

# 理论攻坚-数学运算 1

(讲义+笔记)

主讲教师：赵艳婷

授课时间：2021.01.23



粉笔公考·官方微信

## 理论攻坚-数学运算 1（讲义）

### 第一节 工程问题

#### 一、给完工时间型

特征：给多个完成时间

方法：

1. 赋工作量（时间的公倍数）
2. 计算效率（效率=工作量/时间）
3. 列方程求解

【例 1】一批零件，由甲单独制作需要 12 天，甲、乙两人合作则只需要 8 天。如果这批零件由乙单独制作，则需要（ ）天。

- A. 16                                      B. 18  
C. 20                                      D. 24

【例 2】单独完成某项工程，甲、乙、丙三人分别需 10 小时、15 小时、20 小时，开始三人一起干，后来因工作需要，甲中途调走了，结果共用了 6 小时完成了这项工作。那么，甲实际工作了（ ）小时。

- A. 2                                        B. 4  
C. 5                                        D. 3

#### 二、给效率比例型

特征：给多个效率的比例关系

方法：

1. 赋效率（按比例赋值）
2. 计算工作量（工作量=效率\*时间）
3. 列方程求解

【例 3】小王和小李一起录入信息，小王比小李晚一天开始工作，且两人同时结束。已知小王的速度是小李的 1.2 倍，小李工作了 6 天。问若小王一个人完

成这项工作，需要多少天？

- A. 8 天
- B. 10 天
- C. 12 天
- D. 14 天

【例 4】某片麦田，需要 4 台同型号收割机共同工作 8 天才能完成。收割完一半后，有两台收割机出现故障，维修 2 天后继续投入使用，问最终完成整片麦田收割一共用了多少天？

- A. 9
- B. 10
- C. 11
- D. 12

### 三、给具体数值型

特征：给效率的具体值或工作总量的具体值

方法：方程法

【例 5】加工一批零件，原计划每天加工 100 个。正好按期完成任务。由于改进了生产技术和工艺，实际每天加工了 120 个，这样，不仅提前 3 天完成加工任务，而且还多加工了 40 个。他们原计划加工（ ）零件。

- A. 1600 个
- B. 1800 个
- C. 2000 个
- D. 2200 个

### 四、牛吃草问题

特征：有消耗有增加；有相同句型。

公式：原有草量=（牛数-草生长的量）\*时间。

简写为： $y = (N * 1 - x) * T$ 。

【例 6】一牧场上的青草每天都匀速生长。这片青草可供 27 头牛吃 6 周，或供 23 头牛吃 9 周。那么可供 21 头牛吃几周？

- A. 8
- B. 10
- C. 12
- D. 14

【例 7】榨汁机均匀地向一只大桶注入果汁，同时有 24 根相同的过滤管排出果汁，若不计杂质，6 小时即可把桶中的果汁排干；若改用 21 根过滤管，8 小时可将桶中的果汁排干。现用 16 根过滤管，（ ）小时可将桶中的果汁排干。

- A. 17  
B. 19  
C. 18  
D. 20

## 第二节 行程问题

### 一、基础行程

1. 利用公式直接运算：路程=速度\*时间。

2. 火车过桥：路程=桥长+火车长。

【例 1】甲、乙两人从 A 地同时开车前往 120 公里外的 B 地去旅游，结果乙比甲提前 1 小时到达 B 地。已知甲比乙每小时少行 10 公里，则甲的速度为（ ）。

- A. 30 公里/小时  
B. 40 公里/小时  
C. 20 公里/小时  
D. 50 公里/小时

【例 2】列车驶过长 400 米的隧道，从车头进入隧道到车尾离开隧道共用了 20 秒，接着列车又驶过长 1120 米的铁路桥，从车头上桥到车尾离开桥共用了 50 秒。假设列车全程匀速行驶，则其车身长为（ ）。

- A. 80 米  
B. 120 米  
C. 100 米  
D. 60 米

### 二、流水行船

- 顺水速度=船速+水速。

逆水速度=船速-水速。

船速=（顺水速度+逆水速度）/2。

水速=（顺水速度-逆水速度）/2。

【例 3】甲、乙两地为沿河城市，相距 120 公里，甲地位于上游，乙地位于

下游，由于受水流速度影响，轮船往返于甲、乙两地的时间分别为 5 小时和 6 小时，问轮船在静水中的速度为每小时多少公里？（ ）

- A. 16
- B. 18
- C. 20
- D. 22

### 三、相遇追及

1. 相遇：同时出发，相向而行。

路程和（相遇距离）=（大速度+小速度）\*相遇时间。

2. 追及：同时出发，同向而行。

路程差（追及距离）=（大速度-小速度）\*追及时间。

3. 环形：相遇 N 次，路程和为 N 圈；追及 N 次，路程差为 N 圈。

【例 4】甲、乙两列火车同时从相距 147 千米的两个车站出发相向而行，经过 45 分钟后相遇，如果甲火车的速度是乙火车速度的  $\frac{4}{3}$  倍，那么甲、乙两火车的速度差是每小时（ ）。

- A. 28 千米
- B. 30 千米
- C. 24 千米
- D. 32 千米

【例 5】从 A 地到 B 地的距离为 24 千米，甲、乙两人骑自行车从 A 地出发到 B 地。其中甲从早上 8 点出发，骑自行车的速度为 0.4 千米/分钟；25 分钟以后，乙骑自行车，用 0.6 千米/分钟的速度追甲，（ ）乙追上甲。

- A. 9 点 10 分
- B. 9 点 15 分
- C. 9 点 25 分
- D. 追不上

【例 6】小明与小强一起参加 5000 米长跑比赛，比赛场地为 500 米的环形跑场。两人从同一起点出发，已知小明到达终点花费的时间是 20 分钟，小强则需要 25 分钟。假设两人均是匀速前进，则在比赛过程中，除起跑外，两人可以相遇（ ）。

- A. 0 次
- B. 1 次
- C. 2 次
- D. 3 次

### 第三节 经济利润问题

#### 一、基础经济

1. 特征：有成本、售价、利润、利润率。
2. 方法：方程法、赋值法（题目中没有给带单位的具体数值）。
3. 技巧：列表。
4. 公式：  
利润=售价-成本、利润率=利润/成本=（售价-成本）/成本、  
售价=成本\*（1+利润率）、成本=售价/（1+利润率）、  
总钱数=单件钱数\*数量、售价=定价×折扣。

【例 1】李经理的年薪较三年前涨了 50%，他拿出年薪的 20% 捐给儿童福利院，又将剩余部分的 5% 孝敬父母，发现余下部分与三年前的年薪相比还多了 7 万元，则李经理三年前的年薪是（ ）万元。

- |       |       |
|-------|-------|
| A. 42 | B. 58 |
| C. 50 | D. 66 |

【例 2】某商铺批发了小熊和小狗两种毛绒玩具，已知，毛绒小熊的进价比毛绒小狗便宜 25%，商家按进价 30% 的利润给毛绒小熊定价，按进价 20% 的利润给毛绒小狗定价，则毛绒小狗定价比毛绒小熊定价高 36 元，那么毛绒小狗的定价是（ ）元。

- |        |        |
|--------|--------|
| A. 160 | B. 172 |
| C. 186 | D. 192 |

【例 3】小张收购一台手机，然后转手卖出，赚取了 30% 的利润。一星期后，客户要求退货，小张和客户达成协议，以当时交易价格的 90% 回收了这台手机，后来小张又以最初的收购价格将其卖出。小张在这台手机交易中的利润率是（ ）。

- |        |        |
|--------|--------|
| A. 27% | B. 20% |
| C. 17% | D. 13% |



## 理论攻坚-数学运算 1（笔记）

【注意】说在课前：

1. 课程时长 2.5h，课间休息一次。可能根据同学的情况进行，如果基础薄弱，可能会稍微有点拖堂。
2. 方法精讲是打基础、懂套路、学方法。
3. 听懂打 1，不懂打 0。每题讲完会有梳理，每节讲完会有总结。
4. 某道题没跟上，记下时间节点听回放，先跟上老师的节奏。
5. 互相尊重、和谐课堂。
6. 下节课提前 15 分钟答疑。
7. 注：本课程无限次回放（下课 10 分钟左右即可回放）。
8. 课程安排：1 月 23 日下午：数学运算一，工程问题、行程问题、经济利润，对应讲义 338 页。1 月 23 日晚上：数学运算二，计算问题、几何问题、排列组合与概率。考情：数量关系 10 题（数推 3 题，数运 7 题），资料分析 15 题。数字推理是明天下午讲解。

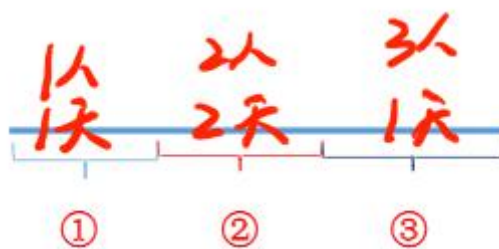
### 第一节 工程问题

【知识点】工程问题：出现频率高，难度不大，性价比较高。

1. 三量关系：总量=效率\*时间。 $W=P*t$ ，
2. 考查题型：套路性强，按照方法套用即可。
  - （1）给完工时间型。
  - （2）给效率比例型。
  - （3）给具体单位型。
  - （4）牛吃草。
3. 总量=效率\*时间，分析工作总量的由来。
  - （1）分时间段： $W=W①+W②+W③$ 。第一个时间段 1 个人只干了 1 天，第二个



阶段 2 人干了 2 天，第三个阶段 3 人干了 1 天，比较复杂的情况可以画图表示，三个时间段加和完成。



(2) 分人:  $W = W_{\text{甲}} + W_{\text{乙}} + W_{\text{丙}}$ 。

①  $t$  不同:  $W = P_{\text{甲}} * t_{\text{甲}} + P_{\text{乙}} * t_{\text{乙}} + P_{\text{丙}} * t_{\text{丙}}$ 。

②  $t$  相同:  $W = (P_{\text{甲}} + P_{\text{乙}} + P_{\text{丙}}) * t = P_{\text{和}} * t$ 。

4. 给完工时间型 (给出多个完工时间  $\geq 2$  个):

(1) 赋总量 (完工时间的公倍数)。

(2) 算效率: 效率 = 总量 / 时间。

(3) 根据工作过程列式计算。

(4) 例: 完成一项工作, 甲需要 4 小时, 乙需要 6 小时, 现甲乙合作需要多久完成?

答: 给了两个完工时间 (4、6), (1) 设工作总量为  $W$ 。(2) 甲效率为  $W/4$ , 乙效率为  $W/6$ 。(3) 求时间,  $t = W \div [(W/4) + (W/6)]$ 。分子、分母都有  $W$ ,  $W$  的取值对结果没有影响, 越简单越好,  $W/4$  和  $W/6$  是整数, 赋值效率为 4 和 6 的公倍数 12。甲效率为  $12/4=3$ , 乙效率  $=12/6=2$ 。 $t = 12 / (3+2) = 12/5 = 2.4$ 。

5. 最小公倍数 (短除法——分解到两两互质为止), 互质: 除了 1 以外, 没有其他公因数。

(1) 12、18 的公因数是 2, 12 除完后剩余 6, 18 除完以后剩余 9, 6、9 的公因数是 3, 除后剩余 2、3, 2 和 3 互质, 除了 1 之外没有其他公因数, 将外围的数相乘为  $2*3*2*3=36$ 。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 12} \quad 18 \\
 \underline{2} \quad 9 \\
 2 \quad 9 \\
 \underline{2} \quad 9 \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

$2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$

(2) 12、18 的公因数是 3，除后剩余 4、6，再除以 2，剩余 2、3， $3 \times 2 \times 2 \times 3$ 。

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 12} \quad 18 \\
 \underline{3} \quad 6 \\
 2 \overline{) 4} \quad 6 \\
 \underline{2} \quad 3 \\
 2 \quad 3
 \end{array}$$

(2) 12、18、27 的公因数是 3，除后剩余 4、6、9，没有 3 个数共同的公因数，可以两两找。4、6 的公因数是 2，剩余 2、3、9，3、9 有公因子，剩余 2、1、3，剩余数互质，将外围相乘得到  $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 36 \times 3 = 108$ 。

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 12} \quad 18 \quad 27 \\
 \underline{3} \quad 6 \quad 9 \\
 2 \overline{) 4} \quad 6 \quad 9 \\
 \underline{2} \quad 3 \quad 3 \\
 3 \overline{) 2} \quad 3 \quad 3 \\
 \underline{3} \quad 1 \quad 1 \\
 2 \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

$3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3$

【例 1】一批零件，由甲单独制作需要 12 天，甲、乙两人合作则只需要 8 天。如果这批零件由乙单独制作，则需要（ ）天。

A. 16

B. 18

C. 20

D. 24

【解析】例 1. 有两个时间，都是完工时间。属于给完工时间型。（1）赋总量 12、8 的公倍数为 24，或者用短除法， $4 \times 3 \times 2 = 24$ 。（2）甲效率： $24/12=2$ ，甲+乙的效率= $24/8=3$ ，乙效率= $3-2=1$ 。（3）列式： $t_{乙}=24/1=24$ 。【选 D】

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 12 \quad 8} \\ \times 3 \times 2 = 24 \end{array}$$

【例 2】单独完成某项工程，甲、乙、丙三人分别需 10 小时、15 小时、20 小时，开始三人一起干，后来因工作需要，甲中途调走了，结果共用了 6 小时完成了这项工作。那么，甲实际工作了（ ）小时。

- A. 2  
B. 4  
C. 5  
D. 3

【解析】例 2. 甲、乙、丙三人分别需 10 小时、15 小时、20 小时，给了 3 个完工时间。（1）赋总量：10、15、20 的公因数是 5，剩余 2、3、4，2、4 的公因数是 2，剩余 1、3、2，相乘得到  $5 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 = 60$ ， $W=60$ 。（2）求效率：甲效率为  $60/10=6$ ，乙效率为  $60/15=4$ ，丙效率为  $60/20=3$ 。甲中途调走说明甲没有干满 6 小时，但是乙、丙干满了 6 个小时，问甲实际干了多少时间。设甲实际干了  $x$  小时，把乙和丙看成一个整体，再加上甲干的活， $W=W_{乙丙}+W_{甲}$ ， $60=6 \times (4+3) + 6x$ ，约分得到  $10=7+x$ ，解得  $x=3$ 。【选 D】

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 10 \quad 15 \quad 20} \\ \times 2 \\ \hline 2 \overline{) 2 \quad 3 \quad 4} \\ \times 1 \times 3 \times 2 = 60 \end{array}$$

## 二、给效率比例型

特征：给多个效率的比例关系

方法：

1. 赋效率（按比例赋值）
2. 计算工作量（工作量=效率\*时间）
3. 列方程求解

【知识点】给效率比例型（给效率的比例关系）：

1. 赋效率（满足比例即可）。
2. 算总量：效率\*时间=总量。
3. 根据工作过程列式计算。

4. 例：一项工作，甲乙工作时的效率之比为 5：2，两人合作 6 天可以完工，问乙单独工作需多少天完工？

答：已知效率比为 5：2。（1）赋值甲的效率为 5，乙的效率为 2。（2）算工作总量：合作 6 天可以完工，效率和是  $(5+2)*6=42$ 。（3）求乙的时间， $t_z=42/2=21$  天。

5. 给效率比例型：

（1）直接给：甲乙的效率之比为 3：4；甲的效率是乙的 1.5 倍，则甲：乙  $=1.5/1=3/2$ 。

（2）间接给：甲 4 天的工作量等于乙 3 天的工作量， $4*甲=3*乙 \rightarrow 甲/乙=3/4$ 。

（3）特殊型——给多个人或多台机器。特征：每人效率相同；50 个工人；36 台收割机，赋值每个人/每台机器效率为 1。甲：乙：丙：丁效率比为 1：1：1：1，相当于给了效率比。

【例 3】小王和小李一起录入信息，小王比小李晚一天开始工作，且两人同时结束。已知小王的速度是小李的 1.2 倍，小李工作了 6 天。问若小王一个人完成这项工作，需要多少天？

- |         |         |
|---------|---------|
| A. 8 天  | B. 10 天 |
| C. 12 天 | D. 14 天 |

【解析】例 3. 工作 6 天不是完工时间，本题属于给效率比例型。（1）直接赋值，小李为 10，小王为 12。（2）小李干了 6 天，小王比小李晚一天开始工作，



2. 根据工作过程列方程。

3. 例：要修一条 5000 米的公路，每天修 500 米，每天做 100 双鞋。5000 米是  $W$ （工作量），每天修 500 米或者做 100 双鞋都是  $P$ （效率）。

【知识点】方程法（找、设、列、解）：

1. 找等量关系：

（1）相等/一样；

（2）……比……多/少； $A$  比  $B$  多 10， $A-B=10$ 。

（3）……是……的几倍； $A/B=2$ 。

（4）总共……。

2. 设未知数：设小不设大（减少分数计算），甲是乙的 1.5 倍，设乙为  $x$ ，甲是  $1.5x$ ，出现小数。乙为  $2x$ ，甲为  $3x$ ；甲比乙多乙的  $1/4$ ，如果设乙为  $x$ ，则甲不好表示。乙一定是 4 的倍数，设乙是  $4x$ ，甲为  $4x+1/4*4x=5x$ 。

3. 问谁设谁（避免陷阱），甲和乙总共 100 个，求甲。

【例 5】加工一批零件，原计划每天加工 100 个。正好按期完成任务。由于改进了生产技术和工艺，实际每天加工了 120 个，这样，不仅提前 3 天完成加工任务，而且还多加工了 40 个。他们原计划加工（ ）零件。

A. 1600 个

B. 1800 个

C. 2000 个

D. 2200 个

【解析】例 5. 属于给具体单位型，利用方程法求解。 $W_{\text{实际}} - W_{\text{原计划}} = 40$ ，根据  $W=P*t$  表示，设原工期为  $x$  天，实际干活天数为  $x-3$  天。 $120*(x-3) - 100x = 40$ ， $120x - 120*3 - 100x = 40$ ， $20x = 40 + 360$ ， $20x = 400$ ， $x = 20$ 。 $W_{\text{原计划}} = 100*20 \text{ 天} = 2000$ 。【选 C】

#### 四、牛吃草问题

特征：有消耗有增加；有相同句型。

公式：原有草量 = (牛数 - 草生长的量) \* 时间。

简写为： $y = (N*1 - x) * T$ 。

【注意】牛吃草：

1. 题目特征：有消耗，有增长（作用相反）；有排比句。

2. 解题思路：直接代入公式，套路解题。

3. 一牧场上的青草每天都匀速生长。这片青草可供 27 头牛吃 6 周，或供 23 头牛吃 9 周。那么可供 21 头牛吃几周？

分析：是排比句，牛在吃，有消耗，草在长，有增长，是牛吃草问题。牛吃的草量=老草+新长出来的草。假设老草在左边，新草在右边，牛可能不止一头，设牛有  $N$  头，假设每头牛吃 1 份草，老草用  $Y$  表示，设草长的速度为  $x$ ， $N*1*T=Y+x*T$ ，化简： $Y=N*1-x*T$ ， $Y=(N*1-X)*T$ 。



4. 公式：原有草量=（牛数\*1-草生长的速度）\*时间。字母表示： $Y=(N*1-X)*T$ 。 $Y$ ：原草量， $N$ ：牛的头数， $X$ ：草生长的速度， $T$ ：时间，设每头牛吃草的速度为“1”。

【例 6】一牧场上的青草每天都匀速生长。这片青草可供 27 头牛吃 6 周，或供 23 头牛吃 9 周。那么可供 21 头牛吃几周？

- A. 8
- B. 10
- C. 12
- D. 14

【解析】例 6. 有增长有消耗，有排比句，是牛吃草问题。（1）原有草量  $Y$  不变： $(27*1-x)*6=(23*1-x)*9$ ， $54-2x=69-3x$ ， $x=69-54=15$ 。（2）求  $Y$ ： $Y=(27-15)*6=12*6=72$ 。（3）看问题： $Y=(N*1-x)*T$ ， $72=(21*1-15)*T$ ， $72=6*T$ ， $T=12$ 。【选 C】

【例 7】榨汁机均匀地向一只大桶注入果汁，同时有 24 根相同的过滤管排出果汁，若不计杂质，6 小时即可把桶中的果汁排干；若改用 21 根过滤管，8 小时可将桶中的果汁排干。现用 16 根过滤管，（ ）小时可将桶中的果汁排干。

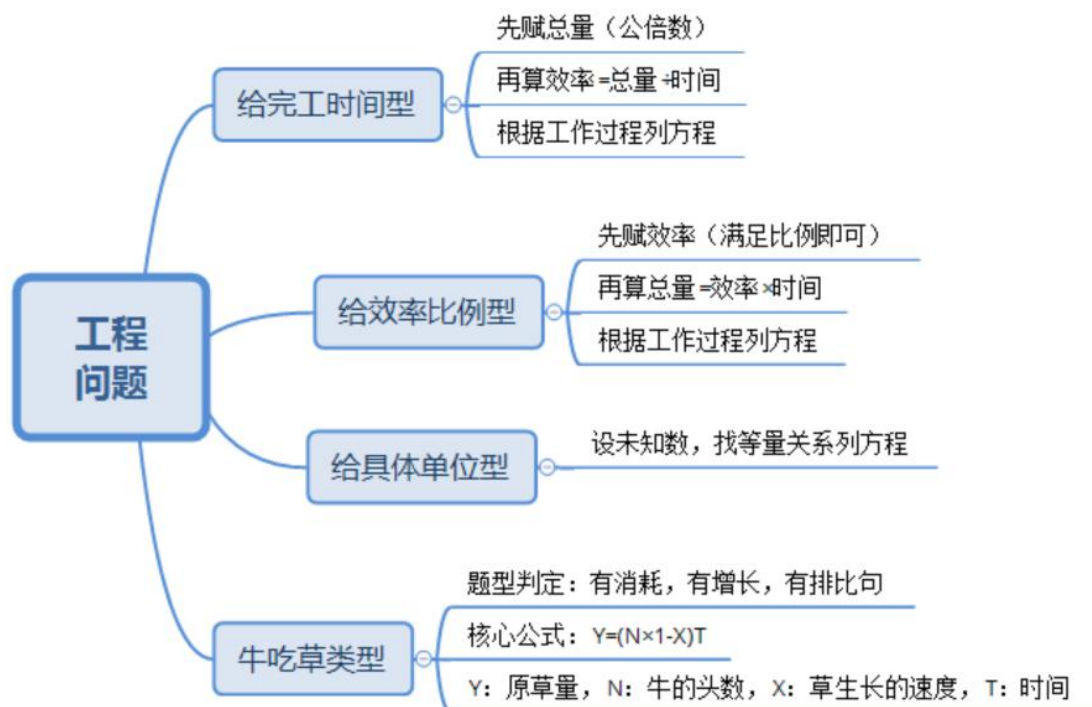
A. 17

B. 19

C. 18

D. 20

【解析】例 7. 有排比句，有注入有排出，属于有增长有消耗，属于牛吃草问题。过滤管相当于牛，榨汁机相当于草。（1）Y 不变： $(24*1-x)*6=(21*1-x)*8$ ， $72-3x=84-4x$ ， $x=12$ 。（2）代入左边的式子或者右边的式子， $Y=(24-12)*6=72$ 。（3）看问题： $Y=(N-X)*T$ ， $72=(16-12)*T$ ， $T=18$ 。【选 C】



【注意】工程问题：

1. 给完工时间型：

- （1）先赋总量(公倍数)。
- （2）再算效率=总量/时间。
- （3）根据工作过程列方程。

2. 给效率比例型：

- （1）先赋效率(满足比例即可)。
- （2）再算总量=效率\*时间。
- （3）根据工作过程列方程。

3. 给具体单位型：设未知数，找等量关系列方程。



#### 4. 牛吃草类型：

(1) 题型判定：有消耗，有增长，有排比句。

(2) 核心公式： $Y = (N \times I - X) \times T$ 。

(3) Y：原草量，N：牛的头数，X：草生长的速度，T：时间。

### 第二节 行程问题

#### 【注意】

1. 三量关系：路程=速度\*时间。行程问题比工程问题要稍难一些，考试中遇到，一般来说难度还行。

#### 2. 考查题型：

(1) 基础行程。

(2) 相对行程。相对更重要。

#### 一、基础行程

1. 利用公式直接运算：路程=速度\*时间。

2. 火车过桥：路程=桥长+火车长。

#### 【知识点】基础行程：

1. 基本公式：路程=速度\*时间，一般用方程法解题，找等量关系，设未知数，解方程。

2. 火车过桥/隧道。

【例 1】甲、乙两人从 A 地同时开车前往 120 公里外的 B 地去旅游，结果乙比甲提前 1 小时到达 B 地。已知甲比乙每小时少行 10 公里，则甲的速度为（ ）。

A. 30 公里/小时

B. 40 公里/小时

C. 20 公里/小时

D. 50 公里/小时

【解析】例 1. 行程问题，先梳理条件，第一个条件和时间有关，第二个条件和速度有关，A 比 B 多/少多少，都是等量关系，列方程求解，“乙比甲提前 1 小时到达 B 地”，甲花的时间更长， $t_{甲} - t_{乙} = 1$  小时。“甲比乙每小时少行 10 公

里”， $v_{乙}-v_{甲}=10$ 。问的是甲的速度，问谁设谁，可以把速度作为设未知数，把时间关系作为等量关系。设甲的速度为  $x$ ，则乙的速度为  $x+10$ ，则  $120/x-120/(x+10)=1$ ，未知数在分母上，可以解方程，但是太麻烦，借助选项代入排除，结果为 1，说明两个分数的结果都是整数，一般不会代入 50， $120/50$  不是一个整数，代入 A 项： $120/30-120/40=4-3=1h$ ，满足要求，当选。【选 A】

【知识点】火车过桥/隧道：路程=桥长+火车长（从车头刚上桥，到车尾刚离开）。 $S=V \times T$ ，速度和时间题目中一般会给，求火车经过的路程，找一个固定点（车头），从车头到车头，火车经过的路程为桥长+车长。



【例 2】列车驶过长 400 米的隧道，从车头进入隧道到车尾离开隧道共用了 20 秒，接着列车又驶过长 1120 米的铁路桥，从车头上桥到车尾离开桥共用了 50 秒。假设列车全程匀速行驶，则其车身长为（ ）。

- A. 80 米
- B. 120 米
- C. 100 米
- D. 60 米

【解析】例 2. 假设列车全程匀速行驶，说明  $v$  不变，有火车、桥、隧道，符合火车过桥问题。从车头上桥到车尾离开桥，说明路程=桥长+火车长或者路程=隧道长+火车长。设火车速度为  $v$ ，隧道：400+火车长=20v①，桥：1120+火车长=50v②，②-①得：720=30v， $v=24$ ，代入①得：400+火车长=20\*24=480，火

车长=80，对应 A 项。【选 A】

## 二、流水行船

顺水速度=船速+水速。

逆水速度=船速-水速。

船速=（顺水速度+逆水速度）/2。

水速=（顺水速度-逆水速度）/2。

【知识点】相对行程：

### 1. 流水行船：

（1）顺流而下（从上游到下游），水有助力的作用， $V_{顺}=V_{船}+V_{水}$ ①；逆流而下（从下游到上游），水有阻碍的作用， $V_{逆}=V_{船}-V_{水}$ ②。

（2）（①+②）/2 得： $V_{船}=(V_{顺}+V_{逆})/2$ 、（①-②）/2 得： $V_{水}=(V_{顺}-V_{逆})/2$ 。

（3）注：

①顺水：顺流而下、上游到下游；逆水：逆流而上、下游到上游。

②船在静水中的速度=船速、漂流速度=水速（漂流瓶、塑料袋、羽毛在水中的速度）。

### 2. 相遇追及。

【例 3】甲、乙两地为沿河城市，相距 120 公里，甲地位于上游，乙地位于下游，由于受水流速度影响，轮船往返于甲、乙两地的时间分别为 5 小时和 6 小时，问轮船在静水中的速度为每小时多少公里？（ ）

A. 16

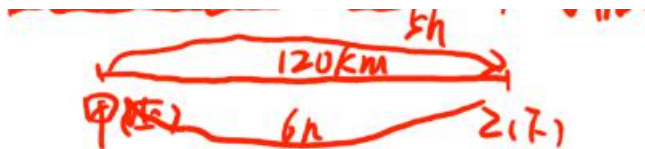
B. 18

C. 20

D. 22

【解析】例 3. 有上下游，流水行船问题，问轮船在静水的速度，即求  $V_{船}$ 。画图分析，已知全程和顺流、逆流的时间，从甲地到乙地是顺流， $V_{顺}=120/5=24$ ，从乙地到甲地是逆流， $V_{逆}=120/6=20$ 。 $V_{船}=(V_{顺}+V_{逆})/2=(24+20)/2=22$ ，对应 D 项。【选 D】

- A. 16  
B. 18  
C. 20  
D. 22



$$\text{甲} \rightarrow \text{乙}: V_{\text{顺}} = \frac{120}{5} = 24$$

$$\text{乙} \rightarrow \text{甲}: V_{\text{逆}} = \frac{120}{6} = 20$$

$$\begin{aligned} \text{求 } V_{\text{船}} &= \frac{V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}}{2} \\ &= \frac{24 + 20}{2} = \frac{44}{2} \\ &= 22 \end{aligned}$$

$$V_{\text{船}} = \frac{V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}}{2}$$

$$V_{\text{水}} = \frac{V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}}}{2}$$

### 三、相遇追及

1. 相遇：同时出发，相向而行。

路程和（相遇距离）=（大速度+小速度）\*相遇时间。

2. 追及：同时出发，同向而行。

路程差（追及距离）=（大速度-小速度）\*追及时间。

3. 环形：相遇 N 次，路程和为 N 圈；追及 N 次，路程差为 N 圈。

#### 【知识点】相遇追及：

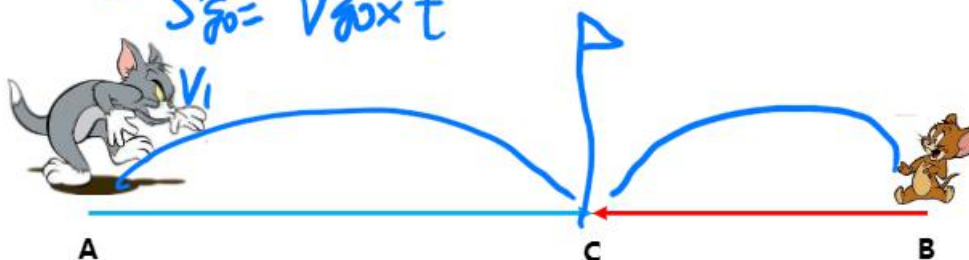
1. 相遇问题：直线相遇：两人同时相向而行。相向而行是面对面的，比如汤姆和杰瑞是面对面相遇的。猫的速度为  $V_1$ ，老鼠的速度为  $V_2$ ， $S_{\text{和}}$ =猫走的路程+老鼠走的路程= $AC+BC=V_1*t+V_2*t$ ，猫和老鼠同时出发同时相遇，时间相同，则可以提出  $t$ ， $S_{\text{和}}=(V_1+V_2)*t=V_{\text{和}}*t$ 。路程和为相向而行刚开始时两人的距离，即 AB。

直线相遇：两人同时相向而行

公式：  $S_{和} = V_{和} \times t$

$S_{和}$ ：相向而行刚开始时两人的距离

$$\begin{aligned} S_{和} &= AC + BC \\ &= V_1 \times t + V_2 \times t \\ &= (V_1 + V_2) \times t \\ S_{和} &= V_{和} \times t \end{aligned}$$



(1) 公式：  $S_{和} = V_{和} \times t$ 。

(2)  $S_{和}$ ：相向而行刚开始时两人的距离。

2. 追及问题：直线追及：两人同时同向而行。比如猫和老鼠，同向的说明猫是看着老鼠的后脑勺的，猫在某一时间猫追上老鼠，路程差为快的人比慢的人多走的距离， $S_{差} = AC - BC = V_1 \times t - V_2 \times t = (V_1 - V_2) \times t = V_{差} \times t$ ，路程差为 AB。

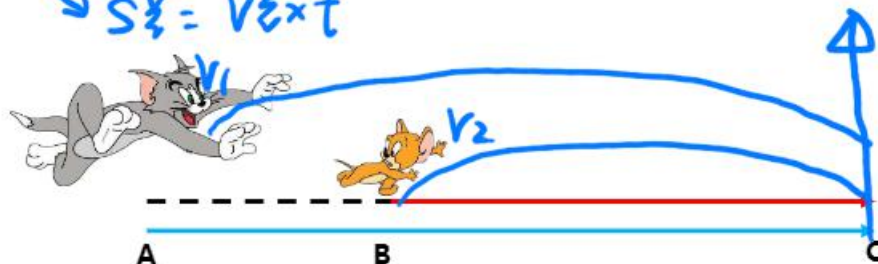
直线追及：两人同时同向而行

公式：  $S_{差} = V_{差} \times t$

$S_{差}$ ：快的人比慢的人多走的距离

$S_{差}$ ：追及刚开始时两人相差的距离

$$\begin{aligned} S_{差} &= AC - BC \\ &= V_1 \times t - V_2 \times t \\ &= (V_1 - V_2) \times t \\ S_{差} &= V_{差} \times t \end{aligned}$$



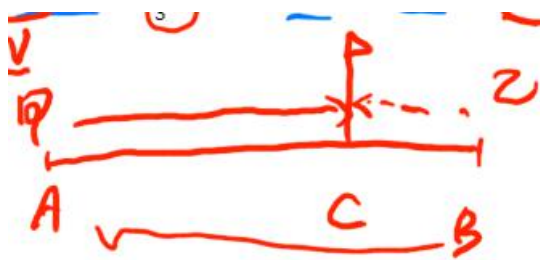
(1) 公式：  $S_{差} = V_{差} \times t$ 。

(2)  $S_{\text{差}}$ : 快的人比慢的人多走的距离, 追及刚开始时两人相差的距离。

【例 4】甲、乙两列火车同时从相距 147 千米的两个车站出发相向而行, 经过 45 分钟后相遇, 如果甲火车的速度是乙火车速度的  $\frac{4}{3}$  倍, 那么甲、乙两火车的速度差是每小时 ( )。

- A. 28 千米  
B. 30 千米  
C. 24 千米  
D. 32 千米

【解析】例 4. 出现“同时”、“相向”、“相遇”, 相遇问题, 画图分析, 甲乙分别从 A、B 两地出发, 在 C 点相遇, 相遇公式:  $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} * t$ ,  $S_{\text{和}} = 147$  (起初两人相距的距离)。已知相遇时间, 甲火车的速度是乙火车速度的  $\frac{4}{3}$  倍, 乙的速度为 3 的倍数, 设乙的速度为  $3V$ , 甲的速度为  $\frac{4}{3} * 3V = 4V$ , 问的是每小时多少千米, 45 分钟 =  $\frac{45}{60}$  小时,  $147 = (3V + 4V) * \frac{45}{60} \rightarrow 147 = 7V * \frac{3}{4}$ , 解得  $V = 28$ , 问甲乙速度差,  $4V - 3V = V = 28$ , 对应 A 项。【选 A】



【例 5】从 A 地到 B 地的距离为 24 千米, 甲、乙两人骑自行车从 A 地出发到 B 地。其中甲从早上 8 点出发, 骑自行车的速度为 0.4 千米/分钟; 25 分钟以后, 乙骑自行车, 用 0.6 千米/分钟的速度追甲, ( ) 乙追上甲。

- A. 9 点 10 分  
B. 9 点 15 分  
C. 9 点 25 分  
D. 追不上

【解析】例 5. 追及问题, 画图分析, 8:25 时甲在 C 点, 乙在 A 点出发, 路程差为 AC 段,  $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} * t$ ,  $AC = (0.6 - 0.4) * t \rightarrow 0.4 * 25 = 0.2t$ , 解得  $t = 50$  分钟, 从 8:25 出发, 有同学认为加 50 分钟后为 9:15 分钟, 错选了 B 项, 有一个 D 项很奇怪, 需要验证。在 50 分钟内乙走的路程为  $S_{\text{乙}} = 50 * 0.6 = 30$  千米,  $S_{\text{乙}} > 24$  千米, 说明甲早已到 B 地, 注意一定是 AB 段内能否追上, 目的地都是 B 地。50 分钟确实可以追上, 但是需要往 AB 段继续延伸才可以。【选 D】

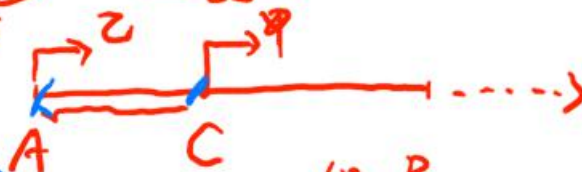


自行车，用0.6千米/分钟的速度追甲，（ ）乙追上甲？

- A. 9点10分  
B. 9点15分  
C. 9点25分  
D. 追不上

追上

8:25



60 B

$$8:25 + 50 \Rightarrow P=15 \times$$

$$S_2 = 50 \text{分} \times 0.6 = 30 \text{km}$$

$$S_2 > 24 \text{km}$$

(在AB段内, 能否追上)  
24km

$$S_{\text{差}} = V_{\text{差}} \times t$$

$$AC = (0.6 - 0.4) \times t$$

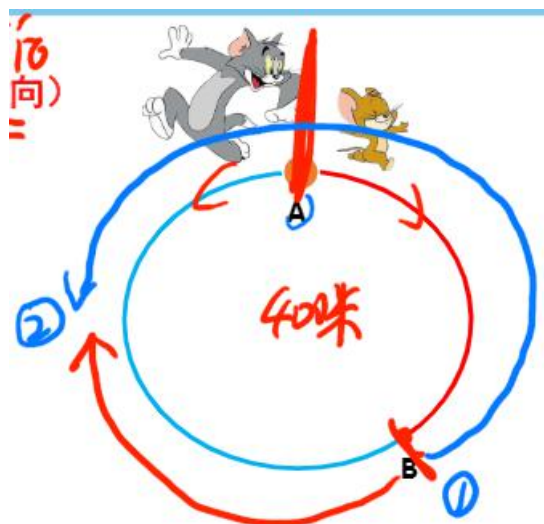
$$0.4 \times 25 = 0.2t$$

$$10 = 0.2t$$

$$t = 50 \text{分}$$

【知识点】环形相遇、环形追及：

1. 环形相遇（同时、同点、反向或背向）：猫和老鼠均从A点出发，到B点相遇，第一次相遇，猫和老鼠共走了一圈，路程和为一圈；毛和老鼠继续走，直到第二次相遇，共走了两圈，路程和为两圈；相遇n次，路程和为n圈。



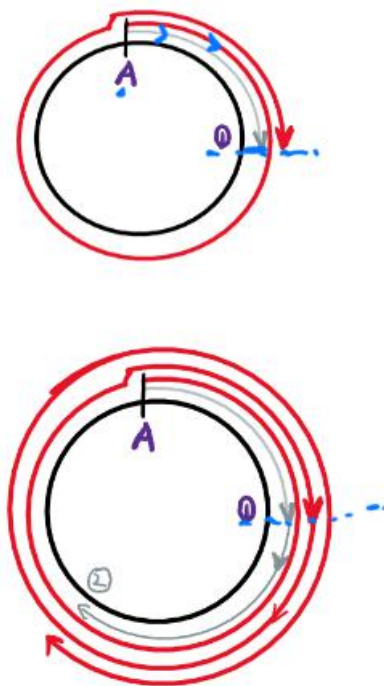
(1) 公式： $S_{\text{和}} = V_{\text{和}} \times t$ 。

(2) 时间及路程关系：相遇1次， $S_{\text{和}} = 1$ 圈；相遇n次， $S_{\text{和}} = n$ 圈。

(3)  $S_{\text{和}} = n \text{圈} = V_{\text{和}} \times t$ 。比如一圈的路程为400米，老鼠的速度为4m/s，猫的速度为6m/s，问相遇8次的时间， $S_{\text{和}} = 8 \times 400 = (4+6) \times t$ ，解得  $t = 320\text{s}$ 。

2. 环形追及（同时、同点、同向）：红色和灰色同点同时同向起跑，跑着跑

着红色比灰色多跑了一圈， $S_{\text{红}} - S_{\text{灰}} = 1$  圈，不考虑内圈外圈，默认都是同一个跑到，路程差为 1 圈；继续跑，红色追上灰色两次，红色比灰色多跑了两个整圈，路程差为 2 圈。



(1) 公式： $S_{\text{差}} = V_{\text{差}} * t$ 。

(2) 时间路程关系：追上 1 次， $S_{\text{差}} = 1$  圈；追上  $n$  次， $S_{\text{差}} = n$  圈。比如追上 3 次，路程差为 3 圈。

(3)  $S_{\text{差}} = n \text{ 圈} = V_{\text{差}} * t$ 。比如甲的速度为  $15\text{m/s}$ ，乙的速度为  $5\text{m/s}$ ，一圈的路程为  $400\text{m}$ ，问追上 4 次的时间。 $S_{\text{差}} = 4 * 400 = (15 - 5) * t$ ，解得  $t = 160\text{s}$ 。

**【例 6】**小明与小强一起参加 5000 米长跑比赛，比赛场地为 500 米的环形跑场。两人从同一起点出发，已知小明到达终点花费的时间是 20 分钟，小强则需要 25 分钟。假设两人均是匀速前进，则在比赛过程中，除起跑外，两人可以相遇（ ）。

A. 0 次

B. 1 次

C. 2 次

D. 3 次

**【解析】**例 6. 出现环形跑场，是环形相遇或环形追及问题。5000m 的长跑，一圈是 500m，需要跑 10 圈。长跑是同点同时同向开始起跑的，本质是环形追及问题，问相遇几次，即问追上几次。跑道一圈为 500 米，小明到终点需要 20 分

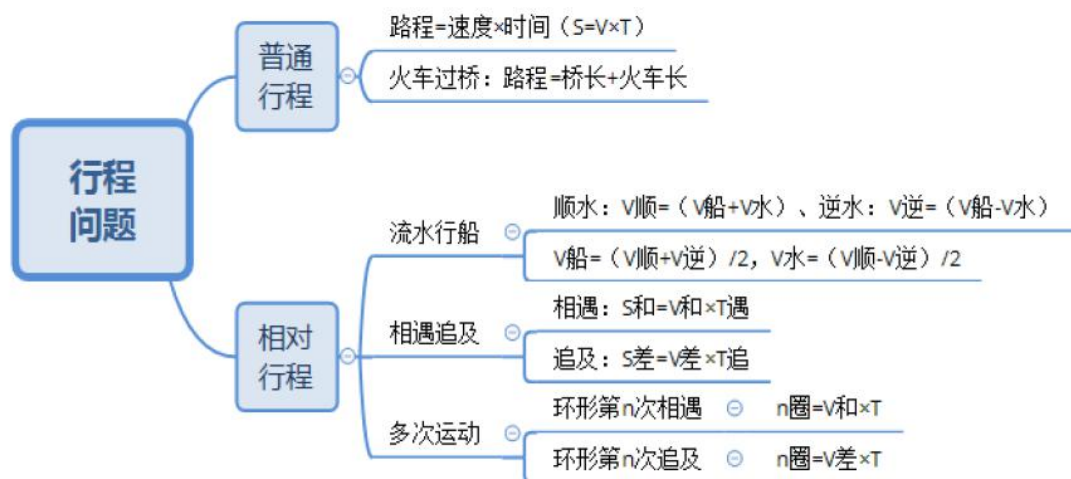


钟，小强需要 25 分钟，可以求出两人的速度， $V_{\text{小明}}=5000/20=250$  米/分钟， $V_{\text{小强}}=5000/25=200$  米/分钟， $S_{\text{差}}=n \text{ 圈}=V_{\text{差}}*t$ ，设追上  $n$  次， $n*500=(250-200)*20$ ， $t$  是小明的时间，追上一定是两个人都在跑，一个人已经到了就不需要再追了，解得  $n=2$  次，对应 C 项。【选 C】

**【注意】**

1.  $t_{\text{追上}}$  是快的人追慢的人的时间，20 分钟时小明已经到终点，即小明只追了 20 分钟，最后的 5 分钟，小明已经到终点，只有小强一个人在跑。

2. 如果计算结果  $n$  是 2.4 次、2.6 次，那么还是追上 2 次，向下取整。如果是在终点追上第二次，也是追上 2 次。



**【注意】行程问题：**

1. 普通行程：

- (1) 路程=速度时间 ( $S=V*T$ )。
- (2) 火车过桥：路程=桥长+火车长。

2. 相对行程：

(1) 流水行船：

- ①顺水： $V_{\text{顺}}=V_{\text{船}}+V_{\text{水}}$ 、逆水： $V_{\text{逆}}=V_{\text{船}}-V_{\text{水}}$ 。
- ② $V_{\text{船}}=(V_{\text{顺}}+V_{\text{逆}})/2$ 、 $V_{\text{水}}=(V_{\text{顺}}-V_{\text{逆}})/2$ 。

(2) 相遇追及：

- ①相遇： $S_{\text{和}}=V_{\text{和}}*T_{\text{遇}}$ 。

②追及： $S_{\text{差}}=V_{\text{差}}*T_{\text{追}}$ 。

(3) 多次运动：

①环形第  $n$  次相遇： $n \text{ 圈}=V_{\text{和}}*T$ 。

②环形第  $n$  次追及： $n \text{ 圈}=V_{\text{差}}*T$ 。

### 第三节 经济利润问题

**【注意】**经济利润问题

1. 常规经济利润问题：特征：售价、进价、收入等。
2. 分段计费：特征：有不同的计费标准，比如打车。

#### 一、基础经济

1. 特征：有成本、售价、利润、利润率。
2. 方法：方程法、赋值法（题目中没有给带单位的具体数值）。
3. 技巧：列表。
4. 公式：  
利润=售价-成本、利润率=利润/成本=（售价-成本）/成本、  
售价=成本\*（1+利润率）、成本=售价/（1+利润率）、  
总钱数=单件钱数\*数量、售价=定价×折扣。

**【知识点】**常规经济利润：

1. 常见概念：要去卖水果，先去批发市场进车厘子，进价：20 元/斤（成本，不考虑人工成本和房租），定价：50 元/斤，发现卖不出去，需要打折，售价：打个 8 折，40 元/斤（最终的售价）。定价和售价不是一回事，定价是起初想卖的价格，售价是最终卖出的价格，进价一般默认为成本。

2. 公式：

(1) 单件利润=售价-进价。车厘子进价 20 元/斤，售价 40 元/斤，利润 20 元/斤。

(2) 总利润=收入-成本。

(3) 利润率=利润/成本。和资料分析中不一样。

(4) 售价=进价 $\times$ (1+利润率)。

(5) 进价=售价/(1+利润率)。

(6) 打折率=折后价/折前价。

### 3. 练习:

(1) 进价 100 元, 售价 150 元。利润:  $150-100=50$  元。利润率:  $50/100=50\%$ 。

(2) 进价 100 元, 利润率 50%。售价:  $100\times(1+50\%)=150$  元。

(3) 售价是 150 元, 利润率是 50%。进价:  $150/(1+50\%)=100$  元。

(4) 原价 200 元, 现价 180 元。打折率:  $180/200=0.9$ , 打 9 折。

### 4. 方法选择:

(1) 给具体数值(带单位的数: 100 元、70 吨、6 千克), 套公式/方程法。

注: 涉及多个主体/多个年份, 又有多个概念。可列表梳理。比如有甲商品和乙商品, 分别还有进价、定价、数量, 可以列表分析; 去年和今年, 涉及进价、定价、数量。



【例 1】李经理的年薪较三年前涨了 50%，他拿出年薪的 20% 捐给儿童福利院，又将剩余部分的 5% 孝敬父母，发现余下部分与三年前的年薪相比还多了 7 万元，则李经理三年前的年薪是（ ）万元。

A. 42

B. 58

C. 50

D. 66

【解析】例 1. 提到年薪变化的问题，经济利润问题，“余下部分与三年前的年薪相比还多了 7 万元”，出现具体单位的值，可以用方程法，且为等量关系。所有条件都是和三年前比，“李经理的年薪较三年前涨了 50%”，即 A 比 B 多了 B 的 50%，选项都比较大，设三年前年薪为  $100x$ ，今年年薪为  $100x+100x\times 50\%=150x$ ，他拿出年薪的 20% 捐给儿童福利院， $150x\times 20\%=30x$ ；又将剩余部分的 5% 孝敬父母，

是去掉捐给儿童福利院的 5%， $5\% \times (150x - 30x) = 5\% \times 120x = 6x$ ；“余下部分与三年前的年薪相比还多了 7 万元”， $(150x - 30x - 6x) - 100x = 7$ ，解得  $x = 0.5$ ，求三年前的年薪， $100x = 50$  万，对应 C 项。【选 C】

【例 2】某商铺批发了小熊和小狗两种毛绒玩具，已知，毛绒小熊的进价比毛绒小狗便宜 25%，商家按进价 30% 的利润给毛绒小熊定价，按进价 20% 的利润给毛绒小狗定价，则毛绒小狗定价比毛绒小熊定价高 36 元，那么毛绒小狗的定价是（ ）元。

- A. 160  
B. 172  
C. 186  
D. 192

【解析】例 2. 有售价和进价，经济利润问题。“毛绒小狗定价比毛绒小熊定价高 36 元”，出现具体单位，列方程求解，小狗定价-小熊定价=36 元，有多个主体，还有定价、进价，列表分析。“毛绒小熊的进价比毛绒小狗便宜 25%”，一般设比字后的主体，A 比 B 少 B 的  $25\% = 1/4$ ，设小狗的进价为  $4x$ ，则小熊的进价为  $4x - 4x \times 1/4 = 3x$ ；“按进价 30% 的利润给毛绒小熊定价”，小熊的定价为  $3x \times (1 + 30\%) = 3.9x$ ；“按进价 20% 的利润给毛绒小狗定价”，小狗的定价为  $4x \times (1 + 20\%) = 4.8x$ 。“毛绒小狗定价比毛绒小熊定价高 36 元”，则  $4.8x - 3.9x = 36$ ，解得  $x = 40$ ，问小狗的定价， $4.8x = 4.8 \times 40 = 192$ ，对应 D 项。【选 D】

【知识点】常规经济利润方法选择：

1. 给具体数值（带单位），套公式/方程法。
2. 无具体数值（给比例求比例，没有任何带单位的数，比如分数、百分数、倍数），赋值法。赋谁：看题干与谁相关（进价、原价、数量居多），赋多少： $1/10/100 \dots\dots$ 。

【例 3】小张收购一台手机，然后转手卖出，赚取了 30% 的利润。一星期后，客户要求退货，小张和客户达成协议，以当时交易价格的 90% 回收了这台手机，后来小张又以最初的收购价格将其卖出。小张在这台手机交易中的利润率是（ ）。

- A. 27%  
B. 20%

C. 17%

D. 13%

【解析】例 3. 有两次买卖的环节，题干中只有 30%、90% 两个百分数，问的也是利润率，给比例求比例，考虑赋值法。都是和最初收购手机的价格有关，赋值最初的收购价为 100，第一次以 30% 的利润率卖出，售价为  $100 \times (1+30\%) = 130$  元；客户要求退货，以当时交易价格的 90% 回收， $130 \times 0.9 = 117$  元；最后以最初的收购价格卖出，为 100 元。问小张在这台手机交易中的利润率，利润率=利润/成本，小张在中间环节有赚差价，第一次赚了  $130-100=30$  元，第二次亏了  $117-100=17$  元，总利润为  $30-17=13$  元，成本为 100 元，利润率= $(30-17)/100=13\%$ 。

【选 D】

【例 4】A 商人用比去年同期高出一半的金额购买某种商品，却只购买到了去年数量的  $3/4$ ，则今年该商品的价格是去年的（ ）倍。

A. 2.8

B. 2

C. 2.4

D. 1.8

【解析】例 4. 方法一：一半即为  $1/2$ 、50%。本题的数据为  $1/2$ 、 $3/4$ ，问的也是比例，用赋值法。有去年和今年，还有金额和量，用列表法。“只购买到了去年数量的  $3/4$ ”，赋值去年的数量为 4，则今年的数量为 3。金额和数量之间没有关系，需要再赋值金额，“用比去年同期高出一半的金额购买某种商品”，赋值去年的金额为 2，今年的金额为 3。今年的价格= $3/3=1$ ，去年的价格= $2/4=0.5$ ，问今年该商品的价格是去年的几倍，即  $1/0.5=2$ ，对应 B 项。

今 3 3  $\rightarrow \frac{3}{3}=1$   
 去 2 4  $\rightarrow \frac{2}{4}=0.5$   
 结果  $=2$

方法二：设未知数，“只购买到了去年数量的  $3/4$ ”，设去年的量为  $4x$ ，今年的量为  $3x$ 。金额和量没有关系，需要再设一个未知数，“比去年同期高出一半的金额购买某种商品”，即 A 比 B 多 B 的一半，设去年的金额为  $2y$ ，今年的金额为  $2y+y=3y$ ，今年的价格为  $3y/3x=y/x$ ，去年的价格为  $2y/4x=y/2x$ ，价格的

倍数为  $(y/x) \div (y/2x) = (y/x) * (2x/y) = 2$ 。【选 B】

注：全量  $\Rightarrow$   $\frac{3y}{3x} = \frac{y}{x}$   $\frac{y}{x} \div \frac{y}{2x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{2x}{y} = 2$

去：设  $2y$  设  $4x \Rightarrow \frac{2y}{4x} = \frac{y}{2x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{2x}{y} = 2$

## 二、分段计费

题型特征：每一段的收费价格不同

例如：坐出租车的费用、水费、电费、停车费、税费等

方法：先分段计算，再汇总求和

### 【知识点】分段计费：

1. 在生活中，水电费、出租车计费、税费等，每段计费标准不等。问：在不同收费标准下，一共需要的费用？已知总费用，求总里程/总重量？

2. 计算方法：

(1) 先按标准分开看。

(2) 计算之后再汇总。

3. 引例：某地出租车收费标准为：3 公里内起步价 8 元；超出 3 公里的部分，每公里 2 元。小明打车坐了 12 公里，共花费多少钱？

答：3 公里以内均为 8 元，超过 3 公里每公里 2 元， $8+2*(12-3)=26$  元。

【例 5】培训学校为吸引更多学生暑假来本校学习，规定 10 次课程以下每次收费 60 元，超出 10 次课部分每次课收费略低一些。已知小强和小林两个人分别缴费 1095 元、780 元，小强学习次数比小林多了 50%，那么，超出 10 次课部分每次收费比 10 次课以内的低（ ）元。

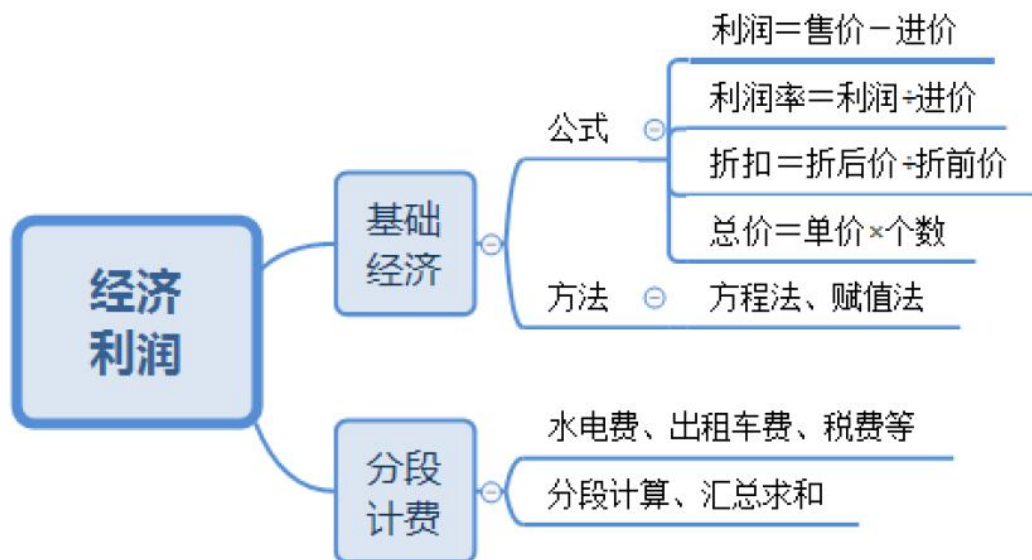
A. 15

B. 25

C. 35

D. 45

【解析】例 5. 以 10 次课为界，10 次以内每次收费 60 元，10 次以外不知道每次收费多少元，正好 10 次课是 600 元。“已知小强和小林两个人分别缴费 1095 元、780 元，小强学习次数比小林多了 50%”，次数之间有一个关系，A 比 B 多 B 的 50%，设小林为  $2x$ ，小强为  $2x+x=3x$ ，设超出 10 次的每次  $y$  元。 $10*60+y*(3x-10)=1095$ ， $10*60+y*(2x-10)=780$ ，化简得： $y*(3x-10)=495$ ①， $y*(2x-10)=180$ ②，都有  $y$ ，用①/②得： $(3x-10)/(2x-10)=495/180 \rightarrow (3x-10)/(2x-10)=11/4 \rightarrow (3x-10)*4=11*(2x-10) \rightarrow 12x-40=22x-110$ ，解得  $x=7$ ，求  $y$ ，代入②得： $y*(2*7-10)=180$ ，解得  $y=45$ ，问超出 10 次课部分每次收费比 10 次课以内的低多少元， $60-45=15$  元，对应 A 项。【选 A】



【注意】经济利润：

1. 基础经济：

(1) 公式：

① 利润=售价-进价。

② 利润率=利润÷进价。

③ 折扣=折后价/折前价。

④ 总价=单价\*个数。

(2) 方法：方程法、赋值法。

2. 分段计费：水电费、出租车费、税费等。分段计算、汇总求和。

**【注意】**

1. 道阻且长，行则将至。
2. 预习范围：第四节基础运算、第五节几何问题、第六节排列组合与概率。
3. 下节课：18：45 答疑，19：00 准时上课。

**【答案汇总】**工程问题：1-5：DDBAC；6-7：CC

行程问题：1-5：AADAD；6：C

经济利润问题：1-5：CDDBA



遇见不一样的自己

Be your better self