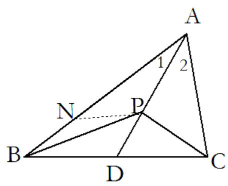
③$a \pm b = c \pm d$

例：已知，如图，在$\triangle ABC$中，$AB > AC$，$\angle 1 = \angle 2$，P为AD上任一点，

求证：$AB - AC > PB - PC$

证明：⑴**截长法：**在AB上截取$AN = AC$，连结PN

在$\triangle APN$和$\triangle APC$中，



$AN = AC$

$\angle 1 = \angle 2$

$AP = AP$

∴$\triangle APN \cong \triangle APC$

∴$PC = PN$

∵△BPN中有 $PB-PC<BN$

∴$PB-PC<AB-AC$

⑵**补短法：**延长 AC 至 M，使 $AM=AB$，连结 PM

在△ABP和△AMP中

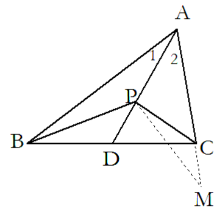
$AB=AM$

$\angle 1=\angle 2$

$AP=AP$

∴△ABP≌△AMP

∴$PB=PM$



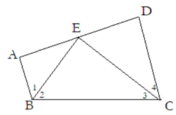
又∵在△PCM中有 $CM>PM-PC$

∴$AB-AC>PB-PC$

练习：1.已知，在△ABC中，$\angle B=60^o$,AD、CE

是△ABC的角平分线,并且它们交于点 O

求证：$AC=AE+CD$



2.已知，如图，$AB // CD$ $\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$.

求证：$BC=AB+CD$

规律 25.证明两条线段相等的步骤：

①观察要证线段在哪两个可能全等的三角形中，然后证这两个三角形全等。

②若图中没有全等三角形，可以把求证线段用和它相等的线段代换，再证它们所在的三角形全等.

③如果没有相等的线段代换，可设法作辅助线构造全等三角形.

例:如图，已知，BE、CD 相交于 F，$\angle B=\angle C$，$\angle 1=\angle 2$，

求证：$DF=EF$

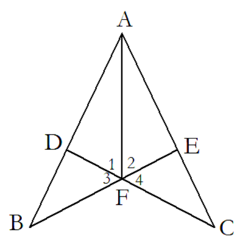
证明：∵$\angle ADF=\angle B+\angle 3$

$\angle AEF=\angle C+\angle 4$

又∵$\angle 3=\angle 4$

$\angle B=\angle C$

∴$\angle ADF=\angle AEF$



在△ADF和△AEF中

$\angle ADF=\angle AEF$

$\angle 1=\angle 2$

$AF=AF$

∴△ADF≌△AEF

$\therefore DF = EF$

规律 26.在一个图形中，有多个垂直关系时，常用同角（等角）的余角相等来证明两个角相等.

例：已知，如图 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 90^o$，过 A 作任一条直线 AN，作 $BD\perp AN$ 于 D，$CE\perp AN$ 于 E，求证：$DE = BD - CE$

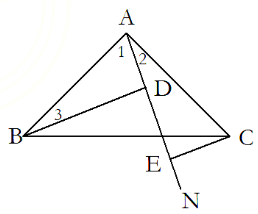
证明：$\because \angle BAC = 90^o, BD\perp AN$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^o \quad \angle 1 + \angle 3 = 90^o$

$\therefore \angle 2 = \angle 3$

$\because BD\perp AN \quad CE\perp AN$

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^o$



在$\triangle ABD$和$\triangle CAE$中，

$\angle BDA = \angle AEC$

$\angle 2 = \angle 3$

$AB = AC$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$

$\therefore BD = AE$ 且 $AD = CE$

$\therefore AE - AD = BD - CE$

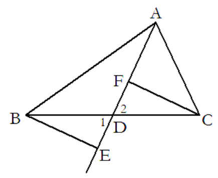
$\therefore DE = BD - CE$

规律 27.三角形一边的两端点到这边的中线所在的直线的距离相等.

例：AD 为$\triangle ABC$ 的中线，且 $CF\perp AD$ 于 F，$BE\perp AD$ 的延长线于 E

求证：$BE = CF$

证明：（略）



规律 28.条件不足时延长已知边构造三角形.

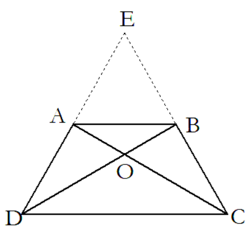
例：已知 $AC = BD$，$AD\perp AC$ 于 A，$BCBD$ 于 B

求证：$AD = BC$

证明：分别延长 DA、CB 交于点 E

$\because AD\perp AC \quad BC\perp BD$

$\therefore \angle CAE = \angle DBE = 90^o$



在$\triangle DBE$和$\triangle CAE$中

$\angle DBE = \angle CAE$

$BD = AC$

$\angle E = \angle E$

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle CAE$

$\therefore ED = EC$，$EB = EA$

$\therefore ED - EA = EC - EB$

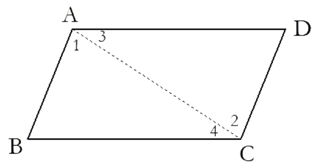
$\therefore AD = BC$

规律 29.连接四边形的对角线，把四边形问题转化成三角形来解决问题.

例：已知，如图，$AB // CD$，$AD // BC$

求证：$AB = CD$

证明：连结 AC（或 BD）



$\because AB // CD$，$AD // BC$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$\angle 1 = \angle 2$

$AC = CA$

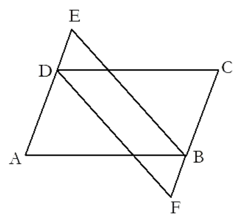
$\angle 3 = \angle 4$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$

$\therefore AB = CD$

练习：已知，如图，$AB = DC$，$AD = BC$，$DE = BF$，

求证：$BE = DF$

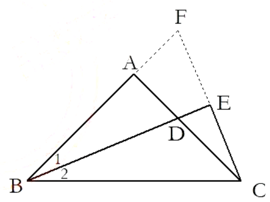


规律 30.有和角平分线垂直的线段时，通常把这条线段延长。可归结为“角分垂等腰归”.

例：已知，如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 90^o$，$\angle 1 = \angle 2$，$CE \perp BD$ 的延长线于 E

求证：$BD = 2CE$

证明：分别延长 BA、CE 交于 F



$\because BE \perp CF$

$\therefore \angle BEF = \angle BEC = 90^o$

在$\triangle BEF$和$\triangle BEC$中

$\angle 1 = \angle 2$

$BE = BE$

$\angle BEF = \angle BEC$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEC$

$\therefore CE = FE = \frac{1}{2} CF$

$\because \angle BAC = 90^o$，$BE \perp CF$

$\therefore \angle BAC = \angle CAF = 90^o$

$\angle 1 + \angle BDA = 90^o$

$\angle 1 + \angle BFC = 90^o$

$\angle BDA = \angle BFC$

在△ABD和△ACF中

$\angle BAC = \angle CAF$

$\angle BDA = \angle BFC$

$AB = AC$

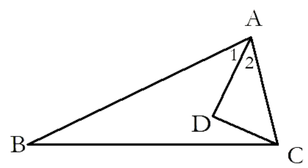
∴△ABD≌△ACF

∴$BD = CF$

∴$BD = 2CE$

练习：已知，如图，$\angle ACB = 3\angle B$，$\angle 1 = \angle 2, CD \perp AD$于$D$，

求证：$AB - AC = 2CD$

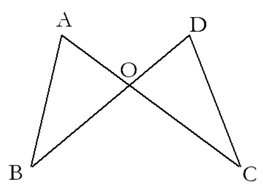


规律 31.当证题有困难时，可结合已知条件，把图形中的某两点连接起来构造全等三角形.

例：已知，如图，AC、BD相交于O，且$AB = DC$，$AC = BD$，

求证：$\angle A = \angle D$

证明：(连结BC，过程略)



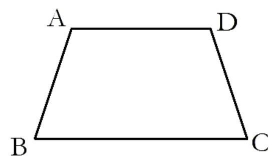
规律 32.当证题缺少线段相等的条件时，可取某条线段中点，为证题提供条件.

例：已知，如图，$AB = DC$，$\angle A = \angle D$

求证：$\angle ABC = \angle DCB$

证明：分别取AD、BC中点N、M，

连结NB、NM、NC（过程略）



规律 33.有角平分线时，常过角平分线上的点向角两边做垂线，利用角平分线上的点到角两边距离相等证题.

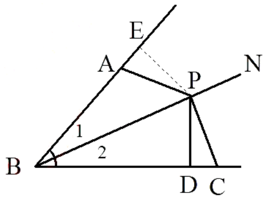
例：已知，如图，$\angle 1=\angle 2$ ，P 为 BN 上一点，且 $PD\perp BC$ 于 D，AB $+BC=2BD$，

求证：$\angle BAP+\angle BCP=180^o$

证明：过 P 作 $PE\perp BA$ 于 E

∵$PD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$

∴$PE=PD$



在 $Rt\triangle BPE$ 和 $Rt\triangle BPD$ 中

$BP=BP$

$PE=PD$

∴$Rt\triangle BPE\cong Rt\triangle BPD$

∴$BE=BD$

∵$AB+BC=2BD$，$BC=CD+BD$，$AB=BE-AE$

∴$AE=CD$

∵$PE\perp BE$，$PD\perp BC$

$\angle PEB=\angle PDC=90^o$

在$\triangle PEA$ 和$\triangle PDC$ 中

$PE=PD$

$\angle PEB=\angle PDC$

$AE=CD$

∴$\triangle PEA\cong\triangle PDC$

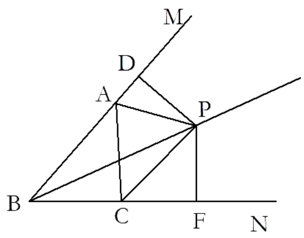
∴$\angle PCB=\angle EAP$

∵$\angle BAP+\angle EAP=180^o$

∴$\angle BAP+\angle BCP=180^o$

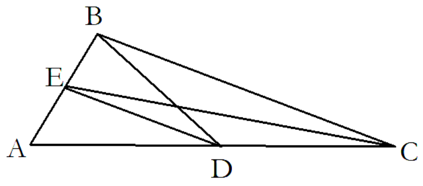
练习：1.已知，如图，PA、PC 分别是$\triangle ABC$ 外角$\angle MAC$ 与$\angle NCA$ 的平分线，它们交于 P，

$PD\perp BM$ 于 M，$PF\perp BN$ 于 F，求证：BP 为$\angle MBN$ 的平分线



2. 已知，如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=100^o$，$\angle ACB=20^o$，CE 是$\angle ACB$

的平分线，D 是 AC 上一点，若 $\angle CBD=20^{o}$，求 $\angle CED$ 的度数。



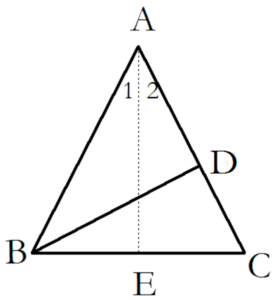
规律 34.有等腰三角形时常用的辅助线

⑴作顶角的平分线，底边中线，底边高线

例：已知，如图，$AB=AC$，$BD\perp AC$ 于 D，

求证：$\angle BAC=2\angle DBC$

证明：（方法一）作 $\angle BAC$ 的平分线 AE，交 BC 于 E，则 $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$



又∵$AB=AC$

∴$AE\perp BC$

∴$\angle 2+\angle ACB=90^{o}$

∵$BD\perp AC$

∴$\angle DBC+\angle ACB=90^{o}$

∴$\angle 2=\angle DBC$

∴$\angle BAC=2\angle DBC$

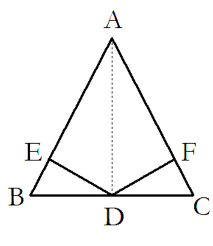
（方法二）过 A 作 $AE\perp BC$ 于 E（过程略）

（方法三）取 BC 中点 E，连结 AE（过程略）

⑵有底边中点时，常作底边中线

例：已知，如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 中点，$DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，

求证：$DE=DF$



证明：连结 AD.

∵D 为 BC 中点，

∴$BD=CD$

又∵$AB=AC$

∴AD 平分 $\angle BAC$

∵$DE\perp AB$，$DF\perp AC$

∴$DE=DF$

⑶将腰延长一倍，构造直角三角形解题

例：已知，如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，在 BA 延长线和 AC 上各取一点

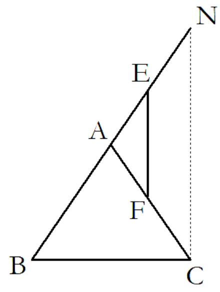
例：已知，如图，$\triangle ABC$中，$AB = AC$，在BA延长线和AC上各取一点

E、F，使$AE = AF$，求证：$EF \perp BC$

证明：延长BE到N，使$AN = AB$,连结CN,则$AB = AN = AC$

$\therefore \angle B = \angle ACB$, $\angle ACN = \angle ANC$

$\because \angle B + \angle ACB + \angle ACN + \angle ANC = 180^o$



$\therefore 2\angle BCA + 2\angle ACN = 180^o$

$\therefore \angle BCA + \angle ACN = 90^o$

即$\angle BCN = 90^o$

$\therefore NC \perp BC$

$\because AE = AF$

$\therefore \angle AEF = \angle AFE$

又$\because \angle BAC = \angle AEF + \angle AFE$

$\angle BAC = \angle ACN + \angle ANC$

$\therefore \angle BAC = 2\angle AEF = 2\angle ANC$

$\therefore \angle AEF = \angle ANC$

$\therefore EF // NC$

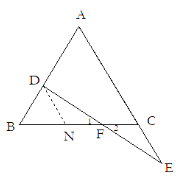
$\therefore EF \perp BC$

⑷常过一腰上的某一已知点做另一腰的平行线

例：已知，如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，D在AB上，E在AC延长线上，且$BD = CE$，连结DE交BC于F

求证：$DF = EF$

证明：(证法一) 过D作$DN // AE$，交BC于N，则$\angle DNB = \angle ACB$，$\angle NDE = \angle E$，



$\because AB = AC$，

$\therefore \angle B = \angle ACB$

$\therefore \angle B = \angle DNB$

$\therefore BD = DN$

又$\because BD = CE$

$\therefore DN = EC$

在$\triangle DNF$和$\triangle ECF$中

$\angle 1 = \angle 2$

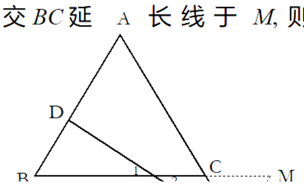
$\angle NDF = \angle E$

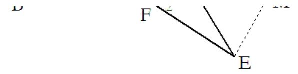
$DN = EC$

$\therefore \triangle DNF \cong \triangle ECF$

$\therefore DF = EF$

(证法二) 过E作$EM // AB$交BC延长线于M，则$\angle EMB = \angle B$ (过程略)





、

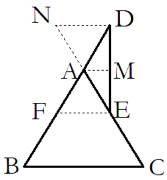
⑸**常过一腰上的某一已知点做底的平行线**

例：已知，如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 在 AC 上，D 在 BA 延长线上，

且 $AD=AE$，连结 DE

求证：$DE\perp BC$

证明：（证法一）过点 E 作 $EF/\!/BC$ 交 AB 于 F，则



$\angle AFE=\angle B$

$\angle AEF=\angle C$

$\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle C$

$\therefore \angle AFE=\angle AEF$

$\because AD=AE$

$\therefore \angle AED=\angle ADE$

又$\because \angle AFE+\angle AEF+\angle AED+\angle ADE=180^o$

$\therefore 2\angle AEF+2\angle AED=90^o$

即$\angle FED=90^o$

$\therefore DE\perp FE$

又$\because EF/\!/BC$

$\therefore DE\perp BC$

（证法二）过点 D 作 $DN/\!/BC$ 交 CA 的延长线于 N，（过程略）

（证法三）过点 A 作 $AM/\!/BC$ 交 DE 于 M，（过程略）

⑹**常将等腰三角形转化成特殊的等腰三角形------等边三角形**

例：已知，如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=80^o$，P 为形内一点，

若$\angle PBC=10^o$ $\angle PCB=30^o$ 求$\angle PAB$ 的度数.

解法一：以 AB 为一边作等边三角形，连结 CE

则$\angle BAE=\angle ABE=60^o$

$AE=AB=BE$

$\because AB=AC$

$\therefore AE=AC$ $\angle ABC=\angle ACB$

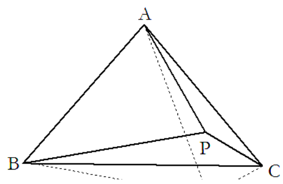
$\therefore \angle AEC=\angle ACE$

$\because \angle EAC=\angle BAC-\angle BAE=80^o-60^o=20^o$

$\therefore \angle ACE=\dfrac{1}{2}(180^o-\angle EAC)=80^o$

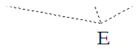
$\because \angle ACB=\dfrac{1}{2}(180^o-\angle BAC)=50^o$

$\therefore \angle BCE=\angle ACE-\angle ACB$



$=80^o-50^o=30^o$

$= 80^o - 50^o = 30^o$



∵ $\angle PCB = 30^o$

∴ $\angle PCB = \angle BCE$

∵ $\angle ABC = \angle ACB = 50^o$, $\angle ABE = 60^o$

∴ $\angle EBC = \angle ABE - \angle ABC = 60^o - 50^o = 10^o$

∵ $\angle PBC = 10^o$

∴ $\angle PBC = \angle EBC$

在$\triangle PBC$和$\triangle EBC$中

$\angle PBC = \angle EBC$

$BC = BC$

$\angle PCB = \angle BCE$

∴$\triangle PBC \cong \triangle EBC$

∴$BP = BE$

∵$AB = BE$

∴$AB = BP$

∴ $\angle BAP = \angle BPA$

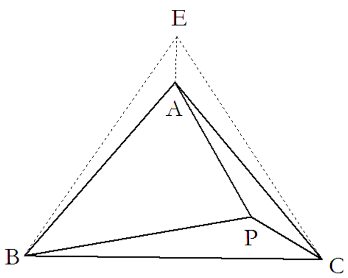
∵ $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = 50^o - 10^o = 40^o$

∴ $\angle PAB = \frac{1}{2}(180^o - \angle ABP) = 70^o$

解法二：以AC为一边作等边三角形，证法同一。

解法三：以BC为一边作等边三角形$\triangle BCE$，连结AE,则

$EB = EC = BC$，$\angle BEC = \angle EBC = 60^o$



∵$EB = EC$

∴E在BC的中垂线上

同理A在BC的中垂线上

∴EA所在的直线是BC的中垂线

∴$EA \perp BC$

$\angle AEB = \frac{1}{2}\angle BEC = 30^o = \angle PCB$

由解法一知：$\angle ABC = 50^o$

∴ $\angle ABE = \angle EBC - \angle ABC = 10^o = \angle PBC$

∵ $\angle ABE = \angle PBC, BE = BC, \angle AEB = \angle PCB$

∴$\triangle ABE \cong \triangle PBC$

∴$AB = BP$

∴ $\angle BAP = \angle BPA$

∵ $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = 50^o - 10^o = 40^o$

∴ $\angle PAB = \frac{1}{2}(180^o - \angle ABP) = \frac{1}{2}(180^o - 40^o) = 70^o$

规律 35.有二倍角时常用的辅助线

(1)构造等腰三角形使二倍角是等腰三角形的顶角的外角

例：已知，如图，在$\triangle ABC$中，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle ABC = 2\angle C$，

求证：$AB + BD = AC$

证明：延长 AB 到 E，使 $BE = BD$，连结 DE

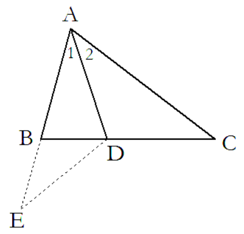
则 $\angle BED = \angle BDE$

$\because \angle ABD = \angle E + \angle BDE$

$\therefore \angle ABC = 2\angle E$

$\because \angle ABC = 2\angle C$

$\therefore \angle E = \angle C$



在$\triangle AED$和$\triangle ACD$中

$\angle E = \angle C$

$\angle 1 = \angle 2$

$AD = AD$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD$

$\therefore AC = AE$

$\because AE = AB + BE$

$\therefore AC = AB + BE$

即 $AB + BD = AC$

⑵平分二倍角

例：已知，如图，在$\triangle ABC$中，$BD \perp AC$ 于 D，$\angle BAC = 2\angle DBC$

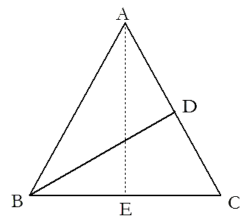
求证：$\angle ABC = \angle ACB$

证明：作$\angle BAC$的平分线 AE 交 BC 于 E，则$\angle BAE = \angle CAE = \angle DBC$

$\because BD \perp AC$

$\therefore \angle CBD + \angle C = 90^o$

$\therefore \angle CAE + \angle C = 90^o$



$\because \angle AEC = 180^o - \angle CAE - \angle C = 90^o$

$\therefore AE \perp BC$

$\therefore \angle ABC + \angle BAE = 90^o$

$\because \angle CAE + \angle C = 90^o$

$\angle BAE = \angle CAE$

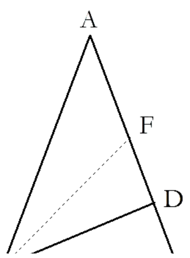
$\therefore \angle ABC = \angle ACB$

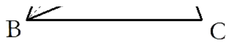
⑶加倍小角

例：已知，如图，在$\triangle ABC$中，$BD \perp AC$ 于 D，$\angle BAC = 2\angle DBC$

求证：$\angle ABC = \angle ACB$

证明：作$\angle FBD = \angle DBC$, BF 交 AC 于 F（过程略）





规律 36.有垂直平分线时常把垂直平分线上的点与线段两端点连结起来.

例：已知，如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^o$，EF 为 AB 的垂直平分线，EF 交 BC 于 F，交 AB 于 E

求证：$BF=\frac{1}{2}FC$

证明：连结 AF，则 $AF=BF$

$\therefore \angle B=\angle FAB$

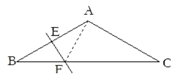
$\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle C$

$\because \angle BAC=120^o$

$\therefore \angle B=\angle C \angle BAC=\frac{1}{2}(180^o-\angle BAC)=30^o$

$\therefore \angle FAB=30^o$



$\therefore \angle FAC=\angle BAC-\angle FAB=120^o-30^o=90^o$

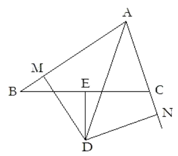
又$\because \angle C=30^o$

$\therefore AF=\frac{1}{2}FC$

$\therefore BF=\frac{1}{2}FC$

练习：已知，如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB$ 的平分线 AD 与 BC 的垂直平分线 DE 交于点 D，$DM\perp AB$ 于 M，$DN\perp AC$ 延长线于 N

求证：$BM=CN$



规律 37. 有垂直时常构造垂直平分线.

例：已知，如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于 D

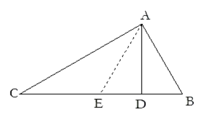
求证：$CD=AB+BD$

证明：(一) 在 CD 上截取 $DE=DB$，连结 AE，

则 $AB=AE$

$\therefore \angle B=\angle AEB$

$\because \angle B=2\angle C$



$\therefore \angle AEB=2\angle C$

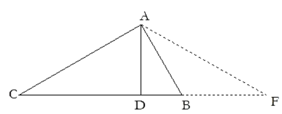
又$\because \angle AEB=\angle C+\angle EAC$

$\therefore \angle C=\angle EAC$

$\therefore AE=CE$

又$\because CD=DE+CE$

$\therefore CD=BD+AB$



(二) 延长 CB 到 F，使 $DF=DC$，连结 AF 则 $AF=AC$ (过程略)

（二）延长 CD 到 F，使 $DF=DC$，连结 AF 则 $AF=AC$（过程略）

规律 38.有中点时常构造垂直平分线.

例：已知，如图，在△ABC 中，$BC=2AB$, $\angle ABC=2\angle C, BD=CD$

求证：△ABC 为直角三角形

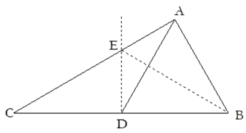
证明：过 D 作 $DE\perp BC$，交 AC 于 E，连结 BE，则 $BE=CE$，

∴$\angle C=\angle EBC$

∵$\angle ABC=2\angle C$

∴$\angle ABE=\angle EBC$

∵$BC=2AB$，$BD=CD$



∴$BD=AB$

在△ABE 和△DBE 中

$AB=BD$

$\angle ABE=\angle EBC$

$BE=BE$

∴△ABE≌△DBE

∴$\angle BAE=\angle BDE$

∵$\angle BDE=90^o$

∴$\angle BAE=90^o$

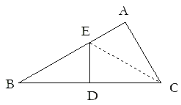
即△ABC 为直角三角形

规律 39.当涉及到线段平方的关系式时常构造直角三角形，利用勾股定理证题.

例：已知，如图，在△ABC 中，$\angle A=90^o$，DE 为 BC 的垂直平分线

求证：$BE^2-AE^2=AC^2$

证明：连结 CE，则 $BE=CE$



∵$\angle A=90^o$

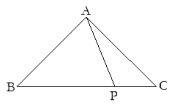
∴$AE^2+AC^2=EC^2$

∴$AE^2+AC^2=BE^2$

∴$BE^2-AE^2=AC^2$

练习：已知，如图，在△ABC 中，$\angle BAC=90^o$，

$AB=AC$，P 为 BC 上一点



求证：$PB^2+PC^2=2PA^2$

规律 40.条件中出现特殊角时常作高把特殊角放在直角三角形中.

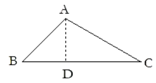
例：已知，如图，在△ABC 中，$\angle B=45^o$，$\angle C=30^o$，$AB=\sqrt{2}$，求 AC 的长.

解：过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D

∴$\angle B+\angle BAD=90^o$,

∵$\angle B = 45^o$，$\angle B = \angle BAD = 45^o$，

∴$AD = BD$



∵$AB^2 = AD^2 + BD^2$，$AB = \sqrt{2}$

∴$AD = 1$

∵$\angle C = 30^o$，$AD \perp BC$

∴$AC = 2AD = 2$

四边形部分

规律 41.平行四边形的两邻边之和等于平行四边形周长的一半.

例：已知,▱$ABCD$ 的周长为 $60cm$，对角线 AC、BD 相交于点 O，$\triangle AOB$

的周长比$\triangle BOC$ 的周长多 $8cm$，求这个四边形各边长.

解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形

∴$AB = CD$，$AD = CB$，$AO = CO$

∵$AB + CD + DA + CB = 60$

$AO + AB + OB - (OB + BC + OC) = 8$

∴$AB + BC = 30$，$AB - BC = 8$

∴$AB = CD = 19$，$BC = AD = 11$

答：这个四边形各边长分别为 $19cm$、$11cm$、$19cm$、$11cm$.

规律 42.平行四边形被对角线分成四个小三角形，相邻两个三角形周长之差等于邻边之差.

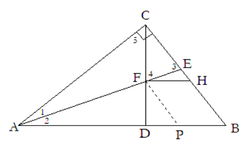
（例题如上）

规律 43.有平行线时常作平行线构造平行四边形

例：已知，如图，$Rt\triangle ABC$，$\angle ACB = 90^o$，

$CD \perp AB$ 于 D，AE 平分$\angle CAB$ 交 CD

于 F，过 F 作 $FH // AB$ 交 BC 于 H



求证：$CE = BH$

证明：过 F 作 $FP // BC$ 交 AB 于 P，则四边形 $FPBH$ 为平行四边形

∴$\angle B = \angle FPA$，$BH = FP$

∵$\angle ACB = 90^o$，$CD \perp AB$

∴$\angle 5 + \angle CAB = 45^o$，$\angle B + \angle CAB = 90^o$

∴$\angle 5 = \angle B$

∴$\angle 5 = \angle FPA$

又∵$\angle 1 = \angle 2$，$AF = AF$

∴$\triangle CAF \cong \triangle PAF$

∴$CF = FP$

∵$\angle 4 = \angle 1 + \angle 5$，$\angle 3 = \angle 2 + \angle B$

$\because \angle 4 = \angle 1 + \angle 5$，$\angle 3 = \angle 2 + \angle B$

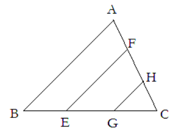
$\therefore \angle 3 = \angle 4$

$\therefore CF = CE$

$\therefore CE = BH$

练习：已知，如图，$AB // EF // GH$，$BE = GC$

求证：$AB = EF + GH$



规律 44.有以平行四边形一边中点为端点的线段时常延长此线段.

例：已知，如图，在□$ABCD$ 中，$AB = 2BC$，M 为 AB 中点

求证：$CM \perp DM$

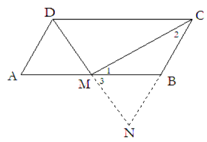
证明：延长 DM、CB 交于 N

$\because$四边形 $ABCD$ 为平行四边形

$\therefore AD = BC$，$AD // BC$

$\therefore \angle A = \angle NBA \qquad \angle ADN = \angle N$

又$\because AM = BM$



$\therefore \triangle AMD \cong \triangle BMN$

$\therefore AD = BN$

$\therefore BN = BC$

$\because AB = 2BC$，$AM = BM$

$\therefore BM = BC = BN$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle N$

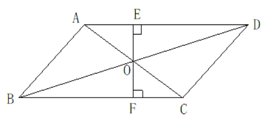
$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle N = 180^o$，

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^o$

$\therefore CM \perp DM$

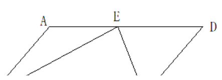
规律 45.平行四边形对角线的交点到一组对边距离相等.

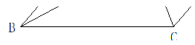
如图：$OE = OF$



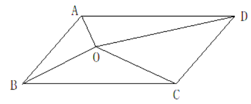
规律 46.平行四边形一边（或这边所在的直线）上的任意一点与对边的两个端点的连线所构成的三角形的面积等于平行四边形面积的一半.

如图：$S\triangle BEC = \frac{1}{2} S□ABCD$



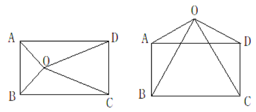


规律 47.平行四边形内任意一点与四个顶点的连线所构成的四个三角形中，不相邻的两个三角形的面积之和等于平行四边形面积的一半.



如图：$S\triangle AOB \;+\; S\triangle DOC = S\triangle BOC + S\triangle AOD = \dfrac{1}{2}S\square ABCD$

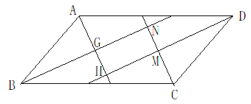
规律 48.任意一点与同一平面内的矩形各点的连线中，不相邻的两条线段的平方和相等.



如图：$AO^2 + OC^2 = BO^2 \;+ DO^2$

规律 49.平行四边形四个内角平分线所围成的四边形为矩形.

如图：四边形 $GHMN$ 是矩形



（规律 45～规律 49 请同学们自己证明）

规律 50.有垂直时可作垂线构造矩形或平行线.

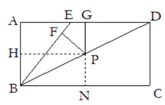
例：已知，如图，E 为矩形 $ABCD$ 的边 AD 上一点，且 $BE = ED$，P 为对角线 BD 上一点，$PF\perp BE$ 于 F，$PG\perp AD$ 于 G

求证：$PF + PG = AB$

证明：证法一：过 P 作 $PH\perp AB$ 于 H，则四边形 $AHPG$ 为矩形

$\therefore AH = GP \qquad PH /\!/ AD$

$\therefore \angle ADB = \angle HPB$



$\because BE = DE$

$\therefore \angle EBD = \angle ADB$

$\therefore \angle HPB = \angle EBD$

又$\because \angle PFB = \angle BHP = 90^o$

$\therefore \triangle PFB \cong \triangle BHP$

$\therefore HB = FP$

$\therefore AH + HB = PG + PF$

即 $AB = PG + PF$

证法二：延长 GP 交 BC 于 N，则四边形 $ABNG$ 为矩形，（证明略）

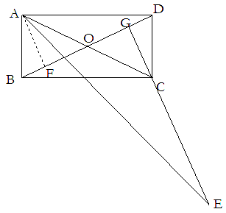
规律 51.直角三角形常用辅助线方法：

⑴作斜边上的高

例：已知，如图,若从矩形 $ABCD$ 的顶点 C 作对角线 BD 的垂线与 $\angle BAD$ 的平分线交于点 E

求证：$AC=CE$

证明：过 A 作 $AF\perp BD$，垂足为 F，则 $AF\parallel EG$



∴ $\angle FAE=\angle AEG$

∵四边形 $ABCD$ 为矩形

∴ $\angle BAD=90^o$　　$OA=OD$

∴ $\angle BDA=\angle CAD$

∵ $AF\perp BD$

∴ $\angle ABD+\angle ADB=\angle ABD+\angle BAF=90^o$

∴ $\angle BAF=\angle ADB=\angle CAD$

∵ AE 为 $\angle BAD$ 的平分线

∴ $\angle BAE=\angle DAE$

∴ $\angle BAE-\angle BAF=\angle DAE-\angle DAC$

即 $\angle FAE=\angle CAE$

∴ $\angle CAE=\angle AEG$

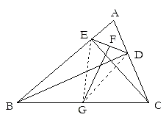
∴ $AC=EC$

⑵作斜边中线，当有下列情况时常作斜边中线：

①有斜边中点时

例：已知，如图，AD、BE 是△ABC 的高， F 是 DE 的中点，G 是 AB 的中点

求证：$GF\perp DE$



证明：连结 GE、GD

∵ AD、BE 是△ABC 的高，G 是 AB 的中点

∴ $GE=\frac{1}{2}AB$，$GD=\frac{1}{2}AB$

∴ $GE=GD$

∵ F 是 DE 的中点

∴ $GF\perp DE$

②有和斜边倍分关系的线段时

例：已知，如图，在△ABC 中，D 是 BC 延长线上一点，且 $DA\perp BA$ 于 A，$AC=\frac{1}{2}BD$

求证：$\angle ACB=2\angle B$

证明：取 BD 中点 E，连结 AE，则 $AE=BE=\frac{1}{2}BD$

∴$\angle 1=\angle B$

∵$AC=\dfrac{1}{2}BD$

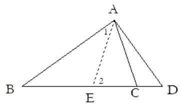
∴$AC=AE$

∴$\angle ACB=\angle 2$

∵$\angle 2=\angle 1+\angle B$

∴$\angle 2=2\angle B$

∴$\angle ACB=2\angle B$



规律 52.正方形一条对角线上一点到另一条对角线上的两端距离相等.

例：已知，如图，过正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点 P，作 $PE\perp BC$ 于 E，作 $PF\perp CD$ 于 F

求证：$AP=EF$

证明:连结 AC 、PC

∵四边形 $ABCD$ 为正方形

∴BD 垂直平分 AC，$\angle BCD=90^o$

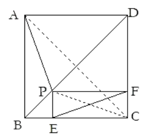
∴$AP=CP$

∵$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，$\angle BCD=90^o$

∴四边形 $PECF$ 为矩形

∴$PC=EF$

∴$AP=EF$



规律 53.有正方形一边中点时常取另一边中点.

例：已知,如图，正方形 $ABCD$ 中，M 为 AB 的中点，$MN\perp MD$，BN 平分 $\angle CBE$ 并交 MN 于 N

求证：$MD=MN$

证明：取 AD 的中点 P，连结 PM，则 $DP=PA=\dfrac{1}{2}AD$

∵四边形 $ABCD$ 为正方形

∴$AD=AB$, $\angle A=\angle ABC=90^o$

∴$\angle 1+\angle AMD=90^o$，又 $DM\perp MN$

∴$\angle 2+\angle AMD=90^o$

∴$\angle 1=\angle 2$

∵M 为 AB 中点

∴$AM=MB=\dfrac{1}{2}AB$

∴$DP=MB$　　$AP=AM$

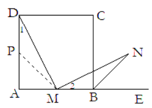
∴$\angle APM=\angle AMP=45^o$

∴$\angle DPM=135^o$

∵BN 平分 $\angle CBE$

∴$\angle CBN=45^o$

∴$\angle MBN=\angle MBC+\angle CBN=90^o+45^o=135^o$



即$\angle DPM = \angle MBN$

$\therefore \triangle DPM \cong \triangle MBN$

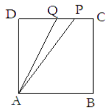
$\therefore DM = MN$

注意：把 M 改为 AB 上任一点，其它条件不变，结论仍然成立。

练习：已知，Q 为正方形 $ABCD$ 的 CD 边的中点，P 为 CQ 上一点，且

$AP = PC + BC$

求证：$\angle BAP = 2\angle QAD$



规律 54.利用正方形进行旋转变换

旋转变换就是当图形具有邻边相等这一特征时，可以把图形的某部分绕相等邻边的公共端点旋转到另一位置的引辅助线方法.

旋转变换主要用途是把分散元素通过旋转集中起来，从而为证题创造必要的条件.

旋转变换经常用于等腰三角形、等边三角形及正方形中.

例：已知，如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 90^o$，D 为 BC 边上任一点

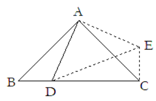
求证：$2AD^2 = BD^2 + CD^2$

证明：把$\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 90^o 得$\triangle ACE$

$\therefore BD = CE \qquad \angle B = \angle ACE$

$\because \angle BAC = 90^o$

$\therefore \angle DAE = 90^o$



$\therefore DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2AD^2$

$\because \angle B + \angle ACB = 90^o$

$\therefore \angle DCE = 90^o$

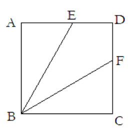
$\therefore CD^2 + CE^2 = DE^2$

$\therefore 2AD^2 = BD^2 + CD^2$

注意：把$\triangle ADC$ 绕点 A 顺时针旋转 90^o 也可，方法同上。

练习：已知，如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AD 上一点，BF 平分$\angle CBE$ 交 CD 于 F

求证：$BE = CF + AE$



规律 55.有以正方形一边中点为端点　　　　　　的线段时，常把

这条线段延长，构造全等三角形.

例：如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 CD、DA 的中点，BE 与 CF 交于 P 点

求证：$AP = AB$

证明：延长 CF 交 BA 的延长线于 K

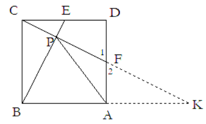
∵四边形 $ABCD$ 为正方形

$\therefore BC = AB = CD = DA \quad \angle BCD = \angle D = \angle BAD = 90^o$

∵E、F 分别是 CD、DA 的中点

$\therefore CE = \frac{1}{2}CD \quad DF = AF = \frac{1}{2}AD$

$\therefore CE = DF$



$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF$

$\therefore \angle CBE = \angle DCF$

$\because \angle BCF + \angle DCF = 90^o$

$\therefore \angle BCF + \angle CBE = 90^o$

$\therefore BE \perp CF$

又$\because \angle D = \angle DAK = 90^o \quad DF = AF \quad \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \triangle CDF \cong \triangle KAF$

$\therefore CD = KA$

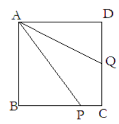
$\therefore BA = KA$

又$\because BE \perp CF$

$\therefore AP = AB$

练习：如图，在正方形 $ABCD$ 中，Q 在 CD 上，且 $DQ = QC$，P 在 BC 上，且 $AP = CD + CP$

求证：AQ 平分$\angle DAP$



规律 56.从梯形的一个顶点作一腰的平行线，把梯形分成一个平行四边形和一个三角形.

例：已知，如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AD = 3$，$AB = 4$，$BC = 7$

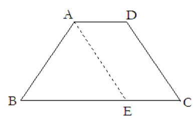
求$\angle B$ 的度数

解：过 A 作 $AE // CD$ 交 BC 于 E，则四边形 $AECD$ 为平行四边形

$\therefore AD = EC, \quad CD = AE$

$\because AB = CD = 4,$

$AD = 3, BC = 7$



$\therefore BE = AE = AB = 4$

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形

$\therefore \angle B = 60^o$

$\therefore \angle B = 60^o$

规律 57.从梯形同一底的两端作另一底所在直线的垂线，把梯形转化成一个矩形和两个三角形.

例：已知，如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AB = AC$，$\angle BAC = 90^o$，$BD = BC$，BD 交 AC 于 O

求证：$CO = CD$

证明：过 A、D 分别作 $AE \perp BC$，$DF \perp BC$，垂足分别为 E、F 则四边形 $AEFD$ 为矩形

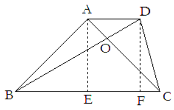
$\therefore AE = DF$

$\because AB = AC$，$AE \perp BC$，$\angle BAC = 90^o$，

$\therefore AE = BE = CE = \frac{1}{2}BC$，$\angle ACB = 45^o$

$\because BC = BD$

$\therefore AE = DF = \frac{1}{2}BD$



又$\because DF \perp BC$

$\therefore \angle DBC = 30^o$

$\because BD = BC$

$\therefore \angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}(180^o - \angle DBC) = 75^o$

$\because \angle DOC = \angle DBC + \angle ACB = 30^o + 45^o = 75^o$

$\therefore \angle BDC = \angle DOC$

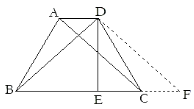
$\therefore CO = CD$

规律 58.从梯形的一个顶点作一条对角线的平行线，把梯形转化成平行四边形和三角形.

例：已知，如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AC \perp BD$，$AD + BC = 10$，$DE \perp BC$ 于 E

求 DE 的长.

解：过 D 作 $DF // AC$，交 BC 的延长线于 F，则四边形 $ACFD$ 为平行四边形



$\therefore AC = DF$，　$AD = CF$

$\because$四边形 $ABCD$ 为等腰梯形

$\therefore AC = DB$

$\therefore BD = FD$

$\because DE \perp BC$

$\therefore BE = EF = \frac{1}{2}BF$

$= \frac{1}{2}(BC + CF) = \frac{1}{2}(BC + AD)$

$= \frac{1}{2} \times 10 = 5$

$\because AC // DF$，$BD \perp AC$

$\therefore BD \perp DF$

∴$BD \perp DF$

∵$BE = FE$

∴$DE = BE = EF = \frac{1}{2}BF = 5$

答：DE 的长为 5.

规律 59.延长梯形两腰使它们交于一点，把梯形转化成三角形.

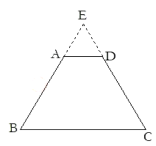
例：已知，如图，在四边形 $ABCD$ 中，有 $AB = DC$，$\angle B = \angle C$，$AD <$ BC

求证：四边形 $ABCD$ 等腰梯形

证明：延长 BA、CD，它们交于点 E

∵ $\angle B = \angle C$

∴$EB = EC$



又∵$AB = DC$

∴$AE = DE$

∴ $\angle EAD = \angle EDA$

∵ $\angle E + \angle EAD + \angle EDA = 180^o$

$\angle B + \angle C + \angle E = 180^o$

∴ $\angle EAD = \angle B$

∴$AD // BC$

∵$AD \neq BC$，$\angle B = \angle C$

∴四边形 $ABCD$ 等腰梯形

（此题还可以过一顶点作 AB 或 CD 的平行线；也可以过 A、D 作 BC 的垂线）

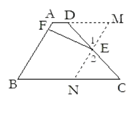
规律 60.有梯形一腰中点时，常过此中点作另一腰的平行线，把梯形转化成平行四边形.

例：已知,如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，E 为 CD 中点，$EF \perp AB$ 于 F

求证：S 梯形 $ABCD = EF \cdot AB$

证明：过 E 作 $MN // AB$，交 AD 的延长线于 M，交 BC 于 N，则四边形 $ABNM$ 为平行四边形

∵$EF \perp AB$



∴S□$ABNM = AB \cdot EF$

∵$AD // BC$

∴ $\angle M = \angle MNC$

又∵$DE = CE$　$\angle 1 = \angle 2$

∴$\triangle CEN \cong \triangle DEM$

∴$S\triangle CEN = S\triangle DEM$

∴S 梯形 $ABCD$ = S 五边形 $ABNED$ + $S\triangle CEN$ = S 五边形 $ABNED$ + $S\triangle DEM$

$= S$ 梯形 $ABCD = EF \cdot AB$

规律 61．有梯形一腰中点时，也常把一底的端点与中点连结并延长与另

一底的延长线相交，把梯形转换成三角形.

例：已知,如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AB \perp AD$ 于 A，$DE = EC$

$= BC$

求证：$\angle AEC = 3\angle DAE$

证明：连结 BE 并延长交 AD 的延长线于 N

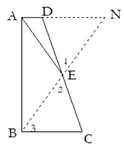
$\because AD // BC$

$\therefore \angle 3 = \angle N$

又$\because \angle 1 = \angle 2 \quad ED = EC$

$\therefore \triangle DEN \cong \triangle CEB$

$\therefore BE = EN \quad DN = BC$



$\because AB \perp AD$

$\therefore AE = EN = BE$

$\therefore \angle N = \angle DAE$

$\therefore \angle AEB = \angle N + \angle DAE = 2\angle DAE$

$\because DE = BC \quad BC = DN$

$\therefore DE = DN$

$\therefore \angle N = \angle 1$

$\because \angle 1 = \angle 2 \quad \angle N = \angle DAE$

$\therefore \angle 2 = \angle DAE$

$\therefore \angle AEB + \angle 2 = 2\angle DAE + \angle DAE$

即$\angle AEC = 3\angle DAE$

规律 62.梯形有底的中点时，常过中点做两腰的平行线.

例：已知,如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AD < BC$，E、F 分别是 AD、

BC 的中点，且 $EF \perp BC$

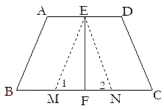
求证：$\angle B = \angle C$

证明：过 E 作 $EM // AB$, $EN // CD$,交 BC 于 M、N，则得▱$ABME$，▱$NCDE$

$\therefore AE = BM$，$AB // = EM$，$DE = CN$，$CD = NE$

$\because AE = DE$

$\therefore BM = CN$



又$\because BF = CF$

$\therefore FM = FN$

又$\because EF \perp BC$

$\therefore EM = EN$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\because AB // EM, \quad CD // EN$

$\therefore \angle 1 = \angle B \quad \angle 2 = \angle C$

$\therefore \angle B = \angle C$

规律 63．任意四边形的对角线互相垂直时，它们的面积都等于对角线乘

积的一半.

例：已知,如图,梯形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,AC 与 BD 交于 O,且 $AC\perp BD$,

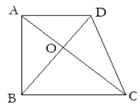
$AC=4$，$BD=3.4$,

求梯形 $ABCD$ 的面积.

解：∵$AC\perp BD$

∴$S\triangle ABD=\frac{1}{2}AO\cdot BD$

$S\triangle BCD=\frac{1}{2}CO\cdot BD$



∴S 梯形 $ABCD\ =S\triangle ABD\ +S\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}AO\cdot BD+\frac{1}{2}CO\cdot BD$

$=\frac{1}{2}(AO+CO)\cdot BD$

即 S 梯形 $ABCD=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times4\times3.4$

$=6.8$

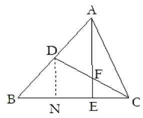
答：梯形 $ABCD$ 面积为 6.8.

规律 64.有线段中点时，常过中点作平行线，利用平行线等分线段定理的推论证题.

例:已知：$\triangle ABC$ 中，D 为 AB 中点，E 为 BC 的三等分点，($BE>CE$)

AE、CD 交于点 F

求证：F 为 CD 的中点



证明：过 D 作 $DN\parallel AE$ 交 BC 于 N

∵D 为 AB 中点

∴$BN=EN$

又∵E 为 BC 的三等分点

∴$BN=EN=CE$

∵$DN\parallel AE$

∴F 为 CD 的中点

规律 65.有下列情况时常作三角形中位线.

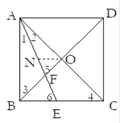
⑴**有一边中点;**

⑵**有线段倍分关系;**

⑶**有两边（或两边以上）中点.**

例：如图，AE 为正方形 $ABCD$ 中$\angle BAC$ 的平分线，AE

分别交 BD、BC 于 F、E，AC、BD 相交于 O



求证：$OF=\frac{1}{2}CE$

证明：取 AE 的中点 N，连结 ON,则 ON 为$\triangle ACE$ 的中位线

∴$ON\parallel CE$，$ON=\frac{1}{2}CE$

$\therefore ON \parallel CE$，$ON=\frac{1}{2}CE$

$\therefore \angle 6=\angle ONE$

$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形

$\therefore \angle 3=\angle 4=45^o$

$\therefore \angle 5=\angle 3+\angle 1,\ \angle 6=\angle 4+\angle 2$

$\because \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle 5=\angle 6$

$\because \angle 6=\angle ONE$

$\therefore \angle ONE=\angle 5$

$\therefore ON=OF$

$\therefore OF=\frac{1}{2}CE$

规律 66.有下列情况时常构造梯形中位线

⑴有一腰中点

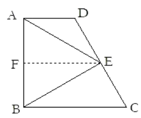
⑵有两腰中点

⑶涉及梯形上、下底和

例 1：已知,如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle DAB=90^o$,E 为 CD 的中点，连结 AE、BE

求证：$AE=BE$

证明：取 AB 的中点 F，连结 EF，则



$EF \parallel AD$

$\therefore \angle DAB=\angle EFB=90^o$

$\therefore EF\perp AB$

$\therefore EF$ 为 AB 的中垂线

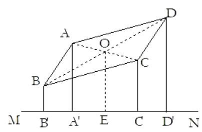
$\therefore AE=BE$

例 2：从□$ABCD$ 的顶点 $ABCD$ 向形外的任意直线 MN 引垂线 AA'、BB'、CC'、DD'，垂足分别为 A'、B'、C'、D'

求证：$AA'+CC'=BB'+DD'$

证明：连结 AC、BD，它们交于点 O，

过 O 作 $OE\perp MN$ 于 E，则 $AA' \parallel OE \parallel CC'$



$\because$四边形 $ABCD$ 为平行四边形

$\therefore AO=CO$

$\therefore A'E=C'E$

$\therefore AA'+CC'=2OE$

同理可证：$BB'+DD'=2OE$

$\therefore AA'+CC'=BB'+DD'$

规律 67.连结任意四边形各边中点所得的四边形为平行四边形.

规律 68.连结对角线相等的四边形中点所得的四边形为菱形.

规律 69.连结对角线互相垂直的四边形各边中点所得的四边形为矩形.

规律 70.连结对角线互相垂直且相等的四边形各边中点所得的四边形为正方形.

规律 71.连结平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形各边中点所得的四边形分别为平行四边形、菱形、矩形、正方形、菱形.

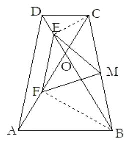
规律 72.等腰梯形的对角线互相垂直时，梯形的高等于<u>两底和的一半</u>（或中位线的长）.

以上各规律请同学们自己证明.（利用中位线证明）

规律 73.等腰梯形的对角线与底构成的两个三角形为等腰三角形.

例：已知，如图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AB > CD$，$AD = BC$，对角线 AC、BD 相交于 O，$\angle AOB = 60^o$，且 E、F、M 分别为 OD、OA、BC 的中点

求证：$\triangle MEF$ 是等边三角形



证明：连结 BF、CE

∵四边形 $ABCD$ 为等腰梯形

∴$AD = BC$，$AC = BD$

又∵AB 为公共边

∴$\triangle ABD \cong \triangle BAC$

∴$\angle CAB = \angle DBA$

∴$OA = OB$

∵$\angle AOB = 60^o$

∴$\triangle ABO$ 为等边三角形

又∵F 为 AO 中点

∴$BF \perp AC$

∵M 为 BC 中点

∴$MF = \frac{1}{2} BC$

同理可证：$ME = \frac{1}{2} BC$

∵E、F 分别为 OD、OA 中点

∴$EF = \frac{1}{2} AD$

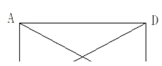
∵$AD = CB$

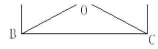
∴$ME = MF = EF$

∴$\triangle MEF$ 为等边三角形

规律 74.如果矩形对角线相交所成的钝角为 120^o，则矩形较短边是对角线长的一半.

例：已知，四边形 $ABCD$ 为矩形，对角线 AC、BD 相交于点 O，$\angle AOB = 120^O$.





求证：$AB=\frac{1}{2}BD$

（证明略）

规律 75.梯形的面积等于一腰的中点到另一腰的距离与另一腰的乘积.

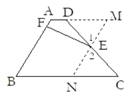
例：已知,如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，E 为 CD 中点，$EF\perp AB$ 于 F

求证：S 梯形 $ABCD=EF\cdot AB$

证明：过 E 作 $MN/\!/AB$，交 AD 的延长线于 M，交 BC 于 N，则四边形 $ABNM$ 为平行四边形

$\because EF\perp AB$

$\therefore S_{\square ABNM}=AB\cdot EF$



$\because AD/\!/BC$

$\therefore \angle M=\angle MNC$

又$\because DE=CE$　　$\angle 1=\angle 2$

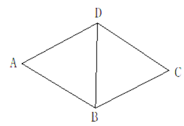
$\therefore \triangle CEN\cong\triangle DEM$

$\therefore S_{\triangle CEN}=S_{\triangle DEM}$

$\therefore S$ 梯形 $ABCD=S$ 五边形 $ABNED+S_{\triangle CEN}=S$ 五边形 $ABNED+S_{\triangle DEM}$

规律 76.若菱形有一内角为 120^o，则菱形的周长是较短对角线长的 4 倍.

例：已知，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=120^O$.

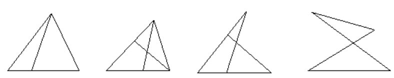


求证:$AB=BD$

（证明略）

相似形和解直角三角形部分

规律 77.当图形中有叉线（基本图形如下）时，常作平行线.

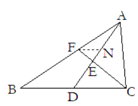


例：已知，如图，AD 为$\triangle ABC$ 的中线，F 为 AB 上任一点，CF 交 AD 于 E，求证：$\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{EC}$

证明：过 F 作 $FN/\!/BC$ 交 AD 于 N

$\therefore \frac{AF}{AB}=\frac{FN}{BD}$　　$\frac{FN}{CD}=\frac{EF}{CE}$

又$\because CD=BD$



$\therefore \frac{AF}{AB}=\frac{EF}{EC}$

规律 78.有中线时延长中线（有时也可在中线上截取线段）构造平行四边形.

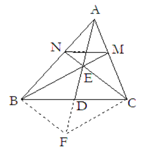
例：AD 为$\triangle ABC$ 的中线，E 为 AD 上一点，BE、CE 的延长线分别交

AC、AB 于点 M、N

求证：$MN // BC$

证明：延长 AD 至 F，使 $DF = DE$，连结 BF、

CF，则四边形 $BFCE$ 为平行四边形



$\therefore BF // CN$ $\quad CF // BM$

$\therefore \frac{AN}{NB} = \frac{AE}{EF}$ $\quad \frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MC}$

$\therefore \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC}$

$\therefore MN // BC$

规律 79.当已知或求证中，涉及到以下情况时，常构造直角三角形.

⑴有特殊角时，如有 30^o、45^o、60^o、120^o、135^o 角时.

⑵涉及有关锐角三角函数值时.

构造直角三角形经常通过作垂线来实现.

例：一轮船自西向东航行，在 A 处测得某岛 C 在北偏东 60^o 的方向上，

船前进 8 海里后到达 B，再测 C 岛在北偏东 30 的方向上，问船再

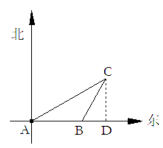
前进多少海里与 C 岛最近？最近距离是多少？

解：由题可作图，且$\angle CAB = 60^o$ ，$\angle ABC = 120^o$ ，$AB = BC = 8$（海里）

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$BC = 8$，$\angle CBD = 60^o$ ，

$\therefore BD = BC \cdot cos60^o = 8 \times \frac{1}{2} = 4$（海里）

$CD = BC \cdot sin60^o = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$（海里）



答：船再前进 4 海里就与 C 最近，最近距离是 $4\sqrt{3}$

海里.

规律 80. 0^o、30^o、45^o、60^o、90^o 角的三角函数值表

三角函数	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
	0				1
	1				0
	0		1		-
cot A	-		1		0

另外：0^o、30^o、45^o、60^o、90^o 的正弦、余弦、正切值也可用下面的口诀来记忆：

0^o 可记为北京电话区号不存在，即：010 不存在，90^o 正好相反

30^o、45^o、60^o 可记为：

1、2、3、3、2、1，

3、9、27，

弦比 2，切比 3，

分子根号别忘添.

其中余切值可利用正切与余切互为倒数求得.

规律 81. 同角三角函数之间的关系：

（1）.平方关系： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　**（2）.倒数关系：** $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

（3）.商数关系： $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　　$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

规律 82. 任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值；任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值.

规律 83. 任意锐角的正切值等于它的余角的余切值；任意锐角的余切值等于它的余角的正切值.

规律 84.三角形的面积等于任意两边与它们夹角正弦之积的一半.

例：已知$\triangle ABC$中,$\angle A=60^o$,$AB=6$,$AC=4$,求$\triangle ABC$的面积。

解：作$BD\perp AC$于D

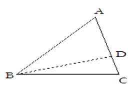
在$Rt\triangle ABD$中，$BD=AB\cdot sinA$

$\therefore S\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$

$=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB\cdot sinA$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times sin60^o$

$=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$



规律 85.等腰直角三角形斜边的长等于直角边的 $\sqrt{2}$ 倍.

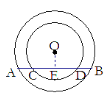
规律 86.在含有 30^o 角的直角三角形中，60^o 角所对的直角边是 30^o 角所对的直角边的 $\sqrt{3}$ 倍.（即 30^o 角所对的直角边是几，另一条直角边就是几倍 $\sqrt{3}$.）

规律 87.直角三角形中，如果较长直角边是较短直角边的 2 倍，则斜边是较短直角边的 $\sqrt{5}$ 倍.

圆 部 分

规律 88.圆中解决有关弦的问题时，常常需要作出圆心到弦的垂线段（即弦心距）这一辅助线，一是利用垂径定理得到平分弦的条件，二是构造直角三角形，利用勾股定理解题.

例：如图，在以O为圆心的两个同心圆中，大圆的弦AB交小圆于C、D二点.求证：$AC=BD$



证明:过O作$OE\perp AB$于E

$\because O$为圆心，$OE\perp AB$

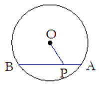
∵O 为圆心，$OE\perp AB$

∴$AE=BE$　　$CE=DE$

∴$AC=BD$

练习：如图，AB 为⊙O 的弦，P 是 AB 上的一点，$AB=10cm$，$PA=4cm$.

求⊙O 的半径.



规律 89.有等弧或证弧等时常连等弧所对的弦或作等弧所对的圆心角.

例：如图，已知 AB 是⊙O 的直径，M、N 分别是 AO、BO 的中点，

$CM\perp AB$,$DN\perp AB$,求证：

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

证明：（一）连结 OC、OD

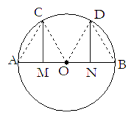
∵M、N 分别是 AO、BO 的中点

∴$OM=\frac{1}{2}AO$、$ON=\frac{1}{2}BO$

∵$OA=OB$

∴$OM=ON$

∵$CM\perp OA$、$DN\perp OB$、$OC=OD$



∴$Rt\triangle COM\cong Rt\triangle DON$

∴$\angle COA=\angle DOB$

∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

（二）连结 AC、OC、OD、BD

∵M、N 分别是 AO、BO 的中点

∴$AC=OC$　　　$BD=OD$

∵$OC=OD$

∴$AC=BD$

∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

规律 90.有弦中点时常连弦心距

例：如图，已知 M、N 分别是⊙O 的弦 AB、CD 的中点,$AB=CD$，求证：$\angle AMN=\angle CNM$

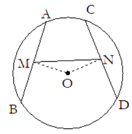
证明：连结 OM、ON

∵O 为圆心，M、N 分别是弦 AB、CD 的中点

∴$OM\perp AB$　　$ON\perp CD$

∵$AB=CD$

∴$OM=ON$



∴$\angle OMN=\angle ONM$

∵$\angle AMN=90^{o}-\angle OMN$

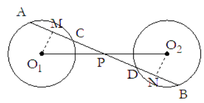
$\angle CNM = 90^o - \angle ONM$

$\therefore \angle AMN = \angle CNM$

规律 91.证明弦相等或已知弦相等时常作弦心距.

例：如图，已知⊙O_1与⊙O_2为等圆，P 为 O_1、O_2 的中点，过 P 的直线分别交⊙O_1、⊙O_2于 A、C、D、B.求证：$AC = BD$

证明：过 O_1 作 $O_1M \perp AB$ 于 M,过 O_2 作 $O_2N \perp AB$ 于 N，则 $O_1M // O_2N$



$\therefore \dfrac{O_1M}{O_2N} = \dfrac{O_1P}{O_2P}$

$\because O_1P = O_2P$

$\therefore O_1M = O_2N$

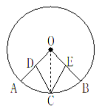
$\therefore AC = BD$

规律 92.有弧中点（或证明是弧中点）时，常有以下几种引辅助线的方法：

(1)连结过弧中点的半径

(2)连结等弧所对的弦

(3)连结等弧所对的圆心角



例：如图，已知 D、E 分别为半径 OA、OB 的中点，C 为弧 AB 的中点，求证：$CD = CE$

证明：连结 OC

$\because C$ 为弧 AB 的中点

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$

$\because D$、E 分别为 OA、OB 的中点，且 $AO = BO$

$\therefore OD = OE = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{2}BO$

又$\because OC = OC$

$\therefore \triangle ODC \cong \triangle OEC$

$\therefore CD = CE$

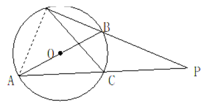
规律 93.圆内角的度数等于它所对的弧与它对顶角所对的弧的度数之和的一半.

规律 94.圆外角的度数等于它所截两条弧的度数之差的一半.

规律 95.有直径时常作直径所对的圆周角，再利用直径所对的圆周角为直角证题.

例：如图，AB 为⊙O 的直径，AC 为弦，P 为 AC 延长线上一点，且 $AC = PC$,PB 的延长线交⊙O 于 D，求证：$AC = DC$

证明：连结 AD



∵AB 为⊙O 的直径

∴$\angle ADP = 90^o$

∵$AC = PC$

∴$AC = CD = \frac{1}{2}AP$

练习：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BCA = 90^o$,以 BC 为直径的⊙O 交 AB 于 E，D 为 AC 中点，连结 BD 交⊙O 于 F.求证：$\frac{BC}{BE} = \frac{CF}{EF}$

规律 96.有垂直弦时也常作直径所对的圆周角.

规律 97.有等弧时常作辅助线有以下几种：

⑴作等弧所对的弦

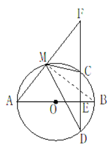
⑵作等弧所对的圆心角

⑶作等弧所对的圆周角

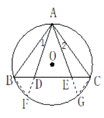
练习：1.如图，⊙O 的直径 AB 垂直于弦 CD，交点为 E，F 为 DC 延长线上一点，连结 AF 交⊙O 于 M.求证：$\angle AMD = \angle FMC$(提示：连结 BM)

2.如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，D、E 在 BC 边上，且 $BD = CE$，$\angle 1 = \angle 2$，求证：$AB = AC$

（提示如图）



1题图



2题图

规律 98.有弦中点时，常构造三角形中位线.

例：已知，如图，在⊙O 中，$AB \perp CD$，$OE \perp BC$ 于 E，求证：$OE = \frac{1}{2}AD$

证明：作直径 CF，连结 DF、BF

∵CF 为⊙O 的直径

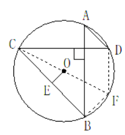
∴$CD \perp FD$

又∵$CD \perp AB$

∴$AB // DF$

∴ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BF}$

∴$AD = BF$



∵$OE \perp BC$　O 为圆心　$CO = FO$

∴$CE = BE$

∴$OE = \frac{1}{2}BF$

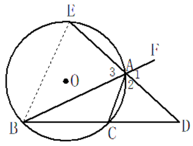
∴$OE = \frac{1}{2}AD$

规律 99.圆上有四点时，常构造圆内接四边形.

例：如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，直线 AD 平分$\angle FAC$，交⊙O 于 E，交 BC 的延长线于 D，求证：$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

BC 的延长线于 D，求证：$AB\cdot AC = AD\cdot AE$

证明：连结 BE



$\because \angle 1 = \angle 3 \quad \angle 2 = \angle 1$

$\therefore \angle 3 = \angle 2$

$\because$四边形 $ACBE$ 为圆内接四边形

$\therefore \angle ACD = \angle E$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ADC$

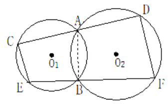
$\therefore \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AD}$

$\therefore AB\cdot AC = AD\cdot AE$

规律 100.两圆相交时，常连结两圆的公共弦

例：如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A、B，过 A 的直线分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 C、D，过 B 的直线分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 E、F.求证：$CE \mathbin{/\mkern-6mu/} DF$

证明：连结 AB



$\because$四边形为圆内接四边形

$\therefore \angle ABF = \angle C$

同理可证：$\angle ABE = \angle D$

$\because \angle ABF + \angle ABE = 180^o$

$\therefore \angle C + \angle D = 180^o$

$\therefore CE \mathbin{/\mkern-6mu/} DF$

规律 101.在证明直线和圆相切时，常有以下两种引辅助线方法：

(1)当已知直线经过圆上的一点，那么连结这点和圆心，得到辅助半径，再证明所作半径与这条直线垂直即可.

(2)如果不知直线与圆是否有交点时，那么过圆心作直线的垂线段，再证明垂线段的长度等于半径的长即可.

例 1：如图，P 为$\odot O$ 外一点，以 OP 为直径作圆交$\odot O$ 于 A、B 两点，连结 PA、PB.

求证：PA、PB 为$\odot O$ 的切线

证明：连结 OA

$\because PO$ 为直径

$\therefore \angle PAO = 90^o$

$\therefore OA \perp PA$

$\because OA$ 为$\odot O$ 的半径

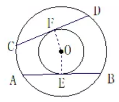
$\therefore PA$ 为$\odot O$ 的切线

同理：PB 也为$\odot O$ 的切线

例 2：如图，同心圆 O，大圆的弦 $AB = CD$，且 AB 是小圆的切线，切点为 E，求证：CD 是小圆的切线

证明：连结 OE，过 O 作 $OF \perp CD$ 于 F

∵OE 为半径，AB 为小圆的切线



∴$OE \perp AB$

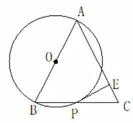
∵$OF \perp CD, AB = CD$

∴$OF = OE$

∴CD 为小圆的切线

练习:如图,等腰△ABC,以腰 AB 为直径作⊙O 交底边 BC 于 P,$PE \perp AC$ 于 E,

求证：PE 是⊙O 的切线



规律 102.当已知条件中有切线时，常作过切点的半径，利用切线的性质定理证题.

例：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^o$，$AC = 12$，$BC = 9$，D 是 AB 上一点，以 BD 为直径的⊙O 切 AC 于 E，求 AD 长.

解：连结 OE，则 $OE \perp AC$

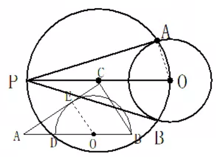
∵$BC \perp AC$

∴$OE // BC$

∴$\frac{OE}{BC} = \frac{AO}{AB}$

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

∴$\frac{OE}{9} = \frac{AB - OB}{AB} = \frac{15 - OE}{15}$



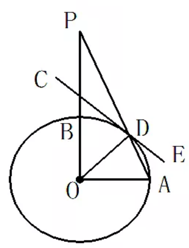
∴$OE = OB = \frac{45}{8}$

∴$BD = 2OB = \frac{45}{4}$

∴$AD = AB - DB = 15 - \frac{45}{4} = \frac{15}{4}$

答：AD 的长为$\frac{15}{4}$.

练习：如图，⊙O 的半径 $OA \perp OB$，点 P 在 OB 的延长线上，连结 AP 交⊙O 于 D，过 D 作⊙O 的切线 CE 交 OP 于 C，求证：$PC = CD$



公众号

喜欢此内容的人还喜欢

《咬文嚼字》|100个高频别字整理表

初中优学

拜登政府，不想谈了是吧?

求实处

为乡村振兴提供有力法治保障

国家乡村振兴局