"助力乡村学校音体美课堂行动"官方合作图书

V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代

GLIST 明德·弘毅·品质 13

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

概率论与数理统计辅导讲义

2022

主编◎王式安(北京理工大学)

经典畅品| 本书为作者多年强化班讲稿精华集结而成，并结合考生反馈不断修订，精益求精

严选习题| 超值赠送《高分提档严选题》，提档加速，火力全开，高分领跑直通名校

免费视频| 微信扫右侧二维码观看本书配套精选视频，李永乐团队主讲 ... 身旁

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

"助力乡村学校音体美课堂行动"官方合作图书

V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜時代 TM

GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代考研数学系列

2022

概率论与数理统计辅导讲义

主编◎王式安（北京理工大学）

@考研路上刚刚启程的你

人是为明天活着的，因为记忆里有朝阳晓露。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义 / 王式安主编．—北京：中国农业出版社，2021．2

(金榜时代考研数学系列)

ISBN 978-7-109-27953-7

Ⅰ．①概… Ⅱ．①王… Ⅲ．①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 025916 号

中国农业出版社出版

地址：北京市朝阳区麦子店街 18 号楼

邮编：100125

责任编辑：吕 睿 毛志强

责任校对：吴丽婷

印刷：河北正德印务有限公司

版次：2021 年 2 月第 1 版

印次：2021 年 2 月河北第 1 次印刷

发行：新华书店北京发行所

开本：787mm×1092mm 1/16

印张：7.5

字数：180 千字

定价：59.80 元

金榜時代™考研数学系列图书

内容简介及使用说明

考研数学满分150分，数学在考研成绩中的比重很大；同时又因数学学科本身的特点，考生的数学成绩历年来千差万别，数学成绩好在考研中很占优势，因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要，那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验，发现考研数学命题的灵活性非常大，不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同，更表现在对多个知识点的综合考查上，这些题目在表达上多一个字或多一句话，难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离，而构成这些难点的主要因素，实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时，从阅卷反映的情况来看，考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话，那就是：要想数学拿高分，就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此，李永乐考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验，精心编写了本系列图书，目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习，从基本概念、定理和公式的记忆，到对其的熟练运用，循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明，供考生复习时参考。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书·基础篇》	**内容基础·提炼精准·易学易懂**（推荐使用时间：2020年6月—2020年12月）	
	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来，形成考研数学的基础内容和复习逻辑，实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡，开启考研复习第一篇章。	考生复习过本校大学数学教材后，即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材，与考研大纲差别较大，也可使用本书替代大学数学教材。
《数学基础过关660题》	**题目经典·体系完备·逻辑清晰**（推荐使用时间：2020年9月—2021年4月）	
	本书主编团队出版20年的经典之作，一直被模仿，从未被超越。年销量达百万余册，是当之无愧的考研数学头号畅销书，拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者，口碑爆棚，考研数学不可不入！“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础，重概念，重理论，一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关660题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法，你就能基础稳固、思维灵活，对知识、定理、公式的理解提升到新的高度，避免陷入复习中后期“基础不牢，地动山摇”的窘境。	与《数学复习全书·基础篇》搭配使用，在完成对基础知识的学习后，有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧，加强知识点的前后联系，将之体系化、系统化，分清重难点，让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题，同学们不要轻视，也不要一开始就盲目做题。看到一道题，要能分辨出是考哪个知识点，考什么，然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点，应用的定理、公式的条件是否熟悉，这样才算真正做好了一道题。
《数学历年真题全精解析·基础篇》	**分类详解·注重基础·突出重点**（推荐使用时间：2020年6月—2020年12月）	
	本书精选精析1987—2008年考研数学真题，帮助考生提前了解大学水平考试与考研选拔考试的差别，不会盲目自信，也不会妄自菲薄，真正跨入考研的门槛。	与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关660题》搭配使用，复习完一章，即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记，第二轮复习时继续练习。

<table>
<tr><th>书名</th><th>本书特点</th><th>本书使用说明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学复习全书》(综合提高篇)</td><td colspan="2">系统全面·深入细致·综合提高(推荐使用时间:2021 年 1 月—2021 年 7 月)</td></tr>
<tr><td>本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选 2019 年“当当 20 周年白金作家”,考研界仅两位作者获此称号。
本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。</td><td>利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。
在《数学基础过关 660 题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学历年真题全精解析》(强化篇)</td><td colspan="2">真题真练·总结规律·提升技巧(推荐使用时间:2021 年 7 月—2021 年 11 月)</td></tr>
<tr><td>本书完整收录 2009—2021 年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。</td><td>边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。
通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《高等数学辅导讲义》
《线性代数辅导讲义》
《概率论与数理统计辅导讲义》</td><td colspan="2">经典讲义·专项突破·强化提高(推荐使用时间:2021 年 7 月—2021 年 10 月)</td></tr>
<tr><td>三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。</td><td>哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关 330 题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关 330 题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学强化通关 330 题》</td><td colspan="2">综合训练·突破重点·强化提高(推荐使用时间:2021 年 5 月—2021 年 10 月)</td></tr>
<tr><td>强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。</td><td>与《数学基础过关 660 题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学决胜冲刺 6 套卷》</td><td colspan="2">冲刺模拟·有的放矢·高效提分(推荐使用时间:2021 年 11 月—2021 年 12 月)</td></tr>
<tr><td>通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。</td><td>在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学临阵磨枪》</td><td colspan="2">查漏补缺·问题清零·从容应战(推荐使用时间:考前 20 天)</td></tr>
<tr><td>本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。</td><td>搭配《数学决胜冲刺 6 套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。</td></tr>
</table>

前　言

本书是为准备考研的学生复习概率论与数理统计而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为在校大学生学习“概率论与数理统计”时的参考书。

全书在结构上共八章，每章均由**考试内容**，**考试要求**，**基本概念、基本理论和基本方法**，**典型例题分析选讲**四部分组成。为了方便同学们总结归纳以及更好地掌握考试的知识要点，本书的章节顺序安排和内容讲解程度上与《考试大纲》保持一致。同书赠送《高分提档严选题》，由练习题、附录组成。

本书力求用不多的篇幅，在较短的时间内，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和方法，了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面，通过对精选**典型例题**的分析讲评，帮助同学们厘清解题思路，熟悉常用的方法、技巧。题后的评注，希望同学们能认真多读两遍，这是重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。另一方面，精编适量的**练习题**，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。每一道练习题都配有答案，并对解题过程中的难点给出了提示。

在考研数学中，数学一和数学三考概率论与数理统计，占 4 个考题(2 个选择，1 个填空，1 个解答)，分值为 32 分。相对于高等数学丰富多变的题型与方法，概率论与数理统计这门学科考查的题型较固定、解题方法单一、解题技巧较少。所以，把握概率论与数理统计的考点，重视基本功的训练，持之以恒，那么概率复习起来是不会觉得很困难，考试中有关概率的题目也是容易得分的。附录中提供了最近几年的概率论与数理统计的考题，希望同学们在使用本书时，能随时翻看，体会考研概率题型的类型和特点。

总之，希望本书能对同学们的复习备考有所帮助。由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2021 年 2 月

目　录

第一章　随机事件和概率

第二章　随机变量及其分布

第三章　多维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

第五章　大数定律和中心极限定理

第六章　数理统计的基本概念

第七章　参数估计

第八章　假设检验(仅数学一要求)

第一章　随机事件和概率

一、考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

二、考试要求

1. 理解 随机事件、概率、条件概率、事件的独立性、独立重复试验.

2. 了解 样本空间(基本事件).

3. 掌握 事件的关系及运算,概率的基本性质,概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式,用事件独立性进行概率计算,计算独立重复试验有关事件概率的方法.

4. 会 计算古典型概率和几何型概率.

三、基本概念、基本理论和基本方法

(一)随机事件与样本空间

(1)随机试验

定义　对随机现象进行观察或试验称为随机试验,简称试验,记作 E. 它具有如下特点:

1) 可以在相同条件下重复进行;

2) 所得的可能结果不止一个,且所有可能结果都能事前已知;

3) 每次具体试验之前无法预知会出现哪个结果.

(2)样本空间

定义　随机试验的每一可能结果称为样本点,记作 ω. 由所有样本点全体组成的集合称为样本空间,记作 Ω.

显然,样本点是组成样本空间的元素,于是有 $\omega \in \Omega$.

(3) 随机事件

定义　样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**，常用字母 A,B,C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成，由一个样本点组成的子集是最简单事件，称为**基本事件**. 随机事件既然由样本点组成，因此，也可将随机事件看成是由基本事件组成.

如果一次试验的结果为某一基本事件出现，就称该基本事件出现或发生. 如果组成事件 A 的一个基本事件出现或发生，也称事件 A 出现或发生.

把 Ω 看成一事件，则每次试验必有 Ω 中某一基本事件(即样本点) 发生，也就是每次试验 Ω 必然发生，称 Ω 为**必然事件**.

把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 看成一个事件. 每次试验 $\varnothing$ 必不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

(二) 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 事件的包含

定义　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

从集合关系来说，$A\subset B$ 就是 A 中的每一个样本点都属于 B.

(2) 事件的相等

定义　如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

$A=B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点.

(3) 事件的交

定义　如果事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积，记为$A\cap B$ 或 AB.

集合 $A\cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的所有公共样本点构成.

事件的交可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=A_1A_2\cdots A_n\cdots.$$

(4) 互斥事件

定义　如果事件 A 与事件 B 满足关系 $AB=\varnothing$，即 A 与 B 同时发生是不可能事件，则称事件 A 和事件 B **互斥**或**互不相容**.

互斥的两事件没有公共样本点.

事件的互斥可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$，则称这 n 个事件两两互斥或两两互不相容.

如果可数无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$，则称这可数无穷多个事件两两互斥或两两互不相容.

(5) 事件的并

定义　如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这样一个事件为事件 A 与事件 B 的并

或和,记为 $A \cup B$.

集合 $A \cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成.

事件的并可推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$.

(6) 对立事件

定义　如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,则称事件 A 与事件 B 为**对立事件**或**互逆事件**,记为 $\overline{A} = B$ 或 $\overline{B} = A$.

如果 A 与 B 为对立事件,则 A,B 不能同时发生,且必有一个发生,即 A,B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$.

在样本空间中,集合 $\overline{A}$ 是由所有不属于事件 A 的样本点构成的集合.

(7) 完备事件组

定义　如果有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n$,且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个**完备事件组**或**完全事件组**.

可以推广完备事件组到可数无穷多个事件的情形:

$A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n,\cdots$,且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

(8) 事件的差

定义　事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A - B$.

在样本空间中集合 $A - B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的所有样本点构成的集合. 显然 $A - B = A\overline{B}$.

(9) 文氏图

直观上常用几何图形表示集合. 事件间的关系与运算也可以用几何图形直观表示. 这类图形称文氏图,如图 1-1.

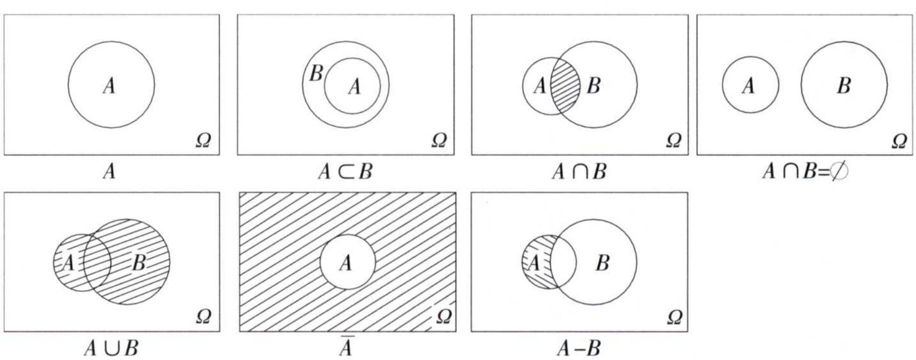


图 1-1

(10) 事件的运算规律

交换律　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

　　　　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$,

$\overline{A-B}=\overline{A\overline{B}}=\overline{A}\cup B.$

(三)概率、条件概率、事件独立性和五大公式

(1) 概率公理

设试验 E 的样本空间为 Ω,称实值函数 P 为概率,如果 P 满足如下三条件:

1) 对于任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

2) 对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

3) 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(2) 概率性质

1)$P(\varnothing)=0$;

2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

3)$P(\overline{A})=1-P(A)$;

4)$A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$;

5)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) 条件概率

定义　设 A,B 为两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

对固定的事件 A,条件概率也有概率相应的各性质.

(4) 事件独立性

定义　设 A,B 两个事件满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立.

对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对任意 $k(1<k\leqslant n)$,任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 满足等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件.

事实上,n 个事件相互独立需要 $\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n-n-1$ 个等式成立.

(5) 相互独立的性质

1)A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\overline{B}$ 或 $\overline{A}$ 与 B 或 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

将相互独立的 n 个事件中任何几个事件换成它们相应的对立事件,则新组成的 n 个事件也相互独立.

2) 当 $0<P(A)<1$ 时,A 与 B 独立等价于 $P(B\mid A)=P(B)$ 或 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$

成立.

3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 必两两独立.反过来,若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不一定相互独立.

4) 当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时,它们的部分事件也是相互独立的.

(6) 五大公式

1) **加法公式**　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

2) **减法公式**　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

3) **乘法公式**　当 $P(A)>0$ 时,$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$;

当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

4) **全概率公式**

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组,则对任意事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

5) **贝叶斯公式**

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组,则对任意事件 A,且 $P(A)>0$,有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},j=1,2,\cdots,n.$$

(四) 古典型和几何型概率、伯努利试验

(1) 古典型概率

定义　当试验结果为有限 n 个样本点,且每个样本点的发生具有相等的可能性,称这种有限等可能试验为古典概型.此时如果事件 A 由 n_A 个样本点组成,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}},$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的古典型概率.

(2) 几何型概率

定义　当试验的样本空间是某区域(该区域可以是一维、二维、三维等等),以 $L(\Omega)$ 表示样本空间 Ω 的几何度量(长度、面积、体积等等).$L(\Omega)$ 为有限,且试验结果出现在 Ω 中任何区域的可能性只与该区域几何度量成正比.称这种拓广至几何度量上有限等可能试验为几何概型.此时如果事件 A 的样本点表示的区域为 Ω_A,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}=\frac{\Omega_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}},$$

称这种 $P(A)$ 为事件 A 的几何型概率.

(3) n 重伯努利试验

定义　把一随机试验独立重复作若干次,即各次试验所联系的事件之间相互独立,且同

一事件在各个试验中出现的概率相同,称为**独立重复试验**.

如果每次试验只有两个结果 A 和 $\overline{A}$,则称这种试验为**伯努利试验**.将伯努利试验独立重复进行 n 次,称为 n **重伯努利试验**.

设在每次试验中,概率 $P(A)=p(0<p<1)$,则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率,又称为**二项概率公式**:$\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$.

本章小结

本章的知识结构可表示为

随机试验 → 样本点 ω / 样本空间 Ω → 随机事件 A,B,C → 事件的概率 $P(A)$ → 古典型概率 / 几何型概率 / 独立重复试验

随机事件:事件的关系、事件的运算、运算规律

事件的概率:概率定义、概率性质、五大公式、条件概率

本章的基本概念和知识点较多,但重点应关注以下四个方面:

(1) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A-B}=\overline{A}\cup B$;

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(3) 五大公式;

(4) 简单的古典型概率,独立重复试验.

数学家的小故事

线性方程组的研究是由莱布尼兹在1678年以前开创的。1693年,他用指标数的系统集合,表示含两个未知量x与y的三个线性方程所组成的系统的系数。他从三个线性方程的系统中消去两个未知量,得到一个行列式,这个行列式等于零就意味着存在一组x,y满足所有的这三个方程。

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 1.1】 设随机事件 A 和 B 满足条件 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则

(A) $AB=\varnothing, A\cup B=\Omega$.

(B) $AB=\varnothing, A\cup B\neq\Omega$.

(C) $AB\neq\varnothing, A\cup B=\Omega$.

(D) $AB\neq\varnothing, A\cup B\neq\Omega$.

分析 方法一：$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，所以 $AAB=A\overline{A}\,\overline{B}$，即 $AB=\varnothing$. 而 $\overline{A}\,\overline{B}=AB$，故 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，也就有 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\varnothing}$，即 $A\cup B=\Omega$.

答案应选(A).

方法二：$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，所以 $AB\cup A\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}\cup A\overline{B}$，即 $A(B\cup\overline{B})=(\overline{A}\cup A)\overline{B}$，得 $A=\overline{B}$，也就是说 A,B 为对立事件.

$AB=\varnothing, A\cup B=\Omega$.

答案应选(A).

【例 1.2】 A,B,C 为任意三个随机事件，则事件 $(A-B)\cup(B-C)$ 等于事件

(A) $A-C$.　　(B) $A\cup(B-C)$.

(C) $(A\cup B)-C$.　　(D) $(A\cup B)-BC$.

分析 因 $A-B=A\overline{B}$，故

$$(A-B)\cup(B-C)=A\overline{B}\cup B\overline{C}.$$

而

$$\begin{aligned}(A\cup B)-BC&=(A\cup B)\overline{BC}\\&=(A\cup B)(\overline{B}\cup\overline{C})\\&=A\overline{B}\cup A\overline{C}\cup B\overline{B}\cup B\overline{C}\\&=A\overline{B}\cup A\overline{C}\cup B\overline{C}\\&=A\overline{B}\cup(A\overline{B}\cup AB)\overline{C}\cup B\overline{C}\\&=(A\overline{B}\cup A\overline{B}\overline{C})\cup(AB\overline{C}\cup B\overline{C})\\&=A\overline{B}\cup B\overline{C}.\end{aligned}$$

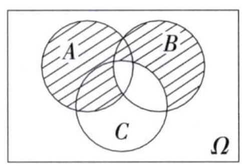


图 1-2

所以答案应选(D).

【评注】 本题是选择题，不要求写出详细推导过程，可以用文氏图直接判断(见图 1-2)：

不难看出 $(A-B)\cup(B-C)$ 就是图中阴影部分，且等于 $(A\cup B)-BC$，直接得到选(D).

【例 1.3】 (1991) 随机事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$，则必有

(A) $A\cup B=\Omega$.　　(B) $AB=\varnothing$.

学习笔记

(C) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.　　　　(D) $P(A-B)=0$.

分析 根据概率的加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

将题给条件代入得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB),$$

即

$$P(AB)=0.$$

对于选项(C),

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

答案应选(C).

【评注】 本题是1991年的考题,当年有部分考生错误地认为:
由 $P(A\cup B)=1$ 就可以推出 $A\cup B=\Omega$;
或者从 $P(AB)=0$ 就可以推出 $AB=\varnothing$.
事实上,仅给出概率是得不出事件的结论的,而本题题干中给出的全是概率,所以作为事件结论的选项(A),(B)根本不用被考虑.

【例 1.4】 (2012) 设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ________.

分析 根据条件概率的定义知 $P(AB\mid\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$.
由于 $AC=\varnothing$,所以 $A\subset\overline{C}$,也就有 $AB\subset\overline{C}$,$AB\overline{C}=AB$.所以

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

答案应填$\frac{3}{4}$.

【例 1.5】 (2020) 设 A,B,C 为三个随机事件,$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

(A) $\frac{3}{4}$.　　(B) $\frac{2}{3}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{5}{12}$.

分析 A,B,C 中至少有一个事件发生应为$(A\cup B\cup C)$.A,B,C 中至少有两个事件发生应为$(AB\cup BC\cup AC)$.所以 A,B,C 中只有一个事件发生应为$(A\cup B\cup C)-(AB\cup BC\cup AC)$,其概率应为

$P((A\cup B\cup C)-(AB\cup BC\cup AC))=P(A\cup B\cup C)-P(AB\cup BC\cup AC)$,因 $P(AB)=P(ABC)=0$.

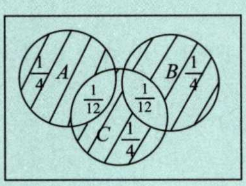
学习笔记

而 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{7}{12}$.

又 $P(AB\cup BC\cup AC)=P(AB)+P(BC)+P(AC)=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$.

总之 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为$\frac{5}{12}$,答案应选(D).

【评注】 如用文氏图直接判断:A,B,C 中恰有一个事件发生为图中阴影部分,其概率即面积应为



$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{12}$.

【例 1.6】 (2021) 设 A,B 为随机事件,且 $0<P(B)<1$,下列命题中为假命题的是

(A) 若 $P(A\mid B)=P(A)$,则 $P(A\mid\overline{B})=P(A)$.

(B) 若 $P(A\mid B)>P(A)$,则 $P(\overline{A}\mid\overline{B})>P(\overline{A})$.

(C) 若 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$,则 $P(A\mid B)>P(A)$.

(D) 若 $P(A\mid A\cup B)>P(\overline{A}\mid A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$.

分析 方法一:(A)$P(A\mid B)=P(A)$ 即 A,B 独立,则 $A,\overline{B}$ 也独立,所以 $P(A\mid\overline{B})=P(A)$ 成立.不是假命题.

(B)$P(A\mid B)>P(A)$ 成立,将 B 换成 $\overline{B}$,$0<P(\overline{B})<1$,A 换成 $\overline{A}$,这时也应该成立 $P(\overline{A}\mid\overline{B})>P(\overline{A})$.不是假命题.

(C)$P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$,即成立

$$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)},$$

$P(AB)-P(AB)P(B)>P(A)P(B)-P(AB)P(B)$,等价于

$$P(AB)>P(A)P(B),$$

也就有$\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A\mid B)>P(A)$,不是假命题.

(A)(B)(C) 都不能选,答案必为(D).

方法二:(D)$P(A\mid A\cup B)>P(\overline{A}\mid A\cup B)$,即$\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}>\frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}$,等价于 $P(A)>P(B)-P(AB)$,由于 $P(AB)$ 不一定为 0,故不能得出 $P(A)>P(B)$,选(D).

方法三:(D)$P(A\mid A\cup B)>P(\overline{A}\mid A\cup B)$,令 $A=B$,则

学习笔记

$P(A \mid A \cup B) = P(A \mid A) = 1$，而 $P(\overline{A} \mid A \cup B) = P(\overline{A} \mid A) = 0$.

(D) 所给 $P(A \mid A \cup B) = 1 > 0 = P(\overline{A} \mid A \cup B)$ 成立，但结论 $P(A) > P(B) = P(A)$ 不成立，选(D).

【例 1.7】 有两个盒子，第一盒中装有 2 个红球，1 个白球，第二盒中装一半红球，一半白球. 现从两盒中各任取一球放在一起，再从中取一球，问：

(Ⅰ) 这个球是红球的概率；

(Ⅱ) 若发现这个球是红球，问第一盒中取出的球是红球的概率.

解 (Ⅰ) 设事件 A_i 为从第 i 个盒中取出一个红球，$i = 1,2$，事件 B 为最后取红球，则

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, P(B \mid A_1A_2) = 1,$$

同理 $P(A_1\overline{A}_2) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}, P(B \mid A_1\overline{A}_2) = \dfrac{1}{2}$,

$$P(\overline{A}_1A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(B \mid \overline{A}_1A_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(B \mid \overline{A}_1\overline{A}_2) = 0.$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A_1A_2)P(A_1A_2) + P(B \mid A_1\overline{A}_2)P(A_1\overline{A}_2) + \\ &\quad P(B \mid \overline{A}_1A_2)P(\overline{A}_1A_2) + P(B \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Ⅱ})P(A_1 \mid B) &= P(A_1A_2 \cup A_1\overline{A}_2 \mid B) \\ &= P(A_1A_2 \mid B) + P(A_1\overline{A}_2 \mid B) \quad (\text{利用贝叶斯公式}) \\ &= \frac{P(B \mid A_1A_2)P(A_1A_2) + P(B \mid A_1\overline{A}_2)P(A_1\overline{A}_2)}{P(B)} \\ &= \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

【评注】 全概率公式和贝叶斯公式的应用首先要对问题中所涉及的事件作假设，如 A_i，B 等；其次要确定 Ω 的完备事件组，本题中为 A_1A_2，$A_1\overline{A}_2$，$\overline{A}_1A_2$，$\overline{A}_1\overline{A}_2$；余下就是根据题设条件，计算相应概率，代入公式求出结果.

本题中采用的完备事件组也可以为：

设事件 A_i 为从两盒中各取一球放在一起后含有 i 个红球，$i = 0$，1，2. 这时，全概率公式为：$P(B) = \sum\limits_{i=0}^{2} P(A_i)P(B \mid A_i)$. 由此计算 (Ⅰ) 的结果也是 $\dfrac{7}{12}$. 这里完备事件组只有三个 A_0，A_1，A_2，看似简单，但在求(Ⅱ) 时就不好计算了.

学习笔记

【例 1.8】 假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回）. 试求：

（Ⅰ）先取出的零件是一等品的概率 p；

（Ⅱ）在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

解 设事件 B_i 为第 i 次取出的零件是一等品（$i = 1,2$），事件 A 为被挑出的是第一箱. A 与 $\overline{A}$ 构成一个 Ω 的完备事件组，且 $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$.

（Ⅰ）应用全概率公式，知

$$p = P(B_1) = P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})$$
$$= \frac{10}{50} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18}{30} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

（Ⅱ）设事件 C 为先取的零件是一等品的条件下，再取出的零件仍是一等品，则

$$q = P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid \overline{A})P(\overline{A}).$$

$P(C \mid A)$ 是在挑出为第一箱前提下，从这箱挑出第一个零件为一等品的条件下，这时箱内还剩包含 9 件一等品的 49 件产品，因此再挑一零件仍为一等品的概率为 $\frac{9}{49}$.

同理 $P(C \mid \overline{A}) = \frac{17}{29}$，所以

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{29} = 0.3849.$$

【评注】 本题是 1987 年的考题，当年对（Ⅱ）有很多考生用了一种错误解法：

$$q = P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}$$
$$= \frac{P(B_2B_1 \mid A)P(A) + P(B_2B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$
$$= \frac{\frac{10 \cdot 9}{50 \cdot 49} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18 \cdot 17}{30 \cdot 29} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{10}{50} \cdot \frac{1}{2} + \frac{18}{30} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0.1942}{0.4} = 0.4855.$$

这种解法的错误在于应用公式 $q = P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}$ 时，其中的 B_1, B_2 必须是在同一箱（因先挑一箱，然后取出两个零件），而且分母中 B_1 与分子中的 B_1 是同一 B_1.

但是当应用公式

$$\frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_2B_1 \mid A)P(A) + P(B_2B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

学习笔记

时，分子式中把 B_1B_2 分成第一箱或者第二箱，且 B_1 与 B_2 在同一箱．同时分母的 B_1 也分成两箱，这就没法保证公式中的分子的 B_1 与分母中的 B_1 在同一箱了．

为了便于理解，我们可以将例 1.8 改为下面的例 1.8.1：

【例 1.8.1】假设有两箱同种零件：第一箱内装 n 件一等品；第二箱内装 m 件，其中仅有一件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件(取出的零件均不放回)，(m，n 均大于 2)，试求：

(Ⅰ)先取出的零件是一等品的概率 p；

(Ⅱ)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

解 设事件 B_i 为第 i 次取出的零件是一等品($i=1,2$)，事件 A 为被挑出的是第一箱，A 与 $\overline{A}$ 构成一个 Ω 的完备事件组，且 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)应用全概率公式，知

$$p=P(B_1)=P(B_1\mid A)P(A)+P(B_1\mid \overline{A})P(\overline{A})$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2}=\frac{m+1}{2m}.$$

(Ⅱ)设事件 C 为先取的零件是一等品的条件下，再取出的零件仍是一等品，则

$$q=P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid \overline{A})P(\overline{A})$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

如果用错误解法：

$$q=P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_2B_1)}{P(B_1)}$$
$$=\frac{P(B_2B_1\mid A)P(A)+P(B_2B_1\mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1\mid A)P(A)+P(B_1\mid \overline{A})P(\overline{A})}$$
$$=\frac{1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{m}{m+1}.$$

显然，C 事件与挑出箱有关，挑第一箱 C 必发生；挑第二箱 C 不发生，与 m，n 没关系，q 应该为 $\frac{1}{2}$.

也有考生使用公式：

$$q=P(B_2\mid B_1)=P(B_2\mid B_1A)P(A)+P(B_2\mid B_1\overline{A})P(\overline{A}).$$

显然根本不存在这种公式．

学习笔记

【例 1.9】 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球，乙袋中一半白球一半黑球．现从甲袋中任取 2 球与从乙袋中任取一球混合后，再从中任取一球为白球的概率为

(A) $\frac{11}{30}$.　　(B) $\frac{6}{15}$.　　(C) $\frac{13}{30}$.　　(D) $\frac{7}{15}$.

分析 设事件 A 为最后取出的球为白球，事件 B 为球来自甲袋．显然，$\overline{B}$ 为球来自乙袋，且 $B,\overline{B}$ 构成一个 Ω 的完备事件组．

由全概率公式，有

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B}).$$

$P(B)=\frac{2}{3}$，因为最后 3 个球中 2 个球是从甲袋中来．所以取出的球来自甲袋的概率为$\frac{2}{3}$，当然 $P(\overline{B})=\frac{1}{3}$.

$P(A\mid B)=\frac{2}{5}$，这是因为已知取出的球来自甲袋的条件下，取出的球为白球的概率，就相当于从甲中取出一白球的概率，甲中 5 个球 2 个为白，故 $P(A\mid B)=\frac{2}{5}$．同理 $P(A\mid\overline{B})=\frac{1}{2}$，因为乙中半白半黑．

因此
$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{30}.\end{aligned}$$

答案应选(C).

【评注】 ① 本题所用的完备事件组也可设成：事件 B_i 为最后三个混合球中有 i 个白球，$i=0,1,2,3$.

再用全概率公式 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)$.

结果当然是一样的$\frac{13}{30}$．只是计算量稍大一些．

② 全概率公式的应用是近几年常考的一个考点．例 1.7、例 1.8 和例 1.9 中我们给出了三种不同的方式的 Ω 的完备事件组，适当地选择完备事件组会节省不少计算量．

【例 1.10】 袋中装有 α 个白球和 β 个黑球，分有放回和无放回两种情况，连续随机每次抽取一个，求下列事件的概率：

(Ⅰ) 从袋中取出的第 k 个球是白球($k\leqslant\alpha+\beta$)；

(Ⅱ) 从袋中取出 $a+b$ 个球中，恰含 a 个白球和 b 个黑球($a\leqslant\alpha$，$b\leqslant\beta$).

解 有放回情况：

每次摸出球后仍放回袋中，所以每次摸球时袋中均有$(\alpha+\beta)$个球.

学习笔记

（Ⅰ）设事件 $A=$ 第 k 个球是白球. 显然第 k 次摸时袋中有 $(\alpha+\beta)$ 个球，每个球等可能被摸到，总的样本点数为 $(\alpha+\beta)$. 事件 A 是取到白球，A 所含样本点数为 α，所以

$$P(A)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

（Ⅱ）设事件 $B=$ 取 a 个白球和 b 个黑球. 每次摸球均是从袋中 $\alpha+\beta$ 个球中任取一球，共取了 $(a+b)$ 次，总共有 $(\alpha+\beta)^{a+b}$ 种取法，所以总的样本点数为 $(\alpha+\beta)^{a+b}$. 事件 B 是从 $(a+b)$ 次中选出 a 次取白球，而余下的 b 次取黑球，有 C_{a+b}^{a} 种可能. 每次取白球有 α 种可能，取黑球有 β 种可能，取白球 a 次，取黑球 b 次为 $\alpha^{a}\beta^{b}$. 因此，B 中所含样本点数为 $C_{a+b}^{a}\alpha^{a}\beta^{b}$. 所以，

$$P(B)=\frac{C_{a+b}^{a}\alpha^{a}\beta^{b}}{(\alpha+\beta)^{a+b}}.$$

无放回情况：

（Ⅰ）从 $(\alpha+\beta)$ 个球中连续不放回地取 k 个球，可以看成从 $(\alpha+\beta)$ 个球中取出 k 个来进行一次有序排列，总共有 $P_{\alpha+\beta}^{k}$ 种. 事件 A 是第 k 个球是白球，可以从 α 个白球中先选一个放在第 k 个位置，有 α 种取法，而其余的 $(k-1)$ 个球在余下的 $(\alpha+\beta-1)$ 个位置上，任取 $(k-1)$ 个，考虑排列，有 $P_{\alpha+\beta-1}^{k-1}$. 所以 A 中包含的样本点数共有 $\alpha\cdot P_{\alpha+\beta-1}^{k-1}$ 个. 故

$$P(A)=\frac{\alpha P_{\alpha+\beta-1}^{k-1}}{P_{\alpha+\beta}^{k}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

（Ⅱ）$(\alpha+\beta)$ 个球中取 $(a+b)$ 个球总共有 $C_{\alpha+\beta}^{a+b}$ 种取法. 如果这 $(a+b)$ 个球中恰有 a 个白、b 个黑，则有 $C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}$ 种取法. 故

$$P(B)=\frac{C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

【评注】 ① 在公式 $P(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 的计算中，n,n_A 均是样本点数，它们都是在同一样本空间 Ω 中. 在本题无放回情况时，在问题（Ⅰ）中考虑了有先后顺序的样本空间，即样本点的构成是有顺序的排列，n,n_A 的计算均有顺序. 在问题（Ⅱ）中考虑的是没有顺序的样本空间，因而 n,n_A 的计算均用组合. 当然（Ⅱ）中也可以用考虑顺序的样本空间来计算 n 和 n_A. 一般说，如果一个概率同时可用有顺序和无顺序样本空间来计算时，常常用无顺序要简单些.

② 在不放回的抽取中，连续取 n 次、每次取一个等于一次取出 n 个，反过来也对. 这两种理解对今后一些概率的计算会有帮助.

【例 1.11】 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

学习笔记

分析　本题是几何型概率. 不妨假定随机地取出两个数分别为 X 和 Y. 显然 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量. 如果把 (X,Y) 看成平面上的一个点的坐标，则由于 $0<X<1,0<Y<1$，所以 (X,Y) 为平面上正方形 $0<X<1,0<Y<1$ 中的一个点. 而 X 与 Y 两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的点 (X,Y) 对应于正方形中 $|X-Y|<\frac{1}{2}$ 的区域，即是图 1-3 中阴影标出的区域 D.

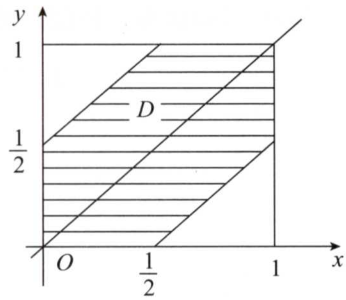


图 1-3

根据几何型概率，

$$P\{|X-Y|<\frac{1}{2}\}=\frac{D\text{ 的面积}}{\text{单位正方形的面积}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}=\frac{3}{4}.$$

答案应填 $\frac{3}{4}$.

【评注】　几何型概率题的求解关键在于如何将满足条件的可能结果与某区域中的一个点对应起来，这区域可以是一维的，也可能是二维的，甚至可能是三维的，然后求出题目要求的区域和可能结果所对应区域长度或面积或体积之比.

本题是 2007 年的考题，当年的考生得分率为 0.414.

【例 1.12】　四封信等可能投入三个邮筒，在已知前两封信放入不同邮筒的条件下，求恰有三封信放入同一邮筒的概率为________.

分析　本题是求条件概率. 设事件 A 为前两封信放入不同邮筒，事件 B 为恰有三封信放入同一邮筒，所求的条件概率应为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

四封信任意投入三个邮筒，总的投法应有 3^4 种.

事件 A 发生的情况：第一封信可以随便投有 3 种，第二封信不能投入第一封已投的邮筒，只有 2 种，第三、四两封信可以随意投共有 3×3 种. 所以

$$P(A)=\frac{3\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3^4}.$$

事件 AB 发生的情况：第一、二两封信投入有 $3\cdot 2$ 种，第三封信只能投入已投有信的两邮筒之一，共 2 种，第四封信只能随第三封信投入

学习笔记

的邮筒，以确保有三封信在同一邮筒. 所以

$$P(AB)=\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{3^4}.$$

因此

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1/3^4}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 3/3^4}=\frac{2}{9}.$$

答案应填$\frac{2}{9}$.

【评注】 本题可用更方便的缩减样本空间解法. 这种解法常应用于全概率公式中的条件概率计算.

$P(B|A)$是在A发生的条件下，求B发生的概率. A发生了也就是说明两封信已投入不同的邮筒中了. 再将后两封信投入且要求恰有三封信在同一邮筒中. 第三封信投入有3种可能. 第四封信投入也有3种. 因此，在A发生的条件下. 总共有3×3种可能. 现在B要发生只可能将第三、第四两封信合在一起投入有信的两个邮筒，共有2种. 故$P(B\mid A)=\frac{2}{9}$.

【例1.13】 10件产品中含有4件次品，今从中任取两件，已知其中有一件是次品，则另一件也是次品的概率为________.

分析 设事件A为取出两件产品中至少有一次品，事件B为取出两件产品均为次品.

现取出两件中已知有一次品，也就是至少有一次品，即事件A发生的条件下，求另一件也是次品这事件，也就是两件均是次品即事件B发生的条件概率，即

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}.$$

由于$P(A)=1-P(\overline{A})$，$\overline{A}$是两件中没有次品，故

$$P(\overline{A})=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3},$$

从而$P(A)=\frac{2}{3}$.

当然也可以直接计算$P(A)$. 至少有一次品有两种情况：一次一正和二件均次. 所以，

$$P(A)=\frac{C_4^1C_6^1+C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}.$$

又$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$，故

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{5}.$$

学习笔记

答案应填$\frac{1}{5}$.

【评注】 本题是1993年的一个考题，当年的考生得分率为0.06.下面列出几种当年的典型错误：

① 把本题看成是已知第一次取到次品的条件下，再取一个次品的概率.这时 $P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\mathrm{C}_4^2/\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_4^1/\mathrm{C}_{10}^1}=\frac{1}{3}$.

或者用缩减样本空间法得$P(B \mid A)=\frac{1}{3}$.取两件中有一件为次品不等于第一次取得的为次品.

② 事件设得很正确：A为两件中至少有一次品.但在求$P(A)$时，计算成$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_9^1}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{4}{5}$，先从次品中取一次品$\mathrm{C}_4^1$，再从余下的9件中任意取1件，以保证至少有一次品.这样会重复计算，得到的$P(A)=\frac{4}{5}>\frac{2}{3}$.

本题当然也可以用缩减样本空间方法来计算$P(B \mid A)$.

A发生了，至少有一个次品，总共有$\mathrm{C}_{10}^2-\mathrm{C}_6^2$种可能.再发生$B$，两个是次品，共有$\mathrm{C}_4^2$种可能.所以

$$P(B \mid A)=\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{10}^2-\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{5}.$$

【例1.14】 10台洗衣机中有3台二等品，现已售出一台，在余下的9台中任取2台发现均为一等品，则原先售出一台为二等品的概率为

(A) $\frac{3}{10}$.　　(B) $\frac{1}{4}$.　　(C) $\frac{1}{5}$.　　(D) $\frac{3}{8}$.

分析 设事件A为售出的一台为二等品，事件B为取两台均为一等品，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(A \mid B)&=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}\\&=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B \mid A)P(A)+P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}.\end{aligned}$$

由于

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(\overline{A})=\frac{7}{10},$$

$$P(B \mid A)=\frac{\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_9^2}=\frac{7}{12},\quad P(B \mid \overline{A})=\frac{\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_9^2}=\frac{5}{12},$$

故

学习笔记

$$P(A \mid B)=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{12}}{\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{10}}=\frac{3}{8}.$$

答案应选(D).

【例 1.15】 在伯努利试验中,每次试验成功的概率为 p,则在第 n 次成功之前恰失败了 m 次的概率为________.

分析 为了分析试验的结构,可以作图形分析:“第 n 次成功之前失败了 m 次”这事件意味着第 n 次成功前有 $(n-1)$ 次成功和 m 次失败.总共做了 $(n+m)$ 次试验,最后一次是成功,前 $n+m-1$ 次试验中有 m 次失败和 $(n-1)$ 次成功,故事件的概率应为

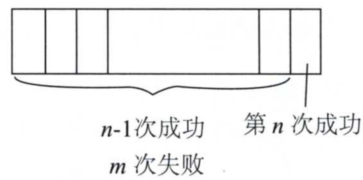


图 1-4

$$C_{n+m-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^m\cdot p=C_{n+m-1}^{n-1}p^n(1-p)^m.$$

答案应填 $C_{n+m-1}^{n-1}p^n(1-p)^m$.

【例 1.16】 两盒火柴各 N 根,每次任取一盒用一根,则当一盒用完时,另一盒还有 $R(R\leqslant N)$ 根的概率为__________.

分析 图 1-5 表示甲、乙两盒火柴,各有 N 根.“每次任取一盒用一根”可理解做一次伯努利试验.不妨假定取甲时为试验成功,A 发生;取乙时为试验失败,$\overline{A}$ 发生.

甲	乙
$\boxed{N}$	$\boxed{N}$
用了 N 根	$N-R$ 根
A	$\overline{A}$

图 1-5

用火柴可以看成是独立重复试验,每次试验成功概率为 $\frac{1}{2}$,失败概率也是 $\frac{1}{2}$.“当一盒用完时,另一盒还有 R 根”,当一盒用完时,不妨假定甲盒火柴用完时,就是甲盒取第 N 根火柴时,另一盒,就是乙盒内还有 R 根,用伯努利试验的概念理解为在第 N 次成功前恰失败了 $N-R$ 次.根据例 1.15 的结果其概率必为

$$C_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-R}\cdot\frac{1}{2}=C_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R}.$$

实际上"当一盒用完"有可能在甲盒发生，也可能在乙盒发生，所以概率应为

$$2\cdot C_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R}=C_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R-1}.$$

答案应填 $C_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R-1}$.

学习笔记

【例 1.17】(2005) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$ ______.

分析 先取 X，再从 $1\sim X$ 中取 Y，用全概率公式，

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}=&P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+\\&P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}+\\&P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+\\&P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\}\\=&\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{48}.\end{aligned}$$

答案应填 $\frac{13}{48}$.

数学家的小故事

欧拉在1741年至1766年之间给普鲁士王的侄女Anhalt-Dessau公主授课，这些授课内容后来以《给一位德国公主的信》发表. 笛卡尔曾经在荷兰海牙附近的小镇隐居，在这里他教导了被放逐的伊丽莎白公主。1649年瑞典克里斯蒂娜女王邀请他去作自己的讲师，因为无法承受瑞典严寒以及肺炎的侵袭，最终在一年后死亡。

第二章　随机变量及其分布

一、考试内容

随机变量　随机变量分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

二、考试要求

1. 理解 随机变量，分布函数及其性质，离散型随机变量及其概率分布，连续型随机变量及其概率密度.

2. 了解 泊松定理的结论和应用条件.（数学一要求）

3. 掌握 0—1 分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布及它们的应用、均匀分布、指数分布、正态分布及它们的应用.

泊松定理的结论和应用条件.（数学三要求）

4. 会 计算与随机变量相联系的事件的概率，用泊松分布近似表示二项分布，求随机变量函数的分布.

三、基本概念、基本理论和基本方法

（一）随机变量及其分布函数

（1）随机变量

定义　在样本空间 Ω 上的实值函数 $X = X(\omega), \omega \in \Omega$ 称为随机变量，简记为 X.

常用 X,Y,Z 等表示随机变量. 随机变量的定义域是 Ω.

（2）分布函数

定义　对于任意实数 x，记函数 $F(x) = P\{X \leqslant x\}, -\infty < x < +\infty$，称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数.

分布函数 $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个实值函数，$F(x)$ 的值等于随机变量 X 在区间 $(-\infty, x]$ 上取值的概率，即事件“$X \leqslant x$”的概率.

（3）分布函数性质

1）$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$；$F(x)$ 是单调不减函数，即当 $x_1 < x_2$ 时，$F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

2）$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$，记为 $F(-\infty) = 0$；$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$，记为 $F(+\infty) = 1$.

3) $F(x)$ 是右连续的，即 $F(x+0)=F(x)$.

4) 对任意 $x_1<x_2$，有 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

5) 对任意的 x，$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$.

由 $F(x)$ 单调性和 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$ 可以推出 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，所以性质 1)，2)，3) 可以简化成：

1) $F(x)$ 单调非减；

2) $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；

3) $F(x)$ 是右连续的.

这恰是函数 $F(x)$ 成为某一随机变量的分布函数的充分必要条件.

当 $F(x)$ 在 x 处连续时，$F(x)-F(x-0)=0$，根据性质 5)，就有 $P\{X=x\}=0$.

有了分布函数，关于随机变量 X 的许多概率都能方便计算，例如

$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$，　　$P\{X<x\}=F(x-0)$，

$P\{X>x\}=1-F(x)$，　　$P\{X\geqslant x\}=1-F(x-0)$；

对任意 $x_1<x_2$，$P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2-0)-F(x_1)$，

$P\{x_1\leqslant X<x_2\}=F(x_2-0)-F(x_1-0)$，$P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1-0)$.

（二）离散型随机变量

(1) 离散型随机变量

定义　如果一个随机变量的可能取值是有限多个或可数无穷多个，则称它为离散型随机变量.

(2) 离散型随机变量 X 的概率分布

定义　设离散型随机变量 X 的可能取值是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，$X$ 取各可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots.$$

称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.

分布律也有用列表方式给出的：

$$\begin{array}{c|cccccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline P & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{array},$$

或者

$$X\sim\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{bmatrix}.$$

这里只给出 X 可能取值可数无穷多个的情形. 不难给出 X 可能取值有限个的情形.

(3) 分布律性质

1) $p_k\geqslant 0$，$k=1,2,\cdots$；

2) $\sum\limits_k p_k=1$.

性质 1) 和 2) 也是分布律的充要条件.

(4) 离散型随机变量 X 的分布函数

设 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots$，则 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_k\leqslant x}p_k\text{,或者 }F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ p_1, & x_1\leqslant x<x_2,\\ p_1+p_2, & x_2\leqslant x<x_3,\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

（三）连续型随机变量

(1) 连续型随机变量及其概率密度

定义 如果对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在一个非负可积函数 $f(x)$，使得对任意实数 x，都有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\ -\infty<x<+\infty,$$

称 X 为连续型随机变量，函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度.

由于连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 必可表示成 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，即积分变上限函数，所以 $F(x)$ 一定是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，但 $f(x)$ 不一定是连续函数. 反过来，不能说凡是连续的 $F(x)$ 对应的 X 一定是连续型随机变量.

(2) 概率密度 $f(x)$ 的性质

1) $f(x)\geqslant 0$；

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$；

3) 对任意实数 $x_1<x_2$，有 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t$；

4) 在 $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x)=f(x)$.

函数 $f(x)$ 成为某一连续型随机变量的概率密度充要条件是 $f(x)$ 具有性质 1) 和 2).

对连续型随机变量 X，由于 $F(x)$ 是连续函数，性质 3) 可以改写成对任意实数 $x_1<x_2$，有

$$\begin{aligned}P\{x_1<X\leqslant x_2\}&=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=P\{x_1\leqslant X<x_2\}\\&=P\{x_1<X<x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

（四）常用分布

(1)0－1 分布

定义 如果随机变量 X 有分布律

X	0	1
P	$1-p$	p

$0<p<1$，则称 X 服从参数为 p 的 0－1 分布，或称 X 具有 0－1 分布.

(2) 二项分布

定义 如果随机变量 X 有分布律

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $0<p<1$，$q=1-p$，则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$.

在 n 重伯努利试验中，若每次试验成功率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立重复试验中成功

的总次数 X 服从二项分布.

当 $n=1$ 时,不难验证二项分布就退化成 $0-1$ 分布.所以 $0-1$ 分布也可以记为 $B(1,p)$.

(3) 几何分布

定义　如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=pq^{k-1},\ k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1,q=1-p$,则称 X 服从参数为 p 的几何分布,或称 X 具有几何分布.

在独立地重复做一系列伯努利试验中,若每次试验成功率为 $p(0<p<1)$,则在第 k 次试验时才首次试验成功的概率服从几何分布.

(4) 超几何分布

定义　如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=l_1,\cdots,l_2.$$

其中 $l_1=\max(0,n-N+M),l_2=\min(M,n)$,则称随机变量 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布.

如果 N 件产品中含有 M 件次品,从中任意一次取出 n 件(或从中一件接一件不放回地取 n 件),令 $X=$ 抽取的 n 件产品中的次品件数,则 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布.

如果 N 件产品中含有 M 件次品,从中一件接一件有放回地取 n 次(即每次取出记录后就放回,再取下一个),则 X 服从 $B\left(n,\dfrac{M}{N}\right)$.

(5) 泊松分布

定义　如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,记为 $X\sim P(\lambda)$.

在一段时间内电话总机接到的呼叫次数、候车的旅客数、保险索赔的次数等都服从泊松分布.

(6) 均匀分布

定义　如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布,记作 $X\sim U[a,b]$.

如果概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布,记作 $X\sim U(a,b)$.

无论 $X\sim U[a,b]$ 或 $X\sim U(a,b)$,它们的分布函数均为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x.\end{cases}$$

(7) 指数分布

定义 如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0,$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布,记作 $X\sim E(\lambda)$.

有的书上将指数分布定义成具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0,$$

考试大纲要求是

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

设 $X\sim E(\lambda)$,则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

指数分布有很多应用,有许多种寿命的分布都可看成服从指数分布.

(8) 正态分布

定义 如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ,σ 为常数且 $\sigma>0$,则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布,记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

当 $\mu=0,\sigma^2=1$ 时,即 $X\sim N(0,1)$,称 X 服从标准正态分布,此时用 $\varphi(x)$ 表示 X 的概率密度,即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty.$$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.$$

当 $X\sim N(0,1)$ 时,分布函数用 $\Phi(x)$ 表示

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

（五）常用性质

(1) 设 $X \sim U[a,b]$，则对 $a \leqslant c < d \leqslant b$，有

$$P\{c \leqslant X \leqslant d\} = \frac{d-c}{b-a},$$

即随机变量落入$[a,b]$中某区间$[c,d]$的概率等于该区间长度与$[a,b]$长度之比.

此结论对开区间或半开半闭区间也成立.

(2) 设 $X \sim E(\lambda)$，则有

1) $P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

2) $$P\{X > t+s \mid X > s\} = \frac{P\{X > t+s, X > s\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > t+s\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$
$$= e^{-\lambda t} = P\{X > t\},\ t,s > 0.$$

此性质称为指数分布具有“无记忆性”.

(3) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则

1) $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

2) 当 $x_1 < x_2$ 时，$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$.

3) 概率密度 $f(x)$ 关于 $x = \mu$ 对称，$\varphi(x)$ 是偶函数.

4) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$，$\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

5) 当 $X \sim N(0,1)$ 时，$P\{|X| \leqslant a\} = 2\Phi(a) - 1$，$a > 0$.

（六）泊松定理

在伯努利试验中，p_n 代表事件 A 在试验中出现的概率，它与试验总数 n 有关，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$，则

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

在应用泊松定理时，当 n 较大($n \geqslant 100$)，p 较小($p \leqslant 0.1$)，np 不太大. 这时有近似公式

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

上式可以用来作二项分布概率的近似计算.

（七）随机变量函数的分布

(1) 离散型随机变量的函数分布

设 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots,$$

则 X 的函数 $Y = g(X)$ 的分布律为

$$P\{Y = g(x_k)\} = p_k, k = 1,2,\cdots.$$

如果在 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们相应的概率和作为 Y 取该值的概率.

(2) 连续型随机变量的函数分布

1) 公式法

设 X 是一个具有概率密度 $f_X(x)$ 的随机变量，又设 $y=g(x)$ 是单调、导数不为零的可导函数，$h(y)$ 为它的反函数，则 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X(h(y)), & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 (α,β) 是函数 $g(X)$ 在 X 可能取值的区间上的值域.

2) 定义法

先求 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x,$$

然后 $f_Y(y)=F'_Y(y)$.

一般说，用公式法时，应要求条件较多：单调、可导、导数不为零、反函数存在等，实际求解比较麻烦. 用定义法时，实际上就是求积分 $\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x$，只要掌握好 y 变化的范围，不同范围和不同积分限的求积就不难求得 $F_Y(y)$.

本章小结

本章的知识结构可表示为

样本空间 Ω → 随机变量 $X(\omega)$ → 离散型随机变量 / 连续型随机变量 → 常见分布

随机变量 $X(\omega)$ ↓ 分布函数 → 随机变量函数的分布

本章的基本概念和知识点很多. 重点关注以下三方面：

(1) 分布函数、分布律和概率密度的充要条件和性质；

(2) 常见分布：二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布；

(3) 随机变量函数的分布.

他以几乎神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图像，彗星的轨道和大海的潮汐。

——牛顿墓志铭

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 2.1】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a+\dfrac{b}{(1+x)^2}, & x>0,\\ c, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

求常数 a,b,c 的值.

解 $F(x)$ 是分布函数,故 $F(x)$ 必满足分布函数的三个充要条件:

$F(x)$ 单调不减;$F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$;$F(x)$ 是右连续的.

由 $0=F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=c$,得 $c=0$.

由 $1=F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[a+\dfrac{b}{(1+x)^2}\right]=a$,得 $a=1$.

又因为 $F(x)$ 是右连续的,$F(0^+)=F(0)$,即 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=a+b=c=0$,得 $b=-1$.

【例 2.2】 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=c\frac{\lambda^k}{k!},\ k=1,2,\cdots,\ \lambda>0,$$

则常数 c 的值为________.

分析 由于 k 不能取 0,故分布律不是泊松分布.根据分布律的充要条件,

$$\begin{aligned}1&=\sum_{k=1}^{\infty}c\frac{\lambda^k}{k!}=c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=ce^{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\\&=ce^{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}\right)=ce^{\lambda}(1-e^{-\lambda})\\&=c(e^{\lambda}-1),\end{aligned}$$

所以 $c=\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$.

答案应填 $\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$.

【例 2.3】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,引入函数 $F_1(x)=F(ax)$,$F_2(x)=F^2(x)$,$F_3(x)=1-F(-x)$ 和 $F_4(x)=F(x+a)$,其中 a 为常数,则可以确定也是分布函数的为

(A) $F_1(x)$,$F_2(x)$.　　(B) $F_2(x)$,$F_3(x)$.

学习笔记

(C) $F_3(x), F_4(x)$.　　　　(D) $F_2(x), F_4(x)$.

分析 **方法一**：$F_1(x)$ 不一定是分布函数，因当 $a=-1$ 时，$F_1(x)=F(-x)$，$F_1(-\infty)=0$ 就不成立. 因 $F_1(-\infty)=F(+\infty)=1$.

$F_3(x)$ 也不一定是分布函数. 因为 $F(x)$ 是右连续的，故 $F(-x)$ 是左连续的，从而 $F_3(x)=1-F(-x)$ 也是左连续的.

$F_1(x), F_3(x)$ 都不一定是分布函数.

答案应选(D).

方法二：$F_2(x)$ 是分布函数. 因满足分布的充要条件：

$F_2(x)=F^2(x)$ 单调不减；

$F_2(-\infty)=F^2(-\infty)=0, F_2(+\infty)=F^2(+\infty)=1$；

$F_2(x)=F^2(x)$ 是右连续的.

$F_4(x)$ 也是分布函数. 因为 $F_4(x)=F(x+a)$ 是由 $F(x)$ 向左(或右)平移而成，从而分布函数的三个充要条件不受平移影响.

答案应选(D).

【例 2.4】 如果 $f(x)$ 是某随机变量 X 的概率密度，则可以判断也是概率密度的是

(A) $f(2x)$.　　　　(B) $f^2(x)$.

(C) $2xf(x^2)$.　　　　(D) $3x^2 f(x^3)$.

分析 函数 $f(x)$ 成为概率密度的充要条件为

$$①f(x)\geqslant 0;\quad ②\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1.$$

方法一：$3x^2 f(x^3)\geqslant 0$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 f(x^3)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^3)\mathrm{d}x^3=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1.$$

答案应选(D).

方法二：(A) $f(2x)$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\neq 1$，故(A)不能选；

(B) $f^2(x)$，设 $X\sim U(0,2)$，则 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 0<x<2,\\ 0, 其他,\end{cases}$ 从而

$$f^2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, 0<x<2,\\ 0, 其他.\end{cases}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\neq 1$，故(B)也不能选；

(C)$2xf(x)$，当 $x<0$ 时，$2xf(x)\leqslant 0$，不能选.

答案只能选(D).

【例 2.5】 设随机变量 X 的密度 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，成立

(A)$F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(B)$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(C)$F(-a)=F(a)$.

(D)$F(-a)=2F(a)-1$.

分析 本题涉及用密度表示分布，密度又是偶函数，所以可以用积分变换求，也可以用密度函数图形的对称性来求. 应该说选择题用图形更方便.

方法一：
$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{-a}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}+\int_0^a f(-t)\mathrm{d}(-t)$$
$$=\frac{1}{2}-\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

答案应选(B).

方法二：从图 2-1 得

$$S_1=\int_{-\infty}^{-a}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$S_2=\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$S_1=S_2,$$

$$S_1=S_2=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

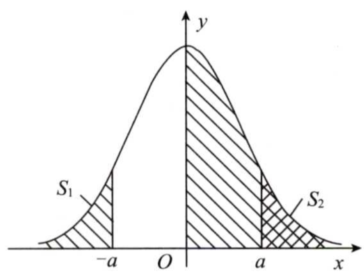


图 2-1

答案应选(B).

【评注】 有时选择题可找一个特殊点代入，从而排除一些选项，也可得到答案.

令 $a=0$，(A)$F(-0)=F(0)=1-\int_0^0 f(x)\mathrm{d}x=1$，这显然不可能，不选(A).

令 $a\to+\infty$，(C)$F(-\infty)=F(+\infty)$，也不可能.

(D)$F(-\infty)=2F(+\infty)-1$ 也不可能. 最后只剩下(B)了.

学习笔记

学习笔记

【例 2.6】 已知随机变量 X 与 $-X$ 具有相同概率密度，记 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $F(x)+F(-x)=$ ________.

分析 X 与 $-X$ 具有相同密度，则它们一定具有相同分布，因为密度可决定分布.

X 的分布函数为 $F(x)$，即 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，故 $-X$ 的分布函数也是 $F(x)$，即 $F(x)=P\{-X\leqslant x\}$. 又

$$\begin{aligned}P\{-X\leqslant x\}&=P\{X\geqslant -x\}=1-P\{X<-x\}\\&=1-P\{X\leqslant -x\}=1-F(-x),\end{aligned}$$

所以 $F(x)=1-F(-x)$，即 $F(x)+F(-x)=1$.

答案应填 1.

【例 2.7】 (2004) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

分析 本题 $X\sim N(0,1)$，正态分布的密度函数图形具有对称性，利用这一特性，求解比较方便.

图 2-2 表示 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，阴影部分面积为 α.

图 2-3 表示 $P\{|X|<x\}=\alpha$，阴影部分面积为 α，两端各余面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$.

按图 2-2 u_α 的定义，$x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.

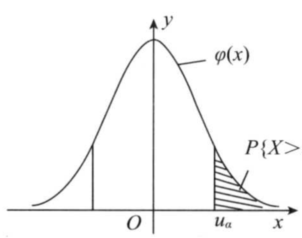


图 2-2

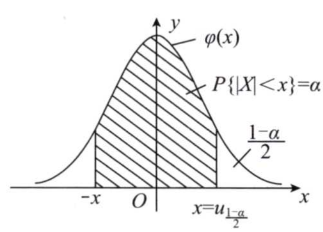


图 2-3

答案应选(C).

【评注】 本题是 2004 年的考题，当年考生得分率数学一为 0.507，数学三仅为 0.264. 不少考生用积分表示和代换做，比较烦琐.

【例 2.8】 (2010) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

学习笔记

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x),x\leqslant 0,\\ bf_2(x),x>0,\end{cases}\qquad (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

(A)$2a+3b=4$.　　(B)$3a+2b=4$.

(C)$a+b=1$.　　(D)$a+b=2$.

分析 $f(x)$ 为概率密度，必满足密度函数的充要条件，故

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_{0}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x.$$

$f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，其对称中心在 $x=0$ 处，故 $\int_{-\infty}^{0}f_1(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

$f_2(x)$ 为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，即

$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故$\int_{0}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$.

所以 $1=a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{3}{4}$，即 $2a+3b=4$.

答案应选(A).

【例 2.9】 在区间$[a,b]$上任意投掷一个点，以 X 表示这个点的坐标. 设这个点落在$[a,b]$中任意小区间的概率与这个小区间的长度成正比，求 X 的概率密度.

分析 密度 $f(x)=F'(x)$，而

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},-\infty<x<+\infty.$$

事件$\{X\leqslant x\}$就是随机变量 X 落入区间$(-\infty,x]$，现 X 点投在$[a,b]$上，则 X 落入$(-\infty,a)$和$(b,+\infty)$的概率均为 0. 我们把 x 取值范围分成 $x<a$，$a\leqslant x\leqslant b$ 和 $x>b$ 来讨论 $F(x)$.

当 $x<a$ 时，$\{X\leqslant x\}$ 是不可能事件，故

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0.$$

当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，依题意

$$P\{a\leqslant X\leqslant x\}=k(x-a),$$

其中 k 为比例常数，而$\{a\leqslant X\leqslant b\}$是必然事件，故 $P\{a\leqslant X\leqslant b\}=k(b-a)=1$，所以 $k=\frac{1}{b-a}$，从而 $P\{a\leqslant X\leqslant x\}=\frac{x-a}{b-a}$. 于是

学习笔记

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X<a\}+P\{a\leqslant X\leqslant x\}$$
$$=0+\frac{x-a}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$$

当 $x>b$ 时,$\{X\leqslant x\}$ 是必然事件,故 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$.

因此 $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b,\end{cases}$ 从而 X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

也就是说,X 服从$[a,b]$上的均匀分布.

【评注】 本题也可考虑 X 落入小区间$(x,x+\Delta x]$的概率

$$P\{x<X\leqslant x+\Delta x\}=F(x+\Delta x)-F(x).$$

当 $a\leqslant x<x+\Delta x\leqslant b$ 时,

$$F(x+\Delta x)-F(x)=P\{x<X\leqslant x+\Delta x\}=k\Delta x,$$

即$\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=k$,令 $\Delta x\to 0$ 就有

$$F'(x)=f(x)=k,a\leqslant x\leqslant b.$$

进一步有

$$f(x)=\begin{cases}k, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

然后再用性质$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,求出 $k=\dfrac{1}{b-a}$.

【例 2.10】 设随机变量 $X\sim U[2,5]$,现对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

分析 对 X 进行三次独立观测,可理解为对 X 进行三次独立重复试验. 如果再把"观测值大于 3"这件事理解为实验成功,本题所求的概率为三次独立重复试验中至少有两次成功的概率,先求出一次试验成功的概率,然后再用二项概率公式求解.

设事件 A 为"X 的观测值大于 3",则

$$P(A)=P\{X>3\}=\frac{2}{3}.$$

令 Y 是三次独立观测中观测值大于 3 的次数,则 $Y\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$,故所求概率为

学习笔记

$$P\{Y \geqslant 2\} = P\{Y=2\} + P\{Y=3\}$$
$$= C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}.$$

【例 2.11】　设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-x^2+x}(-\infty < x < +\infty)$，则常数 $A =$ ________.

分析　方法一：常数 A 可用密度的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 求出.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-x^2+x}dx = Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx$$
$$= Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = Ae^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\pi},$$

从而 $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$.

答案应填 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$.

【评注】　这里计算涉及公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$，记住这个积分对以后的计算会很方便.

不过如果把 $f(x) = Ae^{-x^2+x}$ 看成正态分布的概率密度，从而直接定出 A 会更方便.

方法二：　$f(x) = Ae^{-x^2+x} = Ae^{-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}} = Ae^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}$.

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，不难看出

$f(x) = Ae^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}$ 是正态分布 $N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的密度，且

$$Ae^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

即 $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$.

【例 2.12】　设 $X \sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$，则 $P\{X < 0\} =$ ________.

分析　$X \sim N(2,\sigma^2)$，其概率密度函数有对称性. 可以同例 2.5 一样，用积分表示概率后，用积分变换来求解，但填空题不必写出过程，用

学习笔记

图形对称较方便.

图 2-4 表示密度的对称中心为 $x=2$ 的正态分布 $N(2,\sigma^2)$.

$$P\{X>4\}=\frac{1}{2}-P\{2<X<4\}$$
$$=0.2,$$
$$P\{X<0\}=P\{X>4\}.$$

答案应填 0.2.

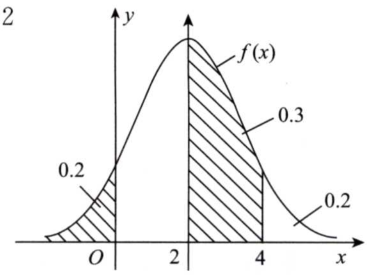


图 2-4

【例 2.13】 $X\sim U[a,b](a>0)$,且

$$P\{0<X<3\}=\frac{1}{4} \text{ 和 } P\{X>4\}=\frac{1}{2}.$$

求(Ⅰ)X 的概率密度;

(Ⅱ)$P\{1<X<5\}$.

分析 (Ⅰ) 因为 $X\sim U[a,b]$,故求 X 的密度就只要求出 a,b 即可.

根据均匀分布的性质:随机变量落入$[a,b]$中某区间的概率等于该区间长度与$[a,b]$长度之比.

由 $P\{0<X<3\}=P\{a<X<3\}=\frac{1}{4}$,得$\frac{3-a}{b-a}=\frac{1}{4}$.

由 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$,得$\frac{a+b}{2}=4$.

由$\begin{cases}\frac{3-a}{b-a}=\frac{1}{4},\\ \frac{a+b}{2}=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=6,\end{cases}$所以

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 2\leqslant x\leqslant 6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ)$P\{1<X<5\}=P\{2<X<5\}=\frac{5-2}{6-2}=\frac{3}{4}$.

【例 2.14】 (1993) 设随机变量 X 服从$(0,2)$上的均匀分布,则随机变量 $Y=X^2$ 在$(0,4)$内的概率密度 $f_Y(y)=$ ________.

分析 设 Y 在$(0,4)$内的分布函数为 $F_Y(y)$,当 $0<y<4$ 时,

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$
$$=P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\frac{\sqrt{y}}{2},$$

学习笔记

故 $f_Y(y)=F'_Y(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}(0<y<4)$.

答案应填$\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

【例 2.15】 (1995) 设 X 服从参数为 2 的指数分布,证明:随机变量 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 服从 $U(0,1)$.

证明 $X\sim E(2)$,所以其概率密度 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$ 分别为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}, \text{和 } F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

记 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 的分布函数为 $F_Y(y)$,则

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}.$$

当 $y\leqslant 0$ 时,因 $P\{X\leqslant 0\}=0$,故

$$F_Y(y)=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}=0.$$

当 $0<y<1$ 时,
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}=P\{1-y\leqslant \mathrm{e}^{-2X}\}\\&=P\{\ln(1-y)\leqslant -2X\}\\&=P\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}\\&=F(-\frac{1}{2}\ln(1-y))\\&=1-\mathrm{e}^{-2(-\frac{1}{2}\ln(1-y))}\\&=1-(1-y)=y.\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}=1$.

因此 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ y, & 0<y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 从而

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即 $Y\sim U(0,1)$.

【评注】 本题在 1995 年考试时,考生的得分率为 0.37.

$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}=F(X)$,我们有更一般的结论:对任一连续型随机变量 X 其分布函数为 $F(x)$,则 $Y=F(X)$ 必定服从 $U(0,1)$. 本题 $X\sim E(2)$,类似的考题还在 2003 年出现过.

学习笔记

【例 2.16】 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则随机变量 $Y=\max\{X,1\}$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 的间断点个数为

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

分析 $X \sim E(\lambda)$，其分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

由于 $Y=\max\{X,1\}\geqslant 1$，故

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\max\{X,1\}\leqslant y\}$

$$=P\{X\leqslant y,1\leqslant y\}=P(\varnothing)=0.$$

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\max\{X,1\}\leqslant y\}$

$$=P\{X\leqslant y,1\leqslant y\}$$

$$=P\{X\leqslant y\}=F_X(y).$$

因此 $F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & y\geqslant 1,\\ 0, & y<1.\end{cases}$

答案应选(B).

数学家的小故事

笛卡尔曾做过长时间的军人，当他准备乘船去北欧时，在船上遇到了一群强盗。当他们密谋时，笛卡尔听懂了他们的言语，于是他突然拔出了他的手中剑，强迫他们把船划回岸边。

第三章　多维随机变量及其分布

一、考试内容

多维随机变量及其分布　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常用二维随机变量的分布　两个及两个以上随机变量简单函数的分布.

二、考试要求

1. 理解 多维随机变量,多维随机变量的分布和性质,二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布,二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度,随机变量的独立性及不相关性、二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 中参数的概率意义.

2. 了解 二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的概率密度(数三要求掌握).

3. 掌握 随机变量相互独立的条件,二维均匀分布.

4. 会 求与二维随机变量相关事件的概率,求两个随机变量简单函数的分布,求多个相互独立随机变量简单函数的分布.

三、基本概念、基本理论和基本方法

(一)二维随机变量及其分布

(1) 二维随机变量

定义　设 $X = X(\omega), Y = Y(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的两个随机变量,则称向量(X,Y)为二维随机变量或随机向量.

(2) 二维随机变量(X,Y)的分布

定义　$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

(3) $F(x,y)$ 的性质

1) 对任意 x,y,均有 $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$;

2) $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$;

3) $F(x,y)$ 关于 x 和关于 y 均单调不减;

4) $F(x,y)$ 关于 x 和关于 y 是右连续的;

5) $P\{a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$.

(4) 二维随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，分别称$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}$和$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$为(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布函数.

显然，边缘分布$F_X(x)$和$F_Y(y)$与二维随机变量分布函数$F(x,y)$有如下关系：

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}=F(x,+\infty);$$
$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X<+\infty,Y\leqslant y\}=F(+\infty,y),$$

这里$F(x,+\infty)$应理解为$\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$.

(5) 二维随机变量的条件分布

定义　如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，$P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$，

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}$$

存在，则称此极限为在条件$Y=y$下X的条件分布函数，记作$F_{X|Y}(x\mid y)$或$P\{X\leqslant x\mid Y=y\}$.

类似地可定义$F_{Y|X}(y\mid x)$.

(6) 二维离散型随机变量

定义　如果随机变量(X,Y)可能取值为有限个或可数无穷个(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，则称(X,Y)为二维离散型随机变量.

(7) 二维离散型随机变量的概率分布

定义　二维离散型随机变量(X,Y)的可能取值为$(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$，称

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布或分布律.

也可以用表格形式表示分布律：

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

(8) $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$ 的性质

1) $p_{ij}\geqslant0,i,j=1,2,\cdots$；

2) $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$.

(9) 二维离散型随机变量的边缘分布

定义　$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots$$

和　$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots$$

分别被称为(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布.

显然，边缘分布$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$与二维概率分布p_{ij}有如下关系：

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},j=1,2,\cdots$$

(10) 二维离散型随机变量的条件分布

定义　对给定的 j，如果 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布.

(11) 二维连续型随机变量及其概率密度

定义　如果对随机变量 (X,Y) 的分布 $F(x,y)$，存在非负可积函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 x 和 y，都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

则称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的概率密度.

对连续型随机变量 (X,Y)，设它的概率密度为 $f(x,y)$，由 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 知，X 也是一个连续型变量，且其概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(12) $f(x,y)$ 的性质

1) $f(x,y)\geqslant 0$；

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

3) 随机变量 (X,Y) 落在区域 D 内的概率

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(13) 二维连续型随机变量的边缘密度

定义　$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 和 } f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

被分别称为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘密度.

(14) 二维连续型随机变量的条件密度

定义　设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，$f_Y(y)$ 连续且 $f_Y(y)>0$，则条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}s,$$

其中 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 被称为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件密度，记作 $f_{X|Y}(x\mid y)$，即

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},f_Y(y)>0.$$

类似可定义，当 $f_X(x)>0$ 时，在条件 $X=x$ 下 Y 的条件密度和条件分布函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \text{ 和 } F_{Y|X}(y\mid x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,s)}{f_X(x)}\mathrm{d}s.$$

（二）随机变量的独立性

（1）随机变量的独立性

定义　如果对任意 x,y 都有

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\}P\{Y \leqslant y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

（2）随机变量相互独立充要条件

1）离散型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件：对任意 $i,j = 1,2,\cdots$，有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

即

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}.$$

2）连续型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件：对任意的 x,y，有

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

可将两个随机变量的独立性推广到两个以上随机变量的情形.

（三）二维均匀分布和二维正态分布

（1）二维均匀分布

定义　如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{A}, & (x,y) \in G, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 A 是平面有界区域 G 的面积，则称 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

（2）二维正态分布

定义　如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$，其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1 > 0,\sigma_2 > 0,-1 < \rho < 1$ 均为常数，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ 和 ρ 的二维正态分布，记作

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho).$$

（3）重要性质

1）设 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，D 是 G 中的一个部分区域，记它们的面积分别为 S_D 和 S_G，则 $P\{(X,Y) \in D\} = \dfrac{S_D}{S_G}$.

如果设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，显然

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_G}, & (x,y) \in G, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

而 $P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \dfrac{1}{S_G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{S_D}{S_G}$.

2) 设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则

①$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；

②X与Y相互独立的充分必要条件是$\rho = 0$.

(X,Y)服从二维正态分布可保证X与Y均服从一维正态分布，反过来则不能成立，即已知X与Y均服从正态分布，并不能保证(X,Y)服从二维正态分布.

3)$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + 2ab\sigma_1\sigma_2\rho + b^2\sigma_2^2)$.

在数理统计中，常有随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)(i = 1,2,\cdots,n)$，则有$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\mu, \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^2\sigma^2\right)$.

如果$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i = 1,2,\cdots,n)$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i, \sum_{j=1}^{n} c_j^2\sigma_j^2\right).$$

（四）两个随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的分布

(1)X,Y 均为离散型随机变量

Z的分布律的求法与一维离散型类似.

(2)X,Y 均为连续型随机变量

$F_Z(z)$的求法，可用公式

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leqslant z\} = P\{g(X,Y) \leqslant z\} \\ &= \iint\limits_{g(x,y)\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

特别当$Z = X + Y$时，

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X + Y \leqslant z\} = \iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\left(\text{或}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

由此可得$Z = X + Y$的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x,$$

或

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

特别是当X和Y相互独立时，$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

或

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

这两个公式称为卷积公式，记为$f_X * f_Y$.

随机变量的简单函数通常包括线性函数、初等函数、最大值、最小值、绝对值等.

(3)X 为离散型随机变量、Y 为连续型随机变量

一般对离散型随机变量X的各种可能取值用全概率公式把它们展开，如下：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型，$Z=g(X,Y)$ 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leqslant z\} = P\{g(X,Y) \leqslant z\} \\ &= \sum_i P\{X=x_i\} P\{g(X,Y) \leqslant z \mid X=x_i\} \\ &= \sum_i p_i P\{g(x_i,Y) \leqslant z \mid X=x_i\}. \end{aligned}$$

本章小结

本章是概率统计的重点，每年必考的内容.

本章可以看成是第二章一维随机变量向多维的推广，重点关注以下三方面：

(1) 二维均匀分布和二维正态分布；

(2) 两个随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布；

(3) 二维随机变量 (X,Y) 中，X 与 Y 的关系 —— 独立与条件分布和密度.

我介绍高等分析的时候，它还是一个孩子，而你正在把它带大成人。

——约翰·伯努利给欧拉的一封信

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 3.1】 设二维随机变量(ξ,η)的分布函数为$F(x,y)$，则随机变量(η,ξ)的分布函数$F_1(x,y)=$ ________.

分析 (ξ,η)的分布函数为$F(x,y)$，故

$$F(x,y)=P\{\xi\leqslant x,\eta\leqslant y\}.$$

(η,ξ)的分布函数为$F_1(x,y)$，所以

$F_1(x,y)=P\{\eta\leqslant x,\xi\leqslant y\}=P\{\xi\leqslant y,\eta\leqslant x\}=F(y,x)$.

答案应填$F(y,x)$.

【例 3.2】 设随机变量X在1,2,3三个数字中等可能地取值，随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值，试求

(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(Ⅱ)$P\{X=i\mid Y=1\},i=1,2,3$.

解 (Ⅰ)$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}$

$$=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3};$$

$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}$

$$=\frac{1}{3}\times 0=0;$$

同理$P\{X=1,Y=3\}=0$；

$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1\mid X=2\}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

同理$P\{X=2,Y=2\}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X=2,Y=3\}=0$；

$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3,Y=3\}=\dfrac{1}{9}$.

所以，(X,Y)的分布为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

(Ⅱ)$P\{X=i\mid Y=1\}=\dfrac{P\{X=i,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$,

$P\{Y=1\}=\sum\limits_{i=1}^{3}p_{i1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{11}{18}$,

学习笔记

$$P\{X=1 \mid Y=1\}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{18}}=\frac{6}{11};$$

$$P\{X=2 \mid Y=1\}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{18}}=\frac{3}{11};$$

$$P\{X=3 \mid Y=1\}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{18}}=\frac{2}{11}.$$

【例 3.3】 设(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	a	b
1	c	0.5

，

已知 $P\{Y=1 \mid X=0\}=\frac{1}{2}, P\{X=1 \mid Y=0\}=\frac{1}{3}$，则

(A) $\begin{cases} a=0.1, \\ b=0.2, \\ c=0.2. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} a=0.2, \\ b=0.1, \\ c=0.2. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} a=0.2, \\ b=0.2, \\ c=0.1. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} a=0.3, \\ b=0.1, \\ c=0.1. \end{cases}$

分析 由分布律性质可知 $a+b+c+0.5=1$，即有 $a+b+c=0.5$. 又

$$P\{Y=1 \mid X=0\}=\frac{P\{X=0, Y=1\}}{P\{X=0\}}=\frac{b}{a+b}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1 \mid Y=0\}=\frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{c}{a+c}=\frac{1}{3}.$$

由 $\begin{cases} a+b+c=0.5, \\ \dfrac{b}{a+b}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{c}{a+c}=\dfrac{1}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=0.2, \\ b=0.2, \\ c=0.1. \end{cases}$

答案应选(C).

【例 3.4】 从 1,2,3 三个数字中一次任取两数，记第一个数为 X，第二个数为 Y，令 $\xi=\max(X,Y)$ 和 $\eta=\min(X,Y)$，试求

(Ⅰ)(X,Y) 的分布律及其边缘分布；

(Ⅱ)(ξ,η) 的分布及其边缘分布.

学习笔记

解 (Ⅰ)一次取出两个数不可能相等，所以 $P\{X=Y\}=0$，且 $P\{X=i,Y=j\}=\dfrac{1}{3\times 2}=\dfrac{1}{6}, i\neq j, i,j=1,2,3.$

所以 (X,Y) 的分布律及其边缘分布为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

(Ⅱ) $\xi=\max(X,Y)$，所以 ξ 取值为 2,3；$\eta=\min(X,Y)$，所以 η 取值为 1,2.

$$P\{\xi=2,\eta=1\}=P\{\max(X,Y)=2,\min(X,Y)=1\}$$
$$=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{3};$$

$$P\{\xi=2,\eta=2\}=P\{\max(X,Y)=2,\min(X,Y)=2\}=0;$$

$$P\{\xi=3,\eta=1\}=P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{3};$$

同理 $P\{\xi=3,\eta=2\}=\dfrac{1}{3}.$

所以 (ξ,η) 的分布律及其边缘分布为

$\xi \backslash \eta$	1	2	$p_{i\cdot}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

【例 3.5】 (1999) 设随机变量 X_i 服从分布 $\begin{array}{c|ccc} X_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$，$i=1,2$，且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$ ________.

分析 由 $\begin{array}{c|ccc} X_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$ 给出 (X_1,X_2) 的边缘分布，所以有

学习笔记

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1				$\frac{1}{4}$
0				$\frac{1}{2}$
1				$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

再考虑到 $P\{X_1X_2=0\}=1$，即 $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$，因此，

$$\begin{aligned}P\{X_1=1,X_2=1\}&=P\{X_1=1,X_2=-1\}\\&=P\{X_1=-1,X_2=1\}\\&=P\{X_1=-1,X_2=-1\}=0.\end{aligned}$$

故

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0		0	$\frac{1}{4}$
0				$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

最后求得

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$\begin{aligned}P\{X_1=X_2\}&=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=0,X_2=0\}+\\&\quad P\{X_1=1,X_2=1\}\\&=0.\end{aligned}$$

答案应填 0.

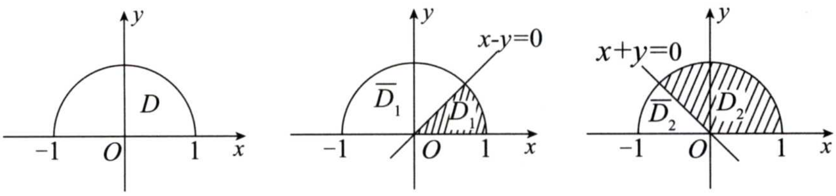
【例 3.6】 (2020) 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0.\end{cases}$$

学习笔记

求：二维随机变量(Z_1,Z_2)的分布律及边缘分布.

解 (X,Y)在$D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$上均匀分布



①$P\{Z_1=1\}=P\{X-Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_1\}=\dfrac{S_{D_1}}{S_D}=\dfrac{1}{4}$,

故

Z_1	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

,

②$P\{Z_2=1\}=P\{X+Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_2\}=\dfrac{S_{D_2}}{S_D}=\dfrac{3}{4}$,

故

Z_2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

,

总之(Z_1,Z_2)的边缘分布为

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

.

现求

③$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{(X,Y)\in D_1,(X,Y)\in D_2\}=P\{(X,Y)\in D_1\cap D_2\}=P\{(X,Y)\in D_1\}=\dfrac{1}{4}$,

所以

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

,进一步有

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

【评注】 本题这里先求出边缘分布，然后再求出(Z_1,Z_2)的分布律.也可以先求出(Z_1,Z_2)的分布律，然后再推出边缘分布律.

学习笔记

【例 3.7】 (1999) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量(X,Y)的联合概率分布及关于 X 和关于 Y 的边缘概率分布的部分数值,将剩余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			

解 (X,Y)是离散型的,设分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$. 因 X,Y 独立就有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$,因此

$$\frac{p_{11}}{p_{21}}=\frac{p_{1\cdot}p_{\cdot 1}}{p_{2\cdot}p_{\cdot 1}}=\frac{p_{1\cdot}}{p_{2\cdot}},\frac{p_{12}}{p_{22}}=\frac{p_{1\cdot}p_{\cdot 2}}{p_{2\cdot}p_{\cdot 2}}=\frac{p_{1\cdot}}{p_{2\cdot}},$$

总之$\frac{p_{11}}{p_{21}}=\frac{p_{12}}{p_{22}}=\frac{p_{13}}{p_{23}}=\frac{p_{1\cdot}}{p_{2\cdot}}$,即$(X,Y)$的分布律中,两行对应的概率一定成比例. 同理,两列对应的概率也一定成比例.

首先有

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			

,

其次,因为 X,Y 独立,$\frac{p_{12}}{p_{11}}=\frac{p_{22}}{p_{21}}=\frac{p_{\cdot 2}}{p_{\cdot 1}}$,所以

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$		
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$		

,

再进一步有

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$		
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

,

学习笔记

最后求得

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

.

【评注】 在离散的(X,Y)中，当X与Y独立，则(X,Y)分布的概率行与行之间成比例，同样，列与列之间成比例. 因此，如果在(X,Y)的分布律中有一个$p_{ij}=0$，则可以肯定X与Y不是相互独立的. 反之不一定，即如果所有$p_{ij}\neq 0$并不能保证X与Y独立.

【例 3.8】 (2008) 设随机变量X,Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为

(A)$F^2(x)$.　　(B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$.　　(D)$[1-F(x)][1-F(y)]$.

分析 设Z的分布为$F_Z(x)$，则

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}$$
$$=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant x\}=F^2(x).$$

答案应选(A).

【评注】 当年考生中有相当多是选择答案(B). 其实，$Z=\max\{X,Y\}$是一维随机变量，其分布函数只可能是一元函数，不可能是二元函数(B).

事实上，$F(x)F(y)$恰好是二维独立变量(X,Y)的分布函数.

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$$
$$=F(x)F(y).$$

【例 3.9】 设随机变量$X_i(i=1,2,3,4)$相互独立，均服从分布$B(1,\frac{1}{2})$，则行列式$X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$的概率分布为________.

分析 $X_i\sim B(1,\frac{1}{2})$，即

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

，$X=X_1X_4-X_2X_3$，

$$P\{X_1X_4=1\}=P\{X_1=1,X_4=1\}$$
$$=P\{X_1=1\}P\{X_4=1\}=\frac{1}{4}.$$

学习笔记

所以

X_1X_4	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

,同理

X_2X_3	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

$$P\{X=-1\}=P\{X_1X_4-X_2X_3=-1\}=P\{X_1X_4=0,X_2X_3=1\}$$
$$=P\{X_1X_4=0\}P\{X_2X_3=1\}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}.$$

同理 $P\{X=1\}=\frac{3}{16}$.

因此

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{16}$

.

答案应填

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{16}$

.

【例 3.10】 设相互独立随机变量 X 与 Y 分别服从 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

分析 X 与 Y 相互独立且均服从正态分布,则 $X+Y$ 也必服从正态分布,即 $X+Y\sim N(1,2)$. 根据正态分布密度具有对称性有

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}.$$

答案应选(B).

【例 3.11】 设两随机变量 X 与 Y 相互独立同分布,且 $P\{X=-1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$,则有

(A) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X=Y\}=1$.

(C) $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$.　　(D) $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$.

分析 X,Y 同分布,所以由 $P\{X=-1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$ 可得

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

和

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

又因为 X,Y 相互独立,故

$$P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$$
$$=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

学习笔记

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

答案应选(A).

【例 3.12】 (2006) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max(X,Y) \leqslant 1\} =$ ________.

分析
$$\begin{aligned} P\{\max(X,Y) \leqslant 1\} &= P\{X \leqslant 1, Y \leqslant 1\} \\ &= P\{X \leqslant 1\}P\{Y \leqslant 1\} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

答案应填$\frac{1}{9}$.

【例 3.13】 设二维随机变量(X,Y)在 xOy 平面上由曲线 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围成的区域上服从均匀分布，则概率

$P\left\{0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right\} =$ ______.

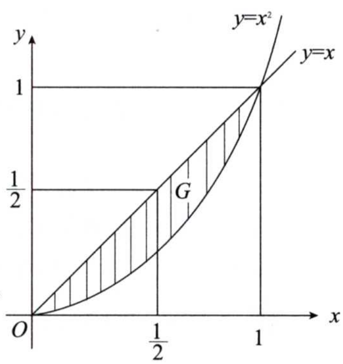


图 3-1

分析

$$P\left\{0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 是(X,Y)的概率密度. $f(x,y)$ 是在 $y = x$ 和 $y = x^2$ 所围区域上均匀.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{A}, & (x,y) \in G, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 G 是 $y = x$ 和 $y = x^2$ 所围区域，A 是 G 的面积，

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, f(x,y) = \begin{cases} 6, & 0 \leqslant x^2 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\left\{0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right\} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} 6\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 6(x - x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

答案应填$\frac{1}{2}$.

【例 3.14】 设 $(X,Y) \sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $P\{X < Y\} =$ ______.

分析 **方法一**：$P\{X < Y\} = \iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

由于$(X,Y) \sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，故

学习笔记

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2]},$$

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}.$$

答案应填$\frac{1}{2}$.

方法二:因为$(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,故

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2]},$$

即有 $f(x,y)$ 关于 x 和 y 是对称的,从而

$$P\{X<Y\}=P\{Y<X\}=P\{Y\leqslant X\}=1-P\{X<Y\}.$$

所以 $2P\{X<Y\}=1,P\{X<Y\}=\frac{1}{2}$.

答案应填$\frac{1}{2}$.

【例 3.15】 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},0<x<y,\\0,\ 其他.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$,并判断 X,Y 是否独立;

(Ⅱ)求 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 和 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

解 (Ⅰ)$x\leqslant 0$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$.

$x>0$ 时,$f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=e^{-x}$.

所以 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},\ x>0;\\0,\ x\leqslant 0.\end{cases}$

当 $y\leqslant 0$ 时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

当 $y>0$ 时,

$$f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}\mathrm{d}x=ye^{-y}.$$

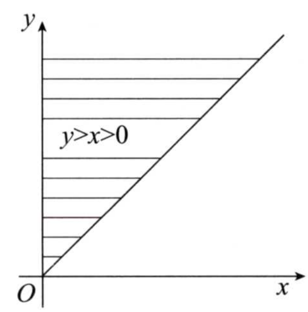


图 3-2

所以 $f_y(y)=\begin{cases}ye^{-y},\ y>0,\\0,\quad y\leqslant 0.\end{cases}$

X,Y 不相互独立,因 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$.

(Ⅱ)当$f_Y(y)>0$ 时,即 $y>0$ 时,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y},\quad 0<x<y,\\0,\qquad 其他.\end{cases}$$

当 $f_X(x)>0$ 时,即 $x>0$ 时,

学习笔记

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{x-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

【例 3.16】 (2004) 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 内服从均匀分布，在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 内服从均匀分布，求：

(Ⅰ) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；

(Ⅱ) Y 的概率密度；

(Ⅲ) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

分析 本题是 2004 年数学四的考题，当年的得分率仅为 0.204.

有一类问题是给定 $f(x,y)$，求 $f_{Y|X}(y \mid x)$，就像例 3.15 那样，而本题是先给出了 $f_{Y|X}(y \mid x)$，反过来求 $f(x,y)$.

如果先给 $f(x,y)$，则 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$，且在 $f_X(x) > 0$ 的条件下，

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

如果先给 $f_{Y|X}(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，$f_X(x) > 0$，则在 $f_X(x) > 0$ 的条件下，

$$f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x).$$

但 $f(x,y)$ 是定义在 $-\infty < x < +\infty$，$-\infty < y < +\infty$ 上的，仅给出 $f_X(x) > 0$ 的这部分显然是不全的，还得补上 $f_X(x) = 0$ 所对应的那部分.

解 (Ⅰ) $X \sim U(0,1)$，即有 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

在 $f_X(x) > 0$ 的条件下，也就是在 $0 < x < 1$，$X = x$ 的条件下，$Y \sim U(0,x)$，即有

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

因为 $f_{Y|X}(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，$f_X(x) > 0$，所以当 $0 < x < 1$ 时，有

$$f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

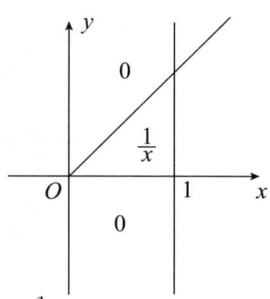


图 3-3

但 $f(x,y)$ 是定义在全平面上，而上式仅给出 $0 < x < 1$ 时的 $f(x,y)$，如图 3-3.

由于

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{1}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1,$$

学习笔记

而 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1, f(x,y) \geqslant 0,$$

所以可以肯定 $0 < x < 1$ 以外，即 $x \leqslant 0$ 时或 $x \geqslant 1$ 时 $f(x,y) = 0$.

因此可以将 $0 < x < 1$ 时，

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & y \leqslant 0 \text{ 或 } y \geqslant x \end{cases}$$

延拓成整个平面上的函数，即

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

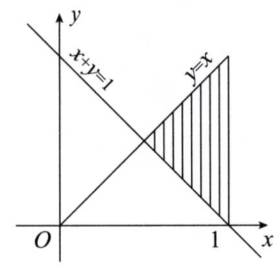


图 3-4

$$(\mathrm{II})\, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\, P\{X+Y>1\} = \iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{x} \frac{1}{x}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (2 - \frac{1}{x})\mathrm{d}x = 1 - \ln 2.$$

【例 3.17】 设 X 与 Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的泊松分布，则 $Z = X + Y$ 服从的分布为__________.

分析 记 $C_0^0 = 1$，则

$$P\{Z=k\} = P\{X+Y=k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} C_k^i = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-2\lambda}(1+1)^k$$

$$= \frac{(2\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-2\lambda}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

答案应填 $P(2\lambda)$.

学习笔记

【例 3.18】 (2005) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(Ⅰ) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

(Ⅱ) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅲ) $P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X\leqslant\frac{1}{2}\}$.

解 (Ⅰ)

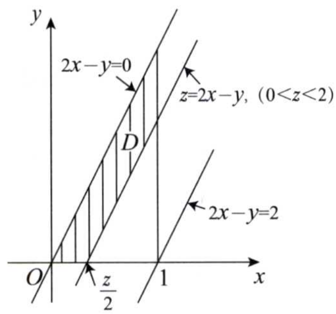


图 3-5

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_{y/2}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) $Z=2X-Y$，由 $f_Z(z)=F'_Z(z)$ 可先求 $F_Z(z)$，即

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

要计算积分 $\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，就得讨论 z 的取值范围. 从图 3-5 可知，应分 $z<0,0\leqslant z\leqslant 2,z>2$ 三个范围来讨论.

$z<0$ 时，$F_Z(z)=0$.

$0\leqslant z\leqslant 2$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=S_D=1-(1-\frac{z}{2})^2=z-\frac{z^2}{4},$$

其中 D 为图 3－5 中阴影部分.

$z>2$ 时，$F_Z(z)=1$.

因此 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{z^2}{4}, & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 1, & z>2.\end{cases}$

学习笔记

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（Ⅲ）$P\{Y\leqslant \frac{1}{2}\mid X\leqslant \frac{1}{2}\}$

$$=\frac{P\{Y\leqslant \frac{1}{2},X\leqslant \frac{1}{2}\}}{P\{X\leqslant \frac{1}{2}\}}$$

$$=\frac{\iint\limits_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{S_B}{S_A}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}.$$

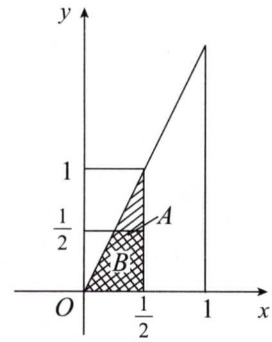


图 3-6

【例 3.19】 (2008)设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ）求 $P\{Z\leqslant \frac{1}{2}\mid X=0\}$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

解 （Ⅰ）$P\{Z\leqslant \frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{X+Y\leqslant \frac{1}{2}\mid X=0\}$

$$=P\{Y\leqslant \frac{1}{2}\mid X=0\}$$

$$=P\{Y\leqslant \frac{1}{2}\}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$

$$=P\{Y\leqslant z+1,X=-1\}+P\{Y\leqslant z,X=0\}+P\{Y\leqslant z-1,X=1\}$$

$$=P\{Y\leqslant z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\}P\{X=1\}$$

$$= \frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)],$$

其中 $F_Y(z)$ 为 Y 的分布函数. 因此

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leqslant z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

【评注】 求 $F_Z(z)$ 时,也可用全概率公式:

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = \sum_{i=-1}^{1} P\{X=i\}P\{X+Y \leqslant z \mid X=i\}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1} P\{Y \leqslant z-i \mid X=i\}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1} P\{Y \leqslant z-i\} = \frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1} F_Y(z-i),$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1} f_Y(z-i) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leqslant z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

学习笔记

【例 3.20】 (2010) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x)$.

解 本题给出 $f(x,y)$, 常数 A 可用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ 来确定, 但计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 会比较烦琐.

$f_{Y|X}(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$, $f_X(x) > 0$. 而 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$. 既然要求 $f_X(x)$, 不如先求 $f_X(x)$ 带上常数 A, 这不影响 $f_{Y|X}(y \mid x)$ 的计算, 还可用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$ 来定常数 A, 这比用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 直接定常数简便些.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y$$

$$= Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = A\sqrt{\pi}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

由于 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = A\pi$, 故 $A = \dfrac{1}{\pi}$.

学习笔记

当 $f_X(x)>0$，等价于当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2},-\infty<y<+\infty.$$

【评注】 本题为2010年考题.当年的得分率为0.296.

本题解答过程多处要用到积分：$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$. 这公式可有多种推导：

① $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi$，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$.

② 对 $X\sim N(0,\frac{1}{2})$ 的密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$，必有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

如果考生能记住这个叫泊松积分的公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$，会对考试很有帮助.

本题也可以把密度 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$ 看成服从二维正态分布 $N(0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$. 对比密度的一般形式，直接求出 σ_1,σ_2,ρ.

就不难写出 A，$f_{Y|X}(y\mid x)$ 了.

【例3.21】 (2011)设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(Ⅰ)求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

解 如图3-7所示，G 为 $\begin{cases}x-y=0,\\x+y=2,\\y=0\end{cases}$ 所围区域，即 G 为 $\begin{cases}y\leqslant x,\\x\leqslant 2-y,\\y\geqslant 0\end{cases}$ 的公共部分，亦即 $G:0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2-y$，从而

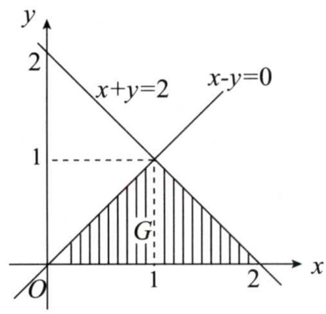


图 3-7

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

有了 $f(x,y)$,不难求 $f_X(x)$ 和 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

(Ⅰ) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

当 $x<0$ 或 $x>2$ 时,$f_X(x)=0$;

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f_X(x)=\int_0^x\mathrm{d}y=x$;

当 $1<x\leqslant 2$ 时,$f_X(x)=\int_0^{2-x}\mathrm{d}y=2-x$.

因此 $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_y^{2-y}\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$f_Y(y)>0$ 等价于 $0\leqslant y<1$. 在 $Y=y(0\leqslant y<1)$ 时,X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & y\leqslant x\leqslant 2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【评注】 本题也可以把 G 理解成 $G:0<y<x<2-y$,这时可给出同样正确的答案:$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

当 $0<y<1$ 时,$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

学习笔记

第四章　随机变量的数字特征

一、考试内容

随机变量的数学期望(均值)、方差、标准差及其性质　随机变量函数的数学期望　矩、协方差、相关系数及其性质

二、考试要求

1. 理解 随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数).

2. 掌握 常用分布的数字特征.

3. 会 运用数字特征的基本性质,求随机变量函数的数学期望.

三、基本概念、基本理论和基本方法

(一)随机变量的数学期望

(1) 数学期望

定义　1) 离散型随机变量 X 的数学期望

设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛,则称此级数为随机变量 X 的数学期望或均值,记作 $E(X)$,即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k.$$

2) 连续型随机变量 X 的数学期望

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称此积分为随机变量 X 的数学期望或均值,记作 $E(X)$,即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 数学期望的性质

1) 设 C 是常数,则有 $E(C)=C$.

2) 设 X 是随机变量,C 是常数,则有

$$E(CX)=CE(X).$$

3) 设 X 和 Y 是任意两个随机变量，则有

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y).$$

4) 设 X 与 Y 是任意两个随机变量，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

成立的充要条件是 X 与 Y 不相关.

(3) 随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

1) 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots,$$

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则随机变量 $Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则随机变量 $Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望

1) 设随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots,$$

如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

2) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（二）随机变量的方差

(1) 方差

定义 设 X 是随机变量，如果数学期望 $E\{[X-E(x)]^2\}$ 存在，则称之为 X 的方差，记作 $D(X)$，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差或均方差，记作 $\sigma(X)$，即 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

(2) 方差计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

(3) 方差的性质

1) 设 C 为常数,则 $D(C)=0$.反过来,从 $D(X)=0$ 并不能得出 X 为常数的结论.

2) 设 X 是随机变量,a 和 b 是常数,则有

$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

3) 设 X 与 Y 是任意两个随机变量,则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

成立的充要条件是 X 和 Y 不相关.

(三) 常用随机变量的数学期望和方差

(1) 0-1分布

$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p).$

(2) 二项分布,$X\sim B(n,p)$

$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p).$

(3) 泊松分布,$X\sim P(\lambda)$

$E(X)=\lambda,\quad D(X)=\lambda.$

(4) 几何分布,$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots,0<p<1$

$E(X)=\dfrac{1}{p},\quad D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}.$

(5) 均匀分布,$X\sim U(a,b)$

$E(X)=\dfrac{a+b}{2},\quad D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}.$

(6) 指数分布,$X\sim E(\lambda)$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda},\quad D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}.$

(7) 正态分布,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu,\quad D(X)=\sigma^2.$

(四) 矩、协方差和相关系数

(1) 矩

定义 1) 设 X 是随机变量,如果

$$E(X^k),\quad k=1,2,\cdots$$

存在,则称之为 X 的 k 阶原点矩,简称为 k 阶矩.

2) 设 X 是随机变量,如果

$$E\{[X-E(X)]^k\},\quad k=2,3,\cdots$$

存在,则称之为 X 的 k 阶中心矩.

3) 设 X 和 Y 是两个随机变量,如果

$$E(X^kY^l),\quad k,l=1,2,\cdots$$

存在,则称之为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

4) 设 X 和 Y 是两个随机变量,如果

$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},\quad k,l=1,2,\cdots$$

存在,则称之为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

(2) 协方差

定义　对于随机变量 X 和 Y,如果 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在,则称之为 X 和 Y 的协方差,记作 $\mathrm{Cov}(X,Y)$,即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

(3) 相关系数

定义　对于随机变量 X 和 Y,如果 $D(X)D(Y)\neq 0$,则称 $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 和 Y 的相关系数,记为 ρ_{XY},即

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

如果 $D(X)D(Y)=0$,则 $\rho_{XY}=0$.

(4) 不相关

定义　如果随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$,则称 X 和 Y 不相关.

(5) 协方差的公式和性质

1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

2) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

3) 协方差性质.

(A) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(B) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$,其中 a,b 是常数;

(C) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

(6) 相关系数性质

1) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$;

2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是存在常数 a 和 b,其中 $a\neq 0$,使得

$$P\{Y=aX+b\}=1.$$

(7) 独立与不相关

1) 如果随机变量 X 和 Y 相互独立,则 X 和 Y 必不相关;反过来,X 和 Y 不相关时,X 和 Y 却不一定相互独立.

2) 对二维正态随机变量 (X,Y),X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

3) 对二维正态随机变量 (X,Y),X 和 Y 相互独立与 X 和 Y 不相关是等价的.

本章小结	本章也是概率统计重点和必考内容,应重点关注: (1) 数学期望、方差、协方差和相关系数的定义,性质,计算; (2) 常考分布的数学期望和方差; (3) 随机变量函数的期望 $E(g(X,Y))$ 的计算.

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 4.1】 将一均匀骰子独立地抛掷三次，求掷得的三点数之和 X 的数学期望 $EX =$ ________.

分析 设 X_i 为第 i 次抛掷得的点数，$i = 1,2,3$.

显然，$X = X_1 + X_2 + X_3$，从而 $EX = EX_1 + EX_2 + EX_3$.

而 $\begin{array}{c|cccccc} X_i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline P & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$，故

$$EX_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2},$$

$$EX = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}.$$

答案应填$\frac{21}{2}$.

【例 4.2】 (2008) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X = E(X^2)\} =$ ________.

分析 $E(X^2) = DX + (EX)^2 = 1 + 1^2 = 2$,

$$P\{X = E(X^2)\} = P\{X = 2\} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

答案应填$\frac{1}{2e}$.

【例 4.3】 (2017) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX =$ ________.

分析 由 $F(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，得 X 的概率密度

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right),$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度. 从而

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-4}{2}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x-4}{2}\right) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x-4}{2}\right) \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = 2. \end{aligned}$$

答案应填 2.

【评注】 当随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 时，其分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

也就是说，分布函数 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 所对应的随机变量 X，必有

$$EX=\mu.$$

若 $F(x)=C_1\Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)+C_2\Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)$，$C_1+C_2=1$，则必有

$$EX=C_1\mu_1+C_2\mu_2.$$

学习笔记

【例 4.4】 (2004) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ________.

分析 $X\sim E(\lambda)$，故 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$，从而

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}.$$

答案应填 e^{-1}.

【评注】 本题当年得分率为 0.366，主要问题在于计算失误较多.

【例 4.5】 (1998) 商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都在区间$[10,20]$上服从均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利为 500 元，试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

解 设 Z 表示此商店经销该种商品每周所得的利润，则

$$Z=g(X,Y)=\begin{cases}1000Y, & Y\leqslant X,\\ 1000X+500(Y-X), & Y>X.\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，因此(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{100}, & 10\leqslant x,y\leqslant 20,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

从而可得每周所得利润的数学期望为

$$\begin{aligned}E(Z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{10}^{x}1000y\cdot\frac{1}{100}\mathrm{d}y+\int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{x}^{20}500(x+y)\frac{1}{100}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

≈ 14166.7(元).

【例 4.6】 (2014) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在,X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$,随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$,随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$,则

(A) $EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$.　　(B) $EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$.

(C) $EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$.　　(D) $EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$.

分析

$$\begin{aligned} EY_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y_1}(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_1(y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\mathrm{d}y\right] \\ &= \frac{1}{2}[EX_1+EX_2]. \end{aligned}$$

$EY_2=E[\frac{1}{2}(X_1+X_2)]=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)$,所以 $EY_1=EY_2$.

$$\begin{aligned} DY_1-DY_2 &= EY_1^2-(EY_1)^2-EY_2^2+(EY_2)^2=EY_1^2-EY_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y- \\ &\quad E\left[\frac{1}{4}(X_1^2+2X_1X_2+X_2^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}E(X_1^2)+\frac{1}{2}E(X_2^2)-\frac{1}{4}[E(X_1^2)+2E(X_1X_2)+E(X_2^2)] \\ &= \frac{1}{4}[E(X_1^2)-2E(X_1X_2)+E(X_2^2)] \\ &= \frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2>0. \end{aligned}$$

即 $DY_1>DY_2$.

答案应选(D).

【评注】 在上面得到 $DY_1-DY_2=\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2$ 后,应有 $\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2\geqslant 0$. 现在只考虑 $\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2>0$,而不考虑 $\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2=0$. 因为,如果 $\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2=0$,即 $E(X_1-X_2)=0$,也就有 $E(X_1-X_2)^2=D(X_1-X_2)+[E(X_1-X_2)]^2=0$,导致 $D(X_1-X_2)=0$ 和 $E(X_1-X_2)=0$. X_1 与 X_2 独立,$D(X_1-X_2)=DX_1+DX_2=0$,$EX_1=EX_2$,这是不可能的. $DX_i=0$,意味着 X_i 以概率 1 等于常数,X_i 不能有密度 $f_i(x)$,$EX_1=EX_2$ 也不一定成立. 因此,只考虑 $\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2>0$.

学习笔记

【例 4.7】 (2013) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X}) =$ ________.

分析 $$E(Xe^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{2}}\mathrm{d}x \cdot e^2$$
$$= e^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

可以把 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ 看成是正态分布 $N(2,1)$ 的随机变量的概率密度，$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x$ 就成为这个随机变量的数学期望，即
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x = 2,$$
所以 $E(Xe^{2X}) = 2e^2$.

答案应填 $2e^2$.

【例 4.8】 (2011) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记 $U = \max\{X,Y\}$ 和 $V = \min\{X,Y\}$，则 $E(UV) =$

(A) $EU \cdot EV$.　　(B) $EX \cdot EY$.

(C) $EU \cdot EY$.　　(D) $EX \cdot EV$.

分析 方法一：根据公式
$$U = \max\{X,Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2},$$
$$V = \min\{X,Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2},$$
$$UV = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}\cdot\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$$
$$= \frac{(X+Y)^2-|X-Y|^2}{4}$$
$$= \frac{4XY}{4} = XY.$$
$E(UV) = E(XY) = EX \cdot EY$，

答案应选(B).

方法二：X 与 Y 中大的一个乘小的一个就等于这二个相乘，即
$$UV = \max\{X,Y\}\cdot\min\{X,Y\} = XY,$$
从而 $E(UV) = E(XY) = EX \cdot EY$.

答案应选(B).

学习笔记

【例 4.9】 (2012)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从参数为 1 的指数分布,记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ)求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(Ⅱ)求 $E(U+V)$.

解 (Ⅰ)方法一:X 与 Y 的密度函数均为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

V 的分布函数

$$\begin{aligned}F_V(v)&=P\{V\leqslant v\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant v\}=P\{\{X\leqslant v\}\cup\{Y\leqslant v\}\}\\&=P\{X\leqslant v\}+P\{Y\leqslant v\}-P\{X\leqslant v\}P\{Y\leqslant v\}\\&=2F(v)-F^2(v).\end{aligned}$$

V 的密度

$$f_V(v)=F_V'(v)=2f(v)-2f(v)F(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}$$

方法二:$P\{X>t\}=P\{Y>t\}=e^{-t},t>0$.

所以
$$\begin{aligned}F_V(v)&=P\{V\leqslant v\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant v\}\\&=1-P\{\min\{X,Y\}>v\}=1-P\{X>v,Y>v\}\\&=1-P\{X>v\}P\{Y>v\}\\&=\begin{cases}1-e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}\end{aligned}$$

$$f_V(v)=F'(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & v\leqslant 0.\end{cases}$$

(Ⅱ)方法一:$U=\max\{X,Y\}$,则

$$\begin{aligned}F_U(u)&=P\{\max(X,Y)\leqslant u\}=P\{X\leqslant u,Y\leqslant u\}\\&=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}=F^2(u)\\&=\begin{cases}(1-e^{-u})^2, & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}2e^{-u}(1-e^{-u}), & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}E(U+V)&=EU+EV=\int_0^{+\infty}2ue^{-u}(1-e^{-u})\,du+\int_0^{+\infty}2ue^{-2u}\,du\\&=\int_0^{+\infty}2ue^{-u}\,du=2.\end{aligned}$$

方法二:因为 $U+V=\max\{X,Y\}+\min\{X,Y\}=X+Y$,故

$$E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=2.$$

【例 4.10】 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx},-\infty<x<+\infty,$$

学习笔记

其中 A,B 为常数,已知 $E(X)=D(X)$,试求 A,B 和 $E(X)$.

解 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}=Ae^{\frac{B^2}{2}}e^{-\frac{(x-B)^2}{2}}$,此为正态分布 $N(B,1)$ 的密度函数.又已知 $E(X)=D(X)$,故 $X\sim N(1,1)$,所以 $B=E(X)=1$.常数 $Ae^{\frac{B^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,即有 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$.

故 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}},B=1,E(X)=1$.

【评注】 本题如果用 $E(X)=D(X)$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 两条件来求解常数 A,B,则计算量会大得多.

在判断概率密度函数时,关键在于其变量部分的结构,而不在于其常数部分,因为常数部分总可以用 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 来确定.

【例 4.11】 (2001) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布,试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解 方法一:三角形区域为 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$,随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度,则

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时,$f_1(x)=0$;

当 $0<x<1$ 时,有 $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x$.

$E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,$E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,

所以 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$.

同理可得

$$E(Y)=\frac{2}{3},D(Y)=\frac{1}{18},$$

$$E(XY)=\iint\limits_G 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36},$$

于是

$$\begin{aligned}D(U)&=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.\end{aligned}$$

学习笔记

方法二：以 $f_U(u)$ 表示 $U=X+Y$ 的概率密度.

当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f_U(u)=0$.

当$1\leqslant u\leqslant 2$ 时，易知当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant u-x\leqslant 1$ 时，有 $f(x,u-x)=2$，否则 $f(x,u-x)=0$. 由随机变量之和的概率密度公式，有

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)\mathrm{d}x=\int_{u-1}^{1}2\mathrm{d}x=2(2-u),$$

因此

$$E(X+Y)=E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)\mathrm{d}u=2\int_1^2 u(2-u)\mathrm{d}u=\frac{4}{3},$$

$$E[(X+Y)^2]=E(U^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2 f_U(u)\mathrm{d}u=2\int_1^2 u^2(2-u)\mathrm{d}u=\frac{11}{6},$$

$$D(U)=D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}.$$

方法三：

$$E(U)=E(X+Y)=\int_0^1\left[\int_{1-x}^{1}2(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\int_1^{1+x}2u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$E(U^2)=E[(X+Y)^2]=\int_0^1\left[\int_{1-x}^{1}2(x+y)^2\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\int_1^{1+x}2u^2\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6},$$

故 $D(U)=\dfrac{11}{6}-\dfrac{16}{9}=\dfrac{1}{18}$.

【评注】 本题在 2001 年考试中得分率为 0.31. 相当一部分考生选用了第一、二两种方法，还有更麻烦的方法. 我们推荐用方法三，在考试中如何选择较好的解法，应该仔细考虑.

【例 4.12】 (2004) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$，令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

分析 $$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}X_1\right)+\mathrm{Cov}\left(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+0=\frac{\sigma^2}{n}.$$

答案应选(A).

学习笔记

【例 4.13】 (1993) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$$

(Ⅰ) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

(Ⅱ) 求 X 与 $|X|$ 的协方差,并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(Ⅲ) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立?为什么?

解 (Ⅰ) 因为 $xf(x)$ 是奇函数,$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0$.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2.$$

$$\begin{aligned}(\text{Ⅱ})\mathrm{Cov}(X,|X|)&=E(X|X|)-E(X)E(|X|)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx=0,\end{aligned}$$

注意 $x|x|f(x)$ 也是奇函数.

所以,X 与 $|X|$ 不相关.

(Ⅲ) 对给定 $0<a<+\infty$,显然事件 $\{|X|\leqslant a\}$ 包含在事件 $\{X\leqslant a\}$ 内,且

$$P\{X\leqslant a\}<1,P\{|X|\leqslant a\}>0,$$

故

$$P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}=P\{|X|\leqslant a\},$$
$$P\{X\leqslant a\}P\{|X|\leqslant a\}<P\{|X|\leqslant a\},$$

从而 $\qquad P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}\neq P\{X\leqslant a\}P\{|X|\leqslant a\}$.

因此,X 与 $|X|$ 不独立.

【评注】 本题也是一个真题.我们想通过此题考核 $E(X)$,$D(X)$ 的计算,协方差、相关系数的计算,独立与不相关的关系,为了减少不必要的计算,我们选择的密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$ 是具有对称性的偶函数.所以在计算过程中一定要充分利用对称性,可以大大简化计算.事实上,本题的 $f(x)$ 是具有对称性的密度函数中比较简单的一个.

【例 4.14】 设随机变量 (X,Y) 在 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 内服从均匀分布,则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$ ________.

分析 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$,$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

学习笔记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},|x|<1.$$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=0.$$

同理 $EY=0$.

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}xy\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以 $\rho_{XY}=0$.

答案应填 0.

【评注】 本题是 1991 年数四的考题，当年得分率仅为 0.14. 本题若用对称性，便可很快得 $\rho_{XY}=0$.

【例 4.15】 (1994) 已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(1,0;9,16;-\frac{1}{2}\right)$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(Ⅰ) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；

(Ⅱ) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

(Ⅲ) 问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

解 (Ⅰ) 由 $(X,Y)\sim N(1,0;9,16;-\frac{1}{2})$ 知，

$$X\sim N(1,9),Y\sim N(0,16),\rho_{XY}=-\frac{1}{2}.$$

$$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{0}{2}=\frac{1}{3},$$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{D(X)}{9}+\frac{D(Y)}{4}+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$=1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1+4-2=3.$$

$$(\text{Ⅱ})\mathrm{Cov}(X,Z)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=3-3=0,$$

所以 $\rho_{XZ}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0.$

(Ⅲ) 因为 (X,Y) 是正态分布，故 $(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$ 即 (X,Z) 也是正态分布，又 $\rho_{XZ}=0$，所以 X 与 Z 相互独立.

学习笔记

【例 4.16】 随机变量 X 和 Y 均服从正态分布,则

(A) $X+Y$ 一定服从正态分布.

(B) X 和 Y 不相关与独立等价.

(C) (X,Y) 一定服从正态分布.

(D) $(X,-Y)$ 未必服从正态分布.

分析 由于 X 和 Y 均服从正态,不能保证 (X,Y) 正态,故(A)(B)(C)均不成立,选项(D)是正确的,反过来,如果有 (X,Y) 正态,则(A)(B)(C)均成立,(D)不成立. 答案应选(D).

【评注】 一般我们不加证明地记住:

①(X,Y) 二维正态,则 X,Y 均正态. 反过来不一定;

②(X,Y) 正态,当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时,则 $(aX+bY, cX+dY)$ 也正态;

③(X,Y) 正态,对任意常数 a 与 b,$a^2+b^2\neq 0$ 时,$aX+bY$ 必正态;

④X,Y 均正态且独立,则 $(X,Y)\sim N(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;0)$.

【例 4.17】 (2001)将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

分析 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$. 显然 $X+Y=n$.

$DY=D(n-X)=DX$,

$\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(X,n-X)=\operatorname{Cov}(X,n)-\operatorname{Cov}(X,X)=-DX$,

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}}=-1$.

答案应选(A).

【评注】 本题得分率 0.24.

【例 4.18】 已知随机变量 X 的分布 $P\{X=k\}=\frac{c}{2^k k!}$,$k=0,1,2,\cdots$,其中 c 为常数,则随机变量 $Y=2X-3$ 的 $DY=$ ________.

分析 由 $P\{X=k\}=\dfrac{c}{2^k k!}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}c$,$k=0,1,2,\cdots$,得

$$c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, X\sim P\left(\frac{1}{2}\right),$$

$DY=D(2X-3)=4DX=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$.

答案应填 2.

学习笔记

【例 4.19】 (2004) 设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B\mid A)=\frac{1}{3}$, $P(A\mid B)=\frac{1}{2}$.

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$

求(Ⅰ)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

解 (Ⅰ)由 $X=\begin{cases}1, & A,\\ 0, & \overline{A},\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B,\\ 0, & \overline{B}\end{cases}$ 和 $P(A)=\frac{1}{4}$,得到

X \ Y	$\overline{B}$ 0	B 1	
$\overline{A}$ 0			$\frac{3}{4}$
A 1			$\frac{1}{4}$

再由 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}$,故 $P(AB)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$.

又因 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}$,故 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{6}$.

将 $P(AB)=\frac{1}{12}$ 和 $P(B)=\frac{1}{6}$ 填入得

X \ Y	$\overline{B}$ 0	B 1	
$\overline{A}$ 0			$\frac{3}{4}$
A 1		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{6}$	

进一步有

X \ Y	$\overline{B}$ 0	B 1	
$\overline{A}$ 0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
A 1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	

(Ⅱ) $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$.

由于

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

,所以 $EX=\frac{1}{4}$, $DX=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.

同理 $EY=\frac{1}{6}$, $DY=\frac{5}{36}$.

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$.

学习笔记

$E(XY)=1\cdot P(AB)=\frac{1}{12}$.　$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$.

$$\rho_{XY}=\frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{5}{36}}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

(Ⅲ)$Z=X^2+Y^2$,

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

【例 4.20】 (2006) 设随机变量 X 概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,求

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(Ⅲ)$F(-\frac{1}{2},4)$.

解 (Ⅰ)$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}$.

当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=0$,$f_Y(y)=F'_Y(y)=0$;

当 $0<y<1$ 时,
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y},\end{aligned}$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}};$$

当 $1\leqslant y<4$ 时,
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant 0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y},\end{aligned}$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $y\geqslant 4$ 时,$F_Y(y)=1$,$f_Y(y)=0$.

$$\text{总之 } Y \text{ 的概率密度为 } f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

学习笔记

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=EX^3-EX\cdot EX^2$.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4};$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{6};$$

$$EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^3\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{7}{8}.$$

因此 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$.

(Ⅲ)
$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{2},4\right)&=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}\\&=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}\\&=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}\\&=P\{-2\leqslant X<-1\}+P\left\{-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}\\&=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

注意 $P\{-2\leqslant X<-1\}=0$ 是因为当 $X<-1$ 时 $f_X(x)=0$.

几何学家惯于在困难的证明中用来达到结论的成百串的简单而容易的推理，使我想到：所有人们能够知道的东西，也同样是相互联系着的。

——笛卡尔

第五章　大数定律和中心极限定理

一、考试内容

切比雪夫不等式　切比雪夫大数定律　伯努利大数定律　辛钦大数定律　棣莫弗—拉普拉斯定理　列维—林德伯格定理

二、考试要求

1. 了解 切比雪夫不等式，切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律
棣莫弗—拉普拉斯定理和列维—林德伯格定理.
2. 会 用相关定理近似计算有关随机事件的概率.（仅数学三）

三、基本概念、基本理论和基本方法

（一）切比雪夫不等式和依概率收敛

（1）切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，总有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

（2）依概率收敛

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是一个随机变量序列，A 是一个常数，如果对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-A|<\varepsilon\}=1,$$

则称随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 依概率收敛于常数 A，记作 $X_n\xrightarrow{P}A$.

（二）大数定律

（1）切比雪夫大数定律

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为两两不相关的随机变量序列，其期望 $E(X_i)$ 与方差 $D(X_i)$ 均存在，且存在常数 C，使 $D(X_i)\leqslant C(i=1,2,\cdots)$，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

(2) 伯努利大数定律

设随机变量 $X_n \sim B(n,p)$，$n=1,2,\cdots$，则对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

(3) 辛钦大数定律

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，具有数学期望 $E(X_i)=\mu$，$i=1,2,\cdots$，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

（三）中心极限定理

(1) 棣莫弗 — 拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 $X_n \sim B(n,p)$ $(n=1,2,\cdots)$，则对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态的分布函数.

定理表明当 n 充分大时，服从 $B(n,p)$ 的随机变量 X_n 经标准化后得 $\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$，近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，或者说 X_n 近似地服从 $N(np,np(1-p))$.

(2) 列维 — 林德伯格中心极限定理

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，具有数学期望与方差，$E(X_n)=\mu$，$D(X_n)=\sigma^2$，$n=1,2,\cdots$，则对于任意实数 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

定理表明当 n 充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的标准化 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，或者说 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$.

本章小结	
	本章虽不是重点，但应该记住：
	(1) 切比雪夫不等式；
	(2) 切比雪夫大数定律和辛钦大数定律的条件和结论；
	(3) 列维 — 林德伯格中心极限定理的条件和结论.

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 5.1】 (2001)设随机变量 X 的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$______.

分析 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant \dfrac{D(X)}{2^2}=\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$.

答案应填$\dfrac{1}{2}$.

【例 5.2】 (2001)设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2,方差分别为 1 和 4,而相关系数为 -0.5,则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$______.

分析 由于 $E(X+Y)=0$,且

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$
$$=1+4-2\times 0.5\times 1\times 2=3,$$

所以 $P\{|X+Y-0|\geqslant 6\}\leqslant \dfrac{D(X+Y)}{6^2}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$.

答案应填$\dfrac{1}{12}$.

【评注】 切比雪夫不等式是对事件 $|X-E(X)|\geqslant\varepsilon$ 或事件 $|X-E(X)|<\varepsilon$ 的概率的一个估计,X 被估计的范围只是$(E(X)-\varepsilon,E(X)+\varepsilon)$ 或这区间以外的范围,而且这个估计只用到 X 的方差,因此估计比较粗略.

【例 5.3】 将一枚骰子重复掷 n 次,则当 $n\to\infty$ 时,n 次掷出点数的算术平均值依概率收敛于______.

分析 设 X_i 表示第 i 次掷得的点数,显然 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布,且 $E(X_i)=\dfrac{21}{6}=\dfrac{7}{2}$,因此,根据辛钦大数定律,算术平均值 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于数学期望$\dfrac{7}{2}$.

答案应填$\dfrac{7}{2}$.

【例 5.4】 (2005)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列,且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则有

学习笔记

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

解 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布,且 $E(X_n)=\dfrac{1}{\lambda},D(X_n)=\dfrac{1}{\lambda^2}$,则根据列维 — 林德伯格定理有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\cdot\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

答案应选(C).

【例 5.5】 (2020) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列,其中 $P\{X_i=0\}=P\{X_i=1\}=\dfrac{1}{2},i=1,2,\cdots.\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为

(A)$1-\Phi(1)$. (B)$\Phi(1)$. (C)$1-\Phi(0.2)$. (D)$\Phi(0.2)$.

解 X_i 独立同分布.

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,故 $EX_i=\dfrac{1}{2},DX_i=\dfrac{1}{4}$.

$E\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\right\}=100\cdot\dfrac{1}{2}=50,D\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\right\}=100\cdot\dfrac{1}{4}=25$.

根据中心极限定理 $\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从正态分布 $N(50,25)$,

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-50}{\sqrt{25}}\leqslant\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right\}=\Phi\left(\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right)$$
$$=\Phi(1).$$

答案应选(B).

第六章　数理统计的基本概念

一、考试内容

总体　个体　简单随机样本　统计量　样本均值　样本方差和样本矩　χ^2 分布　t 分布　F 分布　分位数　正态总体的常用抽样分布

经验分布函数(仅数学三要求)

二、考试要求

数学一

1. 理解 总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩.

2. 了解 χ^2 分布、t 分布和 F 分布及性质,上侧 α 分位数及查表计算,正态总体的常用抽样分布.

数学三

1. 了解 总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩.产生 χ^2 变量、t 变量和 F 变量的典型模式,标准正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布的上侧 α 分位数及查相应的数值表,经验分布函数和性质.

2. 掌握 正态总体的样本均值、样本方差、样本矩的抽样分布.

三、基本概念、基本理论和基本方法

(一)总体和样本

(1) 总体

定义　所研究对象的某项数量指标 X 的全体称为总体.总体中的每个元素称为个体.

(2) 样本

定义　$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都与总体 X 同分布,则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,简称为样本.n 为样本容量,样本的具体观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为样本值,或称总体 X 的 n 个独立观测值.

若 X 的分布为 $F(x)$,则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的分布为

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i).$$

若 X 有密度 $f(x)$,则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的密度为

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i).$$

若 X 的分布 $P\{X=a_j\}=p_j,j=1,2,\cdots$,则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的分布为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\},$$

其中 x_i 取 $a_1,a_2,\cdots$ 中的某一个数.

(二)统计量和样本数字特征

(1) 统计量 T

定义 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的不含未知参数的函数 $T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为统计量.

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值,则数值 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为统计量 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观测值.

(2) 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的数字特征

1) 样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$;

2) 样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

(3) 经验分布 $F_n(x)$(仅数学三要求)

定义 将样本的一个观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按大小递增次序排列,得到 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$,则 $F_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<x_{(1)},\\ \dfrac{k}{n}, & \text{当 } x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)},\quad k=1,2,\cdots,n-1,\\ 1, & \text{当 } x_{(n)}\leqslant x.\end{cases}$

(4) 样本数字特征的性质

1) 如果总体 X 有数学期望 $E(X)=\mu$,则 $E(\overline{X})=E(X)=\mu$.

2) 如果总体 X 有方差 $D(X)$,则 $D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}D(X),E(S^2)=D(X)$.

(三)常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布

(1) χ^2 分布

定义 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$,则称随机变量

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$$

服从自由度(或参数)为 n 的 χ^2 分布,记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

满足 X_i 相互独立,且 $X_i\sim N(0,1)$ 二条件的 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 称为 $\chi^2(n)$ 的典型模式.

(2) χ^2 分布的性质

1) 设 $\chi^2\sim\chi^2(n)$,对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$,称满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点,如图 6-1 所示.对不同的 α 和 n,$\chi^2_\alpha(n)$ 通常通过查表求得.

2) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则 $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

3) 设 $\chi^2_1 \sim \chi^2(n_1)$,$\chi^2_2 \sim \chi^2(n_2)$,且 χ^2_1 和 χ^2_2 相互独立,则 $\chi^2_1 + \chi^2_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

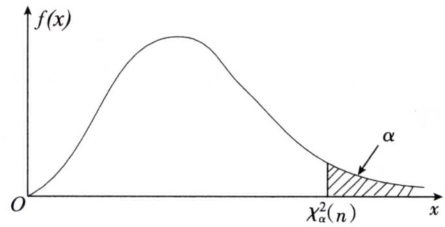


图 6-1

(3)t 分布

定义　设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $X \sim N(0,1)$,$Y \sim \chi^2(n)$,则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布,记作 $T \sim t(n)$.

满足 X,Y 独立,$X \sim N(0,1)$,$Y \sim \chi^2(n)$ 三条件的 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 称为 $t(n)$ 的典型模式.

(4)t 分布的性质

1)t 分布的概率密度 $f(x)$ 是偶函数,即 $f(x) = f(-x)$,且当 n 充分大时,$t(n)$ 分布近似于 $N(0,1)$ 分布.

2) 设 $T \sim t(n)$,对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$,称满足条件

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点.

3) 由于 $t(n)$ 分布的概率密度为偶函数,可知 t 分布的双侧 α 分位点 $t_{\alpha/2}(n)$,即

$$P\{|T| > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha.$$

如图 6-2 所示,显然 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.

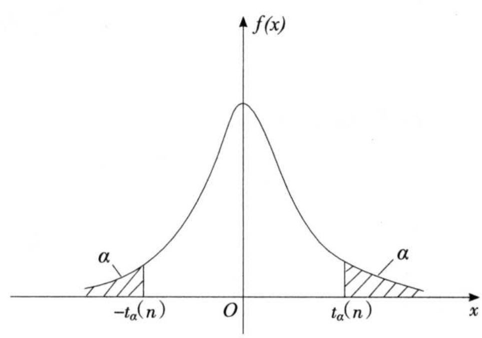


图 6-2

(5)F 分布

定义　设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $X \sim \chi^2(n_1)$,$Y \sim \chi^2(n_2)$,则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为(n_1, n_2) 的 F 分布,记作 $F \sim F(n_1, n_2)$,其中 n_1 和 n_2 分别称为第一自由度和第二自由度.

满足 X,Y 独立,$X \sim \chi^2(n_1)$,$Y \sim \chi^2(n_2)$ 三条件的 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 称为 $F(n_1, n_2)$ 的典型模式.

(6)F 分布的性质

1) 设 $F \sim F(n_1, n_2)$,对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$,称满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位点.

2) 如果 $F \sim F(n_1, n_2)$，则$\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$，且有

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

(7) 一个正态总体的抽样分布

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，则有

1) $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$；

2) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，且 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

3) $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$；

4) $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

(8) 两个正态总体的抽样分布

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是分别来自总体 X 和 Y 的样本且相互独立，样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$，样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2，则有

1) $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$，$U = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$；

2) 如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，则

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

其中 $S_\omega^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$；

3) $F = \dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

本章小结

本章涉及大量的数理统计基本概念，应该特别记住：

(1) 统计量 $\overline{X}$ 和 S^2，以及它们的性质，$E\overline{X} = EX$，$D\overline{X} = \dfrac{DX}{n}$ 和 $E(S^2) = DX$；

(2) 统计量 χ^2，t，F 的典型模式，以及它们主要性质，$E(\chi^2) = n$，$D(\chi^2) = 2n$，t 的密度为偶函数，$\dfrac{1}{F}$ 也是 F 分布；

(3) 一个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的抽样分布，$\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 6.1】 设总体 $X \sim E(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度 $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$ ______.

分析 总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$ 所以样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x_1, x_2, \cdots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

答案应填 $\begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x_1, x_2, \cdots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

【例 6.2】 设总体 X 服从参数为 p 的 0－1 分布，则来自总体 X 的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的概率分布为______.

分析 总体 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-p$	p

也可以将此概率分布表示成

$$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & \text{当 } x = 0 \text{ 或 } x = 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的概率分布可表示为

$$\begin{aligned} & p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ = & \prod_{i=1}^{n} p(x_i) \\ = & \begin{cases} p^{x_1+x_2+\cdots+x_n} (1-p)^{n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}, & x_1, x_2, \cdots, x_n = 0 \text{ 或 } 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

如果记 $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$，则答案应填

$$p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} p^{n\overline{x}} (1-p)^{n(1-\overline{x})}, & x_1, x_2, \cdots, x_n = 0 \text{ 或 } 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

【例 6.3】 设总体 $X \sim P(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本均值 $\overline{X}$ 的分布律为______.

分析 在第三章的例 3.17 中，我们得知，当 X_1, X_2 独立同为 $P(\lambda)$

学习笔记

分布时，$X_1+X_2\sim P(2\lambda)$，进一步不难得知：当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同为 $P(\lambda)$ 分布时，$\sum_{i=1}^{n}X_i=n\overline{X}\sim P(n\lambda)$. 于是，对于任意 $n>2$，得 $n\overline{X}$ 的分布律

$$P\{n\overline{X}=k\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

而 $P\{n\overline{X}=k\}=P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}$，所以

$$P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},k=0,1,2,\cdots.$$

答案应填 $P\left\{\overline{X}=\frac{k}{n}\right\}=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda},k=0,1,2,\cdots$.

【例 6.4】 已知 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则 $E(\chi^2)=$ ______.

分析 利用 χ^2 分布的随机变量的典型模式：

$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$，其中 $X_i\sim N(0,1)$ 且 X_i 相互独立.

$$\begin{aligned}E(\chi^2)&=E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)=E(X_1^2)+E(X_2^2)+\cdots+E(X_n^2)\\&=[DX_1+(EX_1)^2]+[DX_2+(EX_2)^2]+\cdots+\\&\quad[DX_n+(EX_n)^2]\\&=n,\end{aligned}$$

答案应填 n.

【例 6.5】 (1998) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，已知 $\chi^2=\frac{(X_1-2X_2)^2}{a}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{b}$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布，其中 a,b 为常数，则 $n=$ ______.

分析 X_1 和 X_2 相互独立且均服从正态 $N(0,2^2)$，故 X_1-2X_2 也服从正态.

$E(X_1-2X_2)=0,D(X_1-2X_2)=DX_1+4DX_2=20$,

所以 $\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$.

同理 $E(3X_3-4X_4)=0,D(3X_3-4X_4)=9DX_3+16DX_4=100$,

$\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}}\sim N(0,1)$.

因此，当选 $a=20$ 和 $b=100$ 时，χ^2 服从 $\chi^2(2)$ 分布.

答案应填 2.

学习笔记

【例 6.6】 (2018) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$，$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$.　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

(C) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$.　　(D) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$.

分析 显然 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，所以 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，已知 S^2 与 $\overline{X}$ 独立，

且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

根据 t 分布典型模式：$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

答案选(B).

【注】 本题应该直接背出答案(B).

【例 6.7】 (2005) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$.　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$.　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.

分析 $X_i\sim N(0,1)$，所以 $X_1^2\sim\chi^2(1)$.

$\sum_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$，且 X_1^2 与 $\sum_{i=2}^{n}X_i^2$ 相互独立，因此

$$\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2/n-1}=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i}\sim F(1,n-1).$$

答案应选(D).

【例 6.8】 设 X_1,X_2 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$，$\sigma>0$ 的简单随机样本，则统计量 $Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$ 服从分布

学习笔记

(A)$N(0,1)$.　(B)$\chi^2(1)$.　(C)$t(1)$.　(D)$F(1,1)$.

分析　X_1 与 X_2 相互独立，均服从 $N(0,\sigma^2)$，所以 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 和 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均服从 $N(0,1)$，且 (X_1,X_2) 是二维正态分布，从而 (X_1+X_2,X_1-X_2) 也是二维正态分布.

由于

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)&=E[(X_1+X_2)(X_1-X_2)]-E(X_1+X_2)E(X_1-X_2)\\&=E(X_1^2-X_2^2)-0\\&=EX_1^2-EX_2^2=0,\end{aligned}$$

所以 X_1+X_2 与 X_1-X_2 的相关系数 $\rho=0$，也就有 X_1+X_2 与 X_1-X_2 相互独立.

总之 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 相互独立，均服从 $N(0,1)$，因此

$$Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2=\frac{[(X_1+X_2)/\sqrt{2}\sigma]^2/1}{[(X_1-X_2)/\sqrt{2}\sigma]^2/1}\sim F(1,1).$$

答案应选(D).

【例 6.9】　已知 X_1,X_2,X_3 相互独立且服从 $N(0,\sigma^2)$，证明

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}\sim t(1).$$

分析　$t(1)$ 分布的典型模式为 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/1}}$，其中①$X\sim N(0,1)$；②$Y\sim\chi^2(1)$；③X 与 Y 独立. 要证明 $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}\sim t(1)$，只需将它表示满足 ①②③ 条件的典型模式.

证明　①$(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,3\sigma^2)$，

故 $\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1)$，令 $X=\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}$.

②$(X_2-X_3)\sim N(0,2\sigma^2)$，

则 $\left(\frac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，令 $Y=\left(\frac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$.

③ 根据例 6.8 的推导，X_2+X_3 与 X_2-X_3 相互独立，也就有 $X_1+X_2+X_3$ 与 X_2-X_3 相互独立，进一步就有 $X=\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}$ 与 $Y=\left(\frac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$ 相互独立，所以

学习笔记

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/1}}=\frac{(X_1+X_2+X_3)/\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{\left(\frac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\Big/1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}\sim t(1).$$

【例 6.10】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $D(S^2)=$ ________.

分析 正态总体的样本方差有性质：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，而 χ^2 分布有性质：$D(\chi^2(n))=2n$，所以 $D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$，即

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1).$$

答案应填 $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

【例 6.11】 (2001) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$. 从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$，其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 EY.

解 **方法一**：构造一个新的简单随机样本：

$$(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{2n}),$$

可视它为来自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$. 新样本均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}.$$

新样本方差为 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}Y$.

因此 $E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$，即 $EY=2(n-1)\sigma^2$.

方法二：记 $\overline{X}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$，显然有

$$\overline{X}'+\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}.$$

$$\begin{aligned}EY&=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\right]\\&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')+(X_{n+i}-\overline{X}'')]^2\right\}\\&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')^2+2(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')+(X_{n+i}-\overline{X}'')^2]\right\}\\&=(n-1)E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}')^2\right]+0+\end{aligned}$$

学习笔记

$$(n-1)E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i}-\overline{X}'')^2\right]$$
$$=(n-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2=2(n-1)\sigma^2.$$

【注】 这里有利用 $X_i-\overline{X}'$ 与 $X_{n+i}-\overline{X}''$ 相互独立($i=1,2,\cdots,n$)，从而 $E[(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')]=E(X_i-\overline{X}')E(X_{n+i}-\overline{X}'')=0\cdot 0=0$.

【例 6.12】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$.

求(Ⅰ)$E(Y)$；

(Ⅱ)$D(Y)$.

解 (Ⅰ)
$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\mu|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X-\mu|$$
$$=E|X-\mu|=\sigma E\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|$$
$$=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(\frac{t^2}{2}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

(Ⅱ)
$$D(Y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i-\mu|=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X-\mu|$$
$$=\frac{1}{n}D|X-\mu|=\frac{\sigma^2}{n}D\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}\left[E\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^2-\left(E\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\right)^2\right]$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}\left[E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2\right]$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}\left[D\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)-\frac{2}{\pi}\right]$$
$$=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}.$$

第七章　参数估计

一、考试内容

数学一	数学三
点估计　估计量与估计值　矩估计法　最大似然估计法　估计量的评选标准　区间估计　单个正态总体的均值和方差的区间估计　两个正态总体的均值差和方差比的区间估计	点估计　估计量与估计值　矩估计法　最大似然估计法

二、考试要求

数学一	数学三
1. 理解 参数的点估计、估计量与估计值、区间估计. **2. 了解** 估计量的无偏性、有效性和一致性. **3. 掌握** 矩估计法(一阶、二阶矩)和最大似然估计法. **4. 会** 验证估计量的无偏性、求单个正态总体的均值和方差的置信区间、求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间.	**1. 了解** 参数点估计、估计量与估计值. **2. 掌握** 矩估计法(一阶、二阶矩)和最大似然估计法.

三、基本概念、基本理论和基本方法

(一) 点估计

(1) 点估计

定义　用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构造的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 来估计未知参数 θ 称为点估计. 统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为估计量.

估计量是随机变量，它所取得的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为估计值. 有时将 θ 的估计量和估计值统称为 θ 的估计.

(2) 无偏估计量

定义 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量,如果 $E(\hat{\theta})=\theta$,则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的无偏估计量.

(3) 更有效估计量

定义 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量,且 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$,则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效,或 $\hat{\theta}_1$ 是比 $\hat{\theta}_2$ 更有效的估计量.

(4) 一致估计量

定义 设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量,如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ,则称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的一致估计量.

(二) 估计量的求法和区间估计

(1) 矩估计法

定义 用样本矩估计相应的总体矩,用样本矩的函数估计总体矩相应的函数,然后求出要估计的参数,称这种估计法为矩估计法.

(2) 矩估计法步骤

设总体 X 的分布含有未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$,$\alpha_l=E(X^l)$ 存在,显然它是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数,记作 $\alpha_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$,$l=1,2,\cdots,k$. 样本的 l 阶原点矩为 $A_l=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^l$. 令

$$\alpha_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_l,l=1,2,\cdots,k.$$

从这 k 个方程组中,可以解得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$.

矩估计法不需要知道总体的具体分布数学形式,只要知道各阶矩存在.

如果不用原点矩,而用中心矩也可以求解:用样本中心矩等于总体中心矩来建立方程组.

求 k 个参数的估计一般就列出一阶矩到 k 阶矩的方程. 考试大纲只要求最多两个参数的估计,故一般最多两个方程.

设 $g(\alpha_1,\alpha_2)$ 是一阶矩 α_1 和二阶矩 α_2 的函数,而 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ 分别为 α_1 和 α_2 的矩估计,则 $g(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)$ 就是 $g(\alpha_1,\alpha_2)$ 的矩估计.

(3) 最大似然估计法

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本值,θ 是待估参数.

1) 似然函数

定义 对于离散型总体 X,设其概率分布为 $P\{X=a_i\}=p(a_i;\theta)$,$i=1,2,\cdots$,称函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

为参数 θ 的似然函数.

对于连续型总体 X,概率密度为 $f(x;\theta)$,则称函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

为参数 θ 的似然函数.

2）最大似然估计法

定义　对于给定的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ 达到最大值的参数值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为未知参数 θ 的最大似然估计值，相应的 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量. 一般统称为 θ 的最大似然估计. 称这种估计法为最大似然估计法.

（4）最大似然估计法步骤

如果 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微，值 $\hat{\theta}$ 往往可以从方程

$$\frac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0 \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$$

中求解，称这两个方程为似然方程.

如果要估计的参数是两个，θ_1 和 θ_2，则得似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_1}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_2}=0,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_1}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_2}=0.\end{cases}$$

解这两个方程组，可以得到 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$.

有时，使 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 达到最大值的 $\hat{\theta}$ 不一定是 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 的驻点，这时不能用似然方程来求解，应采用其他方法求最大似然估计.

（5）区间估计

1）置信区间

定义　设 θ 是总体 X 的未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果两个统计量满足

$$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 (θ_1,θ_2) 为参数 θ 的置信水平（或置信度）为 $1-\alpha$ 的置信区间（或区间估计），简称为 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间，θ_1 和 θ_2 分别称为置信下限和置信上限.

2）一个正态总体参数的区间估计

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差. 下表列出了 μ 和 σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间.

表 1

未知参数		$1-\alpha$ 置信区间
μ	σ^2 已知	$\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
	σ^2 未知	$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$
σ^2		$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

3）两个正态总体参数的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的样本. $\overline{X},S_1^2,\overline{Y},S_2^2$ 是相应的样本均值和样本方差，且

$$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

下表列出了 $\mu_1-\mu_2$ 和$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 $1-\alpha$ 置信区间.

表 2

未知参数		$1-\alpha$ 置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
	σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\right.$ $\left.\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$		$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\right)$

本章小结

本章是数理统计的重点. 数理统计的考题大多都集中在这部分，尤其是矩估计和最大似然估计更是常考内容. 应该重点掌握：

(1) 统计量数学期望(数学一常考无偏估计)；

(2) 矩估计法和最大似然估计法.

一个数学真理本身既不简单也不复杂，它就是它。

——埃米尔·勒姆瓦纳

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 7.1】 (2009) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，记统计量 $T = \overline{X} - S^2$，则 $ET =$ ________.

分析
$$E(\overline{X} - S^2) = E\overline{X} - ES^2 = np - np(1-p)$$
$$= np[1-(1-p)] = np^2.$$

答案应填 np^2.

【例 7.2】 (2009) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k =$ ________.

分析 $\overline{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计，即 $E(\overline{X} + kS^2) = np^2$.
$$E(\overline{X} + kS^2) = E(\overline{X}) + kE(S^2) = np + knp(1-p)$$
$$= np[1 + k(1-p)] = np^2,$$
所以 $1 + k(1-p) = p$，解得 $k = -1$.

答案应填 -1.

【评注】 例 7.1 是数学三的考题，得分率为 0.437. 例 7.2 是同年数学一的考题，得分率为 0.413. 两题所考内容相似，只是数学三不考无偏估计，就改成直接求期望，所以数学三考生可将数学一的无偏估计的例题改成直接求数学期望来做.

【例 7.3】 (2005) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\overline{x} = 20(\text{cm})$，样本标准差 $S = 1(\text{cm})$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$.

(B) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$.

(D) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$.

分析 正态总体方差未知时，关于期望值 μ 的置信区间公式为
$$\left(\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),$$
其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 满足 $P\{|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha, T \sim t(n-1)$.

学习笔记

本题 $n=16,\overline{x}=20,S=1,\alpha=1-0.90=0.10,t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(15)$.

答案应选(C).

【例 7.4】 (2008) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)求 ET;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT.

解 (Ⅰ)$ET=E\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}ES^2$

$$=D(\overline{X})+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}\sigma^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2.$$

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$,所以 $\dfrac{\overline{X}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}\,\overline{X}\sim N(0,1)$,即 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$.又 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$,且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立,$D(\chi^2(n))=2n$,故

$$DT=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}DS^2$$

$$=\frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2(n-1)^2}D[(n-1)S^2]$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2(n-1)^2}\cdot 2(n-1)$$

$$=\frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}.$$

【例 7.5】 (2002) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数,利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

学习笔记

解 **矩估计值**

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)$$
$$=3-4\theta,$$

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2.$$

令 $E(X)=\bar{x}$，即 $3-4\theta=2$，解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

最大似然估计值　对于给定的样本值，似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$
$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$. 因 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$ 不合题意，所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

【例 7.6】　(2006) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数. 求

(Ⅰ) θ 的矩估计；

(Ⅱ) θ 的最大似然估计.

解 (Ⅰ) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1\theta x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(1-\theta)x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}(1-\theta)=\frac{3}{2}-\theta.$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$，解得 $\theta=\frac{3}{2}-\overline{X}$.

所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$.

(Ⅱ) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数为 N 个，则大于等于 1 的个数必为 $(n-N)$ 个. 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N},$$
$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta),$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}.$$

学习笔记

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得$\theta=\dfrac{N}{n}$.

显然$\theta=\dfrac{N}{n}$时，$L(\theta)$最大. 所以θ的最大似然估计为$\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

【评注】 例7.6得分率0.42，例7.7得分率0.397.

【例7.7】 (2010) 设总体X的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数$\theta\in(0,1)$未知，以N_i表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数($i=1,2,3$). 试求常数a_1,a_2,a_3，使$T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$为$\theta$的无偏估计量，并求$T$的方差.

解 无偏估计要求$ET=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iEN_i=\theta$.

N_i是样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$中取i值的个数. 如果把样本中每个X_j取i值看成是试验成功，X_j不取i值看成是试验失败，则样本的n个分量可看成是n重伯努利试验. 如果出现i的概率为p_i，则$N_i\sim B(n,p_i)$，$i=1,2,3$. 这时$EN_i=np_i$，$DN_i=np_i(1-p_i)$.

记$p_1=1-\theta$，$p_2=\theta-\theta^2$，$p_3=\theta^2$，则$N_i\sim B(n,p_i)$，$i=1,2,3$.

$$ET=\sum_{i=1}^{3}a_iEN_i=\sum_{i=1}^{3}a_inp_i=n[a_1(1-\theta)+a_2(\theta-\theta^2)+a_3\theta^2].$$

要使T是θ的无偏估计量，则有

$$\begin{aligned}n[a_1(1-\theta)+a_2(\theta-\theta^2)+a_3\theta^2]&=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2\\&=\theta,\end{aligned}$$

故$\begin{cases}a_1=0,\\ a_2-a_1=\dfrac{1}{n},\\ a_3-a_2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=0,\\ a_2=\dfrac{1}{n},\\ a_3=\dfrac{1}{n},\end{cases}$此时$T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$为$\theta$的无偏估计.

这时，$T=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)$. 由于$N_1+N_2+N_3=n$，故

$$T=\frac{1}{n}(N_2+N_3)=\frac{1}{n}(n-N_1)=1-\frac{N_1}{n}.$$

注意到$N_1\sim B(n,1-\theta)$，所以

$$DT=D\left(1-\frac{N_1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}DN_1=\frac{n(1-\theta)\theta}{n^2}=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

学习笔记

【例 7.8】 (2017) 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ) 求 Z_1 的概率密度；

(Ⅱ) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(Ⅲ) 求 σ 的最大似然估计量.

分析 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 已知，$Z_i=|X_i-\mu|$，$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 可以理解为来自总体 Z 的简单随机样本. Z_1 的密度就是 Z 的密度 $f_Z(z)$.

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，只要求出 $F_Z(z)$，则 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

(Ⅰ)Z_1 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅱ)$f_Z(z)$ 为 σ 的函数，令 $EZ=\overline{Z}$，其中 $\overline{Z}=\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$，就可以求出 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1$；

(Ⅲ) 用 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}f_Z(z_i)$ 对 σ 求最大值，解出 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2$.

解 (Ⅰ)Z 的分布：

$$
\begin{aligned}
z\geqslant 0\text{ 时},F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X_1-\mu|\leqslant z\}\\
&=P\{-z\leqslant X_1-\mu\leqslant z\}\\
&=P\left\{-\frac{z}{\sigma}\leqslant\frac{X_1-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{z}{\sigma}\right\}\\
&=P\left\{-\frac{z}{\sigma}<\frac{X_1-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{z}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)\\
&=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1.
\end{aligned}
$$

$z<0$ 时，$F_Z(z)=0$.

$$
f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right), & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}
$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数，即 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

$$
\begin{aligned}
(\text{Ⅱ})EZ&=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}\frac{2z}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}z=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}\left(\frac{z}{\sigma}\right)\\
&=2\sigma\int_0^{+\infty}t\varphi(t)\mathrm{d}t=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.
\end{aligned}
$$

学习笔记

令 $EZ=\overline{Z}$，即 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma=\overline{Z}$，解得 $\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{Z}$.

(Ⅲ) $L=\prod_{i=1}^{n}f_Z(z_i)=\begin{cases}\frac{2^n}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{z_i}{\sigma}\right), & z_1,z_2,\cdots,z_n\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{2^n}{\sigma^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{2\sigma^2}}, & z_1,z_2,\cdots,z_n\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $z_1,z_2,\cdots,z_n\geqslant 0$ 时，$\ln L=n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{2\sigma^2}$，

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=-n\cdot\frac{1}{\sigma}-\sum_{i=1}^{n}z_i^2\cdot\frac{(-2)}{2\sigma^3}=0$，即 $n\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，解得

$$\hat{\sigma}_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}.$$

芝诺的悖论

一、二分法悖论

运动是不可能的，因为运动的物体在到达目的地之前必须到达路程的中间点，而在它到达中间点之前，它又必须到达路程的四分之一点，如此下去没有穷尽。

第八章　假设检验

（仅数学一要求）

一、考试内容

显著性检验　假设检验的两类错误　单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验

二、考试要求

1. 理解 显著性检验的基本思想.

2. 了解 假设检验可能产生的两类错误.

3. 掌握 假设检验的基本步骤，单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验.

三、基本概念、基本理论和基本方法

（一）实际推断原理

小概率事件在一次试验中实际上是不会发生的，实际推断原理又称小概率原理.

（二）假设检验

(1) 假设是指关于总体的论断或命题，常用字母"H"表示. 假设分为基本假设 H_0（又称原假设，零假设）和备选假设（又称备择假设，对立假设）. 还可将假设分为参数假设和非参数假设，参数假设是指已知总体分布函数形式，对其中未知参数的假设，其他的假设就是非参数假设. 也可将假设分为简单假设和复合假设，完全决定总体分布的假设为简单假设，否则为复合假设.

(2) 假设检验：根据样本，按照一定规则判断所做假设 H_0 的真伪，并作出接受还是拒绝接受 H_0 的决定.

（三）两类错误

拒绝实际真的假设 H_0（弃真）称为第一类错误.

接受实际不真的假设 H_0（纳伪）称为第二类错误.

（四）显著性检验

(1) **显著性水平**：在假设检验中允许犯第一类错误的概率，记为 $\alpha(0<\alpha<1)$，则 α 称为检

验的显著水平或检验水平，它表现了对 H_0 弃真的控制程度，一般 α 取 0.1，0.05，0.01，0.001 等值.

(2) **显著性检验**：只控制第一类错误概率 α 的统计检验，称为显著性检验.

(3) **显著性检验的一般步骤**

1）根据问题要求提出原假设 H_0；

2）给出显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1)$；

3）确定检验统计量及拒绝域形式；

4）按犯第一类错误的概率等于 α 求出拒绝域 W；

5）根据样本值计算检验统计量 T 的观测值 t，当 $t\in W$ 时，拒绝原假设 H_0；否则，接受原假设 H_0.

（五）正态总体参数的假设检验

设显著性水平为 α，单个正态总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的参数的假设检验以及两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的 $\mu_1-\mu_2$ 和 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的假设检验，列表如下：

检验参数	情形	假设 H_0	假设 H_1	检验统计量	H_0 为真时检验统计量的分布	拒绝域
μ	σ^2 已知	$\mu=\mu_0$ $\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\|U\|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U\geqslant u_\alpha$ $U\leqslant -u_\alpha$
	σ^2 未知	$\mu=\mu_0$ $\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\|T\|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $T\geqslant t_\alpha(n-1)$ $T\leqslant -t_\alpha(n-1)$
σ^2	μ 已知	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$
	μ 未知	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_1-\mu_2=\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\leqslant\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\mu_0$	$\mu_1-\mu_2\neq\mu_0$ $\mu_1-\mu_2>\mu_0$ $\mu_1-\mu_2<\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\|U\|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U\geqslant u_\alpha$ $U\leqslant -u_\alpha$
	σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\mu_1-\mu_2=\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\leqslant\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\mu_0$	$\mu_1-\mu_2\neq\mu_0$ $\mu_1-\mu_2>\mu_0$ $\mu_1-\mu_2<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_0}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\|T\|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ $T\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $T\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

检验参数	情形	假设 H_0	假设 H_1	检验统计量	H_0 为真时检验统计量的分布	拒绝域
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	μ_1, μ_2 已知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \dfrac{n_2 \sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum\limits_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2}$	$F(n_1, n_2)$	$F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 或 $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ $F \geqslant F_{\alpha}(n_1, n_2)$ $F \leqslant F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
	μ_1, μ_2 未知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $F \geqslant F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $F \leqslant F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

表中 $S_\omega = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

本章小结　假设检验是考题中较少涉及的一章．重点关注显著性检验基本思想、检验的基本步骤，两类错误等概念．

芝诺的悖论

二、阿基里斯悖论

奔跑中的阿基里斯永远也不能超过他前面慢慢爬行的乌龟，因为他必须首先到达乌龟的出发点，而当他到达那一点时，乌龟又向前爬了，所以仍在他前面。重复下去，乌龟总是在前面。

学习笔记

四、典型例题分析选讲

【例 8.1】 (2021) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本,考虑假设检验问题:$H_0:\mu \leqslant 10, H_1:\mu > 10$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}>11\}$,其中 $\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$,则 $\mu=11.5$ 时,该检验犯第二类错误的概率为

(A) $1-\Phi(0.5)$.　　(B) $1-\Phi(1)$.

(C) $1-\Phi(1.5)$.　　(D) $1-\Phi(2)$.

分析 假设检验犯第二类错误:接受实际不真的假设 H_0 所犯的错误,其概率为 β.

现 $X \sim N(\mu,4), \mu=11.5$,即 $X \sim N(11.5,4)$. 而 $\overline{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ 即 $\overline{X} \sim N\left(11.5,\frac{1}{4}\right)$.

$$\beta = P\{\overline{X} \leqslant 11\} = P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{11-11.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}} \leqslant -1\right\} = \Phi(-1) = 1-\Phi(1),$$

答案选(B).

【例 8.2】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单样本,其中 μ,σ^2 未知,记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Q^2=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2$,则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量 $T=$ ________.

分析 σ^2 未知,$H_0:\mu=0$ 时,用统计量 $T=\frac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}}$,其中

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{Q^2}{n-1}},$$

所以

$$T=\frac{\overline{X}}{\sqrt{\frac{Q^2}{n-1}}\Big/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q}.$$

学习笔记

答案应填$\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

【例 8.3】（1998）设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机的抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩 66.5 分，标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附表：t 分布表 $P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$

$t_p(n)$ \ p / n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

解 设该次考试的考生成绩为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现抽取了容量为 36 的样本. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0:\mu=70$；$H_1:\mu\neq 70$，

由于 σ^2 未知，用 t 检验，选用统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1).$$

现 $\mu=70$，$n=36$，$\bar{x}=66.5$，$S=15$，$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301$.

拒绝域为　$|t|=\dfrac{|\bar{x}-70|}{S}\sqrt{36}\geqslant 2.0301$.

现 $|t|=\dfrac{|66.5-70|}{15}\sqrt{36}=1.4<2.0301$，所以接受 H_0.

在显著性水平为 0.05 下，可以认为平均成绩为 70 分.

【例 8.4】（2018）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 据此样本检验：假设 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

学习笔记

(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0.

分析 检验水平 α 为检验犯第一类错误的概率，即当 H_0 为真的条件下，作出拒绝 H_0 而犯错误的概率. 显然如果 α 变小时，拒绝 H_0 的范围应变小，接受 H_0 的范围应变大. 所以，在 $\alpha = 0.05$ 条件下接受 H_0，则在 $\alpha = 0.01$ 条件下必接受 H_0. 答案应选(D).

芝诺的悖论

三、飞箭悖论

飞箭在任何瞬间都是既非静止也非运动的。如果瞬刻是不可分的，箭就不能运动。因为如果他动了，瞬刻立即就是可分的了。但是时间是由瞬刻组成的，如果箭在任一瞬刻都不动，它在任何时间内也不动。

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020 年 3 月
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020 年 6 月
数学基础过关 660 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020 年 8 月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020 年 10 月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020 年 12 月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 1 月
数学强化通关 330 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 2 月
高等数学辅导讲义	刘喜波　曹显兵	2021 年 2 月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021 年 2 月
高等数学解题密码·选填题	武忠祥	2021 年 6 月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021 年 2 月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021 年 2 月
线性代数满分过关 150	姜晓千	2021 年 4 月
概率论与数理统计满分过关 150	姜晓千	2021 年 7 月
数学压轴大题满分过关 150	姜晓千	2021 年 9 月
数学核心知识点乱序高效记忆手册	宋浩	2021 年 9 月
数学决胜冲刺 6 套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 10 月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 10 月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021 年 4 月
经济类联考数学通关无忧题	薛威	2021 年 4 月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021 年 4 月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018 年 12 月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021 年 5 月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021 年 5 月

线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治高分秘训 900 题	桑宏斌	2021 年 5 月
考研政治冲刺密押题	全国考研政治金榜命题研究中心	2021 年 11 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语阅读理解精雕细刻 80 篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2021 年 4 月
考研词伙	李超	2019 年 3 月
考研句伙	李超	2019 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2021 年 2 月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020 年 12 月
考研英语写作精讲笔记	白子墨	2021 年 6 月
词维风暴	娄晗	2019 年 9 月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2021 年 2 月
考研英语核心词汇	赵亮 高维	2021 年 7 月
考研英语词汇通关“密”籍	许密杉	2021 年 5 月
考研英语阅读通关“密”籍	许密杉	2021 年 6 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
写作复习指南	房文学	2021 年 1 月
逻辑复习指南	房文学	2021 年 3 月

逻辑精练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题全解	房文学	2021 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
国家临床执业及助理医师资格考试抢分速记定心丸	高鑫	2021 年 3 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

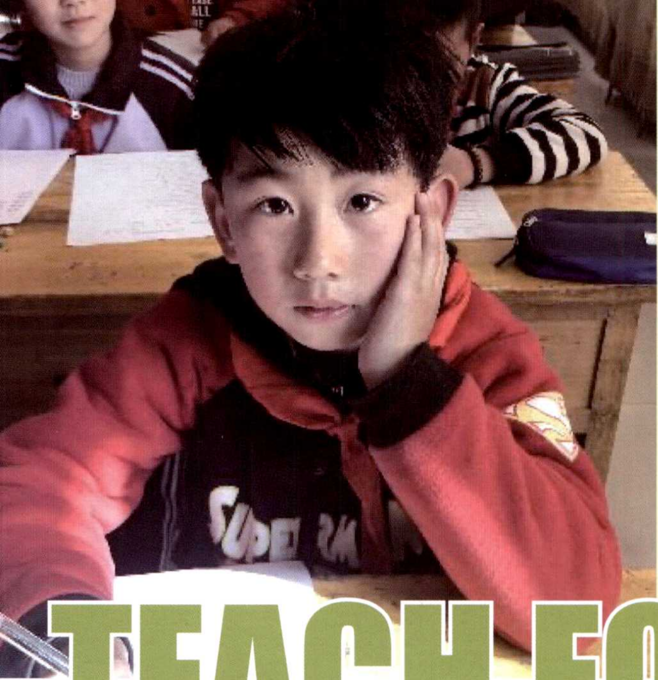
考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 9 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

以上图书书名及出版时间仅供参考，以实际出版物为准，均属金榜时代（北京）教育科技有限公司！



乡 村 艺 术 Ke 梦 想 社

音体美教师
志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代

TEACH FOR CHINA

招 募 ： 乡 村 小 学 音 体 美 青 年 教 师 志 愿 者

项目简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2021乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你对社会公益的理解，参加本次活动的原因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）

金榜时代 考研数学系列

书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年2月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年2月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年2月	强化提高
数学强化通关330题	2021年2月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210013

微信扫一扫
解锁更多精彩内容

关注作者团队微博
与名师一起互动交流

责任编辑 / 吕睿

ISBN 978-7-109-27953-7

9 787109 279537 >

定价：59.80元