第二章 | 数学运算

第一节　工程问题

一、给完工时间型

特征：给多个完成时间
方法：
1. 赋工作量（时间的公倍数）
2. 计算效率（效率 = 工作量 ÷ 时间）
3. 列方程求解

【例 1】一批零件，由甲单独制作需要 12 天，甲、乙两人合作则只需要 8 天。如果这批零件由乙单独制作，则需要（　　）天。

A. 16　　B. 18

C. 20　　D. 24

【例 2】单独完成某项工程，甲、乙、丙三人分别需 10 小时、15 小时、20 小时，开始三人一起干，后来因工作需要，甲中途调走了，结果共用了 6 小时完成了这项工作。那么，甲实际工作了（　　）小时。

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 3

二、给效率比例型

特征：给多个效率的比例关系
方法：
1. 赋效率（按比例赋值）
2. 计算工作量（工作量 = 效率 × 时间）
3. 列方程求解

【例 3】小王和小李一起录入信息，小王比小李晚一天开始工作，且两人同时结束。已知小王的速度是小李的 1.2 倍，小李工作了 6 天。问若小王一个人完成这项工作，需要多少天？（　　）

A. 8 天　　　　B. 10 天

C. 12 天　　　　D. 14 天

【例 4】某片麦田，需要 4 台同型号收割机共同工作 8 天才能完成。收割完一半后，有两台收割机出现故障，维修 2 天后继续投入使用，问最终完成整片麦田收割一共用了多少天？（　　）

A. 9　　　　B. 10

C. 11　　　　D. 12

三、给具体数值型

特征：给效率的具体值或工作总量的具体值
方法：方程法

【例 5】加工一批零件，原计划每天加工 100 个。正好按期完成任务。由于改进了生产技术和工艺，实际每天加工了 120 个，这样，不仅提前 3 天完成加工任务，而

且还多加工了 40 个。他们原计划加工（　　）零件。

A. 1600 个　　B. 1800 个

C. 2000 个　　D. 2200 个

四、牛吃草问题

特征：有消耗有增加；有相同句型

公式：原有草量 =（牛数 − 草生长的量）× 时间

简写为：$y=(N-x)\times T$

【例 6】一牧场上的青草每天都匀速生长。这片青草可供 27 头牛吃 6 周，或供 23 头牛吃 9 周。那么可供 21 头牛吃几周？（　　）

A. 8　　B. 10

C. 12　　D. 14

【例 7】榨汁机均匀地向一只大桶注入果汁，同时有 24 根相同的过滤管排出果汁，若不计杂质，6 小时即可把桶中的果汁排干；若改用 21 根过滤管，8 小时可将桶中的果汁排干。现用 16 根过滤管，（　　）小时可将桶中的果汁排干。

A. 17　　B. 19

C. 18　　D. 20

第二节　行程问题

一、基础行程

1. 利用公式直接运算：路程 = 速度 × 时间
2. 火车过桥：路程 = 桥长 + 火车长

【例 1】甲、乙两人从 A 地同时开车前往 120 公里外的 B 地去旅游，结果乙比甲提前 1 小时到达 B 地。已知甲比乙每小时少行 10 公里，则甲的速度为（　　）。

A. 30 公里 / 小时　　B. 40 公里 / 小时

C. 20 公里 / 小时　　D. 50 公里 / 小时

【例 2】列车驶过长 400 米的隧道，从车头进入隧道到车尾离开隧道共用了 20 秒，接着列车又驶过长 1120 米的铁路桥，从车头上桥到车尾离开桥共用了 50 秒。假设列车全程匀速行驶，则其车身长为（　　）。

A. 80 米　　B. 120 米

C. 100 米　　D. 60 米

二、流水行船

顺水速度 = 船速 + 水速

逆水速度 = 船速 − 水速

船速 =（顺水速度 + 逆水速度）÷2

水速 =（顺水速度 − 逆水速度）÷2

【例 3】甲、乙两地为沿河城市，相距 120 公里，甲地位于上游，乙地位于下游，

由于受水流速度影响，轮船往返于甲、乙两地的时间分别为 5 小时和 6 小时，问轮船在静水中的速度为每小时多少公里？（   ）

A. 16　　B. 18

C. 20　　D. 22

三、相遇追及

1. 相遇：同时出发，相向而行
   路程和（相遇距离）=（大速度 + 小速度）× 相遇时间
2. 追及：同时出发，同向而行
   路程差（追及距离）=（大速度 − 小速度）× 追及时间
3. 环形：相遇 N 次，路程和为 N 圈
   追及 N 次，路程差为 N 圈

【例 4】甲、乙两列火车同时从相距 147 千米的两个车站出发相向而行，经过 45 分钟后相遇，如果甲火车的速度是乙火车速度的$\frac{4}{3}$倍，那么甲、乙两火车的速度差是每小时（   ）。

A. 28 千米　　B. 30 千米

C. 24 千米　　D. 32 千米

【例 5】从 A 地到 B 地的距离为 24 千米，甲、乙两人骑自行车从 A 地出发到 B 地。其中甲从早上 8 点出发，骑自行车的速度为 0.4 千米 / 分钟；25 分钟以后，乙骑自行车，用 0.6 千米 / 分钟的速度追甲，（   ）乙追上甲。

A. 9 点 10 分　　B. 9 点 15 分

C. 9 点 25 分　　D. 追不上

【例 6】小明与小强一起参加 5000 米长跑比赛，比赛场地为 500 米的环形跑场。

两人从同一起点出发，已知小明到达终点花费的时间是 20 分钟，小强则需要 25 分钟。假设两人均是匀速前进，则在比赛过程中，除起跑外，两人可以相遇（　　）。

A. 0 次　　B. 1 次

C. 2 次　　D. 3 次

第三节　经济利润问题

一、基础经济

1. 特征：有成本、售价、利润、利润率
2. 方法：方程法、赋值法（题目中没有给带单位的具体数值）
3. 技巧：列表
4. 公式：

利润 = 售价 − 成本　　$利润率=\frac{利润}{成本}=\frac{售价-成本}{成本}$

售价 = 成本 ×（1+ 利润率）　　$成本=\frac{售价}{1+利润率}$

总钱数 = 单件钱数 × 数量　　售价 = 定价 × 折扣

【例 1】李经理的年薪较三年前涨了 50%，他拿出年薪的 20% 捐给儿童福利院，又将剩余部分的 5% 孝敬父母，发现余下部分与三年前的年薪相比还多了 7 万元，则李经理三年前的年薪是（　　）万元。

A. 42　　B. 58

C. 50　　D. 66

【例 2】某商铺批发了小熊和小狗两种毛绒玩具，已知，毛绒小熊的进价比毛绒小狗便宜 25%，商家按进价 30% 的利润给毛绒小熊定价，按进价 20% 的利润给毛绒小

狗定价，则毛绒小狗定价比毛绒小熊定价高 36 元，那么毛绒小狗的定价是（　　）元。

A. 160　　B. 172

C. 186　　D. 192

【例 3】小张收购一台手机，然后转手卖出，赚取了 30% 的利润。一星期后，客户要求退货，小张和客户达成协议，以当时交易价格的 90% 回收了这台手机，后来小张又以最初的收购价格将其卖出。小张在这台手机交易中的利润率是（　　）。

A. 27%　　B. 20%

C. 17%　　D. 13%

【例 4】A 商人用比去年同期高出一半的金额购买某种商品，却只购买到了去年数量的$\frac{3}{4}$，则今年该商品的价格是去年的（　　）倍。

A. 2.8　　B. 2

C. 2.4　　D. 1.8

二、分段计费

题型特征：每一段的收费价格不同

例如：坐出租车的费用、水费、电费、停车费、税费等

方法：先分段计算，再汇总求和

【例 5】培训学校为吸引更多学生暑假来本校学习，规定 10 次课程以下每次收费 60 元，超出 10 次课部分每次课收费略低一些。已知小强和小林两个人分别缴费 1095 元、780 元，小强学习次数比小林多了 50%，那么，超出 10 次课部分每次收费比 10 次课以内的低（　　）元。

A. 15　　　　B. 25

C. 35　　　　D. 45

第四节　基础运算

一、简单计算

1. 尾数法

什么时候用？　①做加、减、乘、乘方计算；②选项的尾数不同

怎么用？　只取最后一位进行计算，结果也只保留最后一位

2. 基础公式

交换律：$a \times b \times c = a \times c \times b$，$a + b + c = a + c + b$

分配律：$ac + bc = (a + b)c$

平方差公式：$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

3. 定义新运算

新的运算符号，按规定计算。原有规则：先算括号，再算乘除，最后算加减

【例 1】2017 × 2016–2015 × 2014=（　　）。

A. 7840　　　　B. 8064

C. 8038　　　　D. 8062

【例 2】2012 × 0.491+856.672+2012 × 0.146+143.328+2012 × 0.363=（　　）。

A. 2013.39　　　　B. 2013

C. 3012　　　　D. 3012.39

【例 3】2019 × 2019–2020 × 2018 的值是多少？（　　）

A. 1　　　　B. 11

C. 21　　　　D. 31

【例 4】规定如下运算法则：$x \triangle y=\begin{cases}xy, & x>0,\\ x+y, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $x \bigtriangledown y=\begin{cases}2\times x-3\times y, & x>1,\\ x+y-1, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 根据该运算法则，5 △（3 ▽ 8）的值为（　　）。

A. –18　　　　B. 35

C. 50　　　　D. –90

【例 5】在初等数学加、减、乘、除运算的基础上，假设一种新的运算符号“*”，规定 $x*y=(x+y)\div 4$，若（3*a）–2=10*2，则 a 的值是（　　）。

A. 17　　　　B. $\frac{22}{3}$

C. 93　　　　D. $\frac{5}{3}$

二、等差数列

特征：相邻两项的差相等

等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)\times d$

等差数列求和公式：$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n=$ 中位数 × 项数 = 平均数 × 项数

【例 6】某工厂对 13 名工人进行技能评比，13 名工人的成绩恰好成等差数列，所有人的平均成绩为 87 分，后 7 名的成绩之和为 567 分，则第 1 名的成绩是（　　）分。

A. 100　　　　B. 99

C. 98　　　　D. 97

【例 7】前 100 个既能被 2 整除又能被 3 整除的正整数之和为（　　）。

A. 30296　　　　B. 30300

C. 30312　　　　D. 30306

第五节　典型几何问题

1. 规则图形

2. 不规则图形

常用周长公式：

$C_{正方形}=4a$；$C_{长方形}=2(a+b)$；$C_{圆}=2\pi R$

常用面积公式：

$S_{正方形}=a^2$；$S_{菱形}$=对角线乘积÷2；$S_{长方形}=ab$；$S_{平行四边形}=ah$；

$S_{三角形}=\frac{1}{2}ah$；$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$；$S_{圆}=\pi R^2$；$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2$

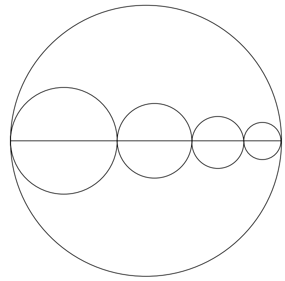
常用表面积公式：

$S_{正方体}=6a^2$；$S_{长方体}=2ab+2bc+2ac$；$S_{球}=4\pi R^2$；$S_{圆柱}=2\pi R^2+2\pi Rh$

常用体积公式：

$V_{正方体}=a^3$；$V_{长方体}=abc$；$V_{柱体}=Sh$；$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$；$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

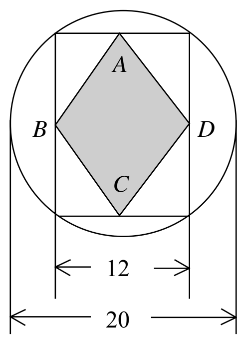
【例 1】如图所示，一半径为 10 厘米的大圆内有四个圆心在大圆同一直径上的彼此相切的小圆，则此四个小圆的周长之和是（　　）厘米。



A. 100π　　　　　　　　B. 40π

C. 20π　　　　　　　　D. 25π

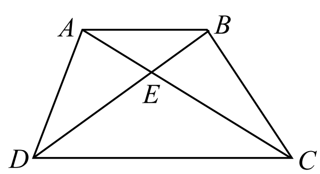
【例 2】在如图所示的圆形广场上举办一个市民文艺活动，参加活动的 n 名市民排成如图中 $ABCD$ 的菱形方阵（图中数字单位为米）。已知方阵面积为 m 平方米，且 $n=2m$，则 n 的值为（　　）。



A. 96　　　　　　　　B. 120

C. 192　　　　　　　　D. 240

【例 3】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，AB 与 CD 的边长分别为 4 厘米和 8 厘米。已知三角形 ABE 的面积为 4 平方厘米，那么四边形 $ABCD$ 的面积为多少平方厘米？（　　）



A. 24　　　　B. 30

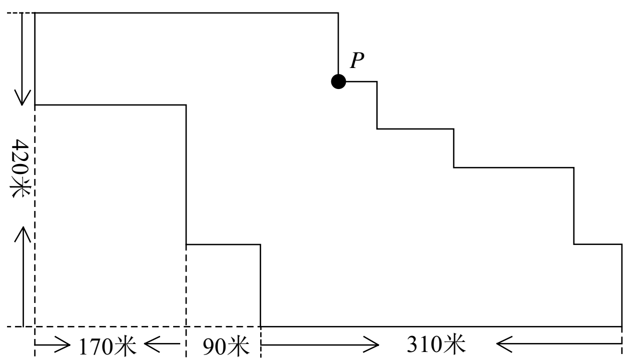
C. 32　　　　D. 36

【例 4】有一块直角梯形形状的草地，上底与下底的长度之比为 3 ： 4，现在要扩充其面积，将上底增加了 15 米，下底变成以前的 2 倍，正好变成一个正方形。问原来草地的面积是多少平方米？(　　)

A. 252　　　　B. 268

C. 289　　　　D. 324

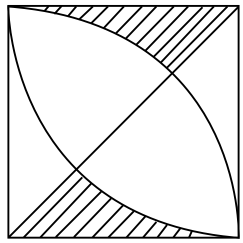
【例 5】张先生习惯每天晚饭后出门散步，以下是他某天用手机 App 记录的散步路径，其中 P 点为起始点和终点，假设张先生每分钟走 60 米，若中间不停留，他走一圈需要(　　)。



A. 17 分钟　　　　B. 33 分钟

C. 25 分钟　　　　D. 30 分钟

【例 6】某小区规划建设一块边长为 10 米的正方形绿地。如图所示，以绿地的 2 个顶点为圆心，边长为半径分别作扇形，把绿地划分为不同的区域。小区现准备在图中阴影部分种植杜鹃，则杜鹃种植面积为(　　)平方米。



A. 100–25π　　B. 200–35π

C. 200–50π　　D. 100π–100

第六节　排列组合与概率

一、排列组合

加法原理：分类用加法（一步完成）
乘法原理：分步用乘法（一步完不成）

排列：与顺序有关（改变顺序，结果变化）
组合：与顺序无关（改变顺序，结果不变）

【例 1】某食堂每天午餐提供套餐，包含主食和肉菜各 1 种，青菜 2 种。用餐者可以从 2 种主食，2 种肉菜和 3 种青菜中进行选择，那么食堂每天售出的套餐中有（　　）种可能的搭配。

A. 7　　B. 9

C. 12　　D. 24

【例 2】某校庆晚会上，对 6 个不同节目排演出顺序，若节目甲只能排在最前，节目乙不能排在最后，则共有多少种不同的排法？（　　）

A. 120　　B. 96

C. 78　　　　D. 24

【例 3】从 19、20、21、…、98、99 这 81 个数中，选取两个不同的数，使其和为偶数的选法有（　　）种。

A. 1620　　　　B. 1580

C. 1540　　　　D. 1600

【例 4】单位 3 个科室分别有 7 名、9 名和 6 名职工。现抽调 2 名来自不同科室的职工参加调研活动，问有多少种不同的挑选方式？（　　）

A. 146　　　　B. 159

C. 179　　　　D. 286

二、概率

1. 基本公式：概率 $=\dfrac{\text{满足条件的情况数}}{\text{总情况数}}$

2. 分类分步概率

分类概率公式：概率 = 各类概率的和

分步概率公式：概率 = 各步概率的乘积

3. 逆向思维概率公式：概率 =1− 不满足条件的概率

【例 5】某单位共 100 人，男女比例为 3 ∶ 2，未婚的有 30 人，现随机抽取一人，结果为已婚男性的最大概率是（　　）。

A. 0.4　　　　B. 0.42

C. 0.18　　　　D. 0.6

【例 6】乒乓球队员甲、乙技术水平相当，为一决胜负，他俩需进行五局比赛，规

定五局三胜者为胜。已知前两局比赛甲获胜，这时乙最终获胜的概率是（　　）。

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{6}$

【例 7】甲、乙两人进行定点投篮比赛，各投两次，投中次数多的获胜。已知甲投中的概率为 0.7，乙投中的概率为 0.6，则比赛中，乙战胜甲的概率为（　　）。

A. 小于 0.1　　B. 在 0.1 ～ 0.2 之间

C. 在 0.2 ～ 0.3 之间　　D. 大于 0.3