2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 下列函数中，在 $x=0$ 错误!未找到引用源。处不可导的是（　）。

A. $f(x)=|x|\sin(|x|)$　　B. $f(x)=|x|\sin(\sqrt{|x|})$

C. $f(x)=\cos(|x|)$　　D. $f(x)=\cos(\sqrt{|x|})$

【答案】D

【解析】

A 可导：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin(|x|)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\cdot\sin x}{x}=0,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin(|x|)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin x}{x}=0$$

B 可导：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin\sqrt{-x}}{x}=0,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

C 可导：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0,\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

D 不可导：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(-x)}{x}=\frac{1}{2},\ f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

2 .已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$, 则

A.当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　B. 当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　D. 当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

【答案】D

【解析】

A 错误：$f\left(x\right)=-x+\frac{1}{2},\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(-x+\frac{1}{2}\right)dx=0,\ f'\left(x\right)=-1<0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

B 错误：

$$f\left(x\right)=-x^2+\frac{1}{3},\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(-x^2+\frac{1}{3}\right)dx=0,\ f''\left(x\right)=-2<0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}>0$$

C 错误：$f\left(x\right)=x-\frac{1}{2},\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0,\ f'\left(x\right)=1>0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

D 正确：方法 1：由 $f''\left(x\right)>0$ 可知函数是凸函数，故由凸函数图像性质即可得出 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

方法 2：

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2,\xi\text{介于}x\text{和}\frac{1}{2}\text{之间},$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2\,dx=f(\frac{1}{2})+f''(\xi)\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2\,dx=0$$

又$f''(x)>0$,故$f(\frac{1}{2})<0$.

3.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx,$ 则

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$

C. $K>M>N$　　D. $K>N>M$

【答案】C

【解析】

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$1+\sqrt{\cos x}\ge 1$,所以$K>M$

令$f(x)=1+x-e^x,\ f(0)=0,\ f'(x)=1-e^x$

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)<0$;当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$时，$f'(x)>0$

所以$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，有$f(x)\le 0$，从可有$\frac{1+x}{e^x}\le 1$，由比较定理得N<M,故选C

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导，其中 Q 为产量，若产量为 Q_0 时平均成本最小，则( )

A. $C'(Q_0)=0$ B. $C'(Q_0)=C(Q_0)$ C. $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$ D. $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

【答案】D

【解析】根据平均成本 $\bar{C}=\dfrac{C(Q)}{Q}$，根据若产量为 Q_0 时平均成本最小，则有

$$(\bar{C})'\Big|_{Q=Q_0}=\frac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}\Bigg|_{Q=Q_0}=\frac{C'(Q_0)Q_0-C(Q_0)}{Q_0^{\ 2}}=0\Rightarrow C'(Q_0)Q_0=C(Q_0)$$

5.下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】方法一：排除法

令 $Q=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，特征值为 1,1,1，$r(E-Q)=2$

选项 A：令 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A$ 的特征值为 1,1,1，$r(E-A)=r\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=2$

选项 B：令 $B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B$ 的特征值为 1,1,1，$r(E-B)=r\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=1$

选项 C：令 $C=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C$ 的特征值为 1,1,1，$r(E-C)=r\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$

选项 B：令 $D=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$D$的特征值为 1,1,1，$r\left(E-D\right)=r\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$

若矩阵 Q与 J 相似，则矩阵 $E-Q$ 与 $E-J$ 相似，从而 $r\left(E-Q\right)=r\left(E-J\right)$，故选（A）

方法二：构造法（利用初等矩阵的性质）

令 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$P^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似

故选（A）

6.设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则

A. $r(A\quad AB)=r(A)$.　　B. $r(A\quad BA)=r(A)$.

C. $r(A\quad B)=\max\{r(A),\ r(B)\}$.　　D. $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$.

【答案】（A）

【解析】$r(E,B)=n\Rightarrow r(A,AB)=r[A(E,B)]=r(A)$

故选（A）

7.设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f\left(x\right)dx=0.6$，则 $P\{X<0\}=$

A.0.2　　B.0.3

C.0.4　　D.0.6

【答案】A

【解析】特殊值法：由已知可将 $f(x)$ 看成随机变量 $X\sim N\left(1,\sigma^2\right)$ 的概率密度，根据正态分布的对称性，$P\left(X<0\right)=0.2$

8.已知 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随即样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},S^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则

A. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n)$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$

C. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n)$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n-1)$

【答案】B

【解析】$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(1,0), \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

又 $\bar{X}$与S^2 相互独立，所以 $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S} \sim t(n-1)$，故选项 B 正确，而 A 错.

$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \dfrac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$，$\bar{X}$与$S^{*2}$ 相互独立

所以 $\dfrac{n\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sqrt{n-1}S^*} \sim t(n)$，故选项 C，D 错。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 曲线 $f(x)=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________________.

【答案】$y=4x-3$

【解析】$y=x^2+2\ln x$，定义域为$\{x|x>0\}$，$y'=2x+\dfrac{2}{x}$，$y''=2-\dfrac{2}{x^2}$，令 $y''=0$，则 $x_0=\pm1$，由于 $x>0$，故 $x_0=1$，故拐点为$(1,1)$，$y'(x_0)=4$，则过拐点$(1,1)$的切线方程为 $y-1=4(x-1)$ 即 $y=4x-3$.

10. $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=$____________.

【答案】$e^x\arccos e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

【解析】

$$\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=\int\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,de^x \underline{\underline{t=e^x}} \int\arcsin\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\underline{\underline{t=\cos u}} = -\int u\sin u\,du = u\cos u-\int\cos u\,du = u\cos u-\sin u+C$$

$$=e^x\arccos e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$$

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的解为__________________.

【答案】 $y_x=C_1+C_2 2^x-5$

【解析】

$\Delta^2 y_x - y_x = 5 \Rightarrow y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$,特征方程为：$r^2-2r=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=2$,

齐次形式的通解：$C_1+C_2 2^x$,由于$f(x)=5$,故特解设为$y^*=a$,代入得$a=-5$

综上，通解为$y=C_1+C_2 2^x-5$

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=2$，则 $f(1)=$___

【答案】2e

【解析】

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)\Rightarrow f'(x)=2xf(x),$$
$$\Rightarrow f(x)=Ce^{x^2}\ C=f(0)=2\Rightarrow f(x)=2e^{x^2}\Rightarrow f(1)=2e$$

13.设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则 A 的实特征值为______________.

【答案】2

【解析】$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,$\therefore P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆,$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}=B$

$\therefore A$与B相似，特征值相等

$|\lambda E-B|=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+3)=0\Rightarrow$实特征值 $\lambda=2$

14.已知事件 A,B,C 相互独立,且 $p(A)=p(B)=p(C)=\dfrac{1}{2}$,则 $p(AC|A\cup B)=$______

【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】

$$P(AC|A\cup B)=\frac{P(AC\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC\cup ABC)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC)+P(ABC)-P(ABC)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{1}{3}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求 a,b

【答案】$a=1$，$b=1$

【解析】方法 1：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\ln_{t\to0^+}\frac{(a+bt)e^t}{t}-\frac{1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(a+bt)(1+t+o(t))-1}{t}=\ln_{t\to0^+}\frac{(a-1)+(a+b)t+o(t)}{t}=2$$

故 $\begin{cases}a-1=0\\a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

方法 2：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}(ax+b)\{[1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})]-x\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(a-1)x+a+b+\frac{b}{x}+(ax+b)o(\frac{1}{x})]=2.$$

故 $\begin{cases}a-1=0\\a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

16.求 $\iint\limits_D x^2\,dxdy, D$ 由 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与 $y=\sqrt{3}x$ y 轴围成

【答案】$\frac{\sqrt{3}\pi}{32}-\frac{\sqrt{3}}{16}$

【解析】$\iint\limits_D x^2\,dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2\,dy=\frac{\sqrt{3}\pi}{32}-\frac{\sqrt{3}}{16}$

17.一根绳长 2m,截成三段，分别拆成圆、正三角形、正方形，这三段分别为多长时所得的面积总和最小，并求该最小值。

【答案】

【解析】假设圆的半径为 x，正方形边长为 y，正三角形边长为 z，则有

$$2\pi x+4y+3z=2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$$

令 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$

$$f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2\pi x+2\pi\lambda=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+4\lambda=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0 \\ 2\pi x+4y+3z-2=0 \end{cases}$$

求解上述方程得到，驻点为 $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(1,2,2\sqrt{3})$

最小面积为， $S_{\min}=\pi\left(\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$。

18.已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，求 a_n

【答案】

【解析】 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，

根据 $\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}t^{2n}$，则 $\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}2^{2n}x^{2n}$；

根据 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，则 $-\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n x^{n-1}$；

根据 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，左右两边同此项系数相同，

n 为奇数时，$a_n=(-1)^{n+1}(n+1)=n+1$；

n 为偶数时，$a_n=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n!}2^n+(-1)^{n+1}(n+1)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n!}2^n-n-1$

综上 $a_n=\begin{cases} n+1, n\text{为奇数} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n!}2^n-n-1, & n\text{为偶数} \end{cases}$

19.数列$\{x_n\}, x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1, n=1,2,\ldots$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

【解析】

(1)有界性：由 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 有 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\Rightarrow x_{n+1}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$

则 $x_2=\ln\frac{e^{x_1}-1}{x_1}$

设 $f(x)=e^x-1-x$

$\because f'(x)=e^x-1>0(x>0)$,且 $f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 单调递增,故 $f(x)>0$ 而 $e^x-1>x(x>0)$

因此$\frac{e^{x_1}-1}{x_1}$在 x_1 时大于 1,而 $x_2=\ln\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>0$,

用数学归纳法可证之. 对$\forall n, x_n>0$

单调性： $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}$

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$，$\because g'(x)=-xe^x$

显然当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$, 则 $g(x)$ 单调递减，又$\because g(0)=0$

$\therefore g(x)<g(0)=0, \therefore e^x-1<xe^x\Rightarrow\frac{e^x-1}{xe^x}<1$

$\therefore x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<0, n=1,2,3,\cdots$

故$\{x_n\}$单调递减

综上可知$\{x_n\}$单调递减且存在下届，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，

$ae^a=e^a-1$.故$a=0$

20. （本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数。

（1） 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

（2） 求 $f(x_1,x_2,x_3)$的规范形

【解析】

（1）$\because f(x_1,x_2,x_3)=0$

$$\therefore \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a-2\end{bmatrix}$$

①当$a-2=0$，即$a=2$时，$r(A)=2<3, A\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=0$有非零解

通解为$x=k\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, k\in R$

②当$a-2\neq 0$，即$a\neq 2$时，$r(A)=3, f(x_1,x_2,x_3)=0$只有 0 解

即 $x_1=x_2=x_3=0$

(2)由（1）可得：当 $a\neq 2$ 时

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{bmatrix},|A|\neq 0$$

$\therefore$令 $y=Ax$ 为非退化的线性变换

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

当 $a=2$ 时

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$

$$=2\left(x_1-\frac{x_2+3x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$$

令:

$$\begin{cases}y_1=x_1-\dfrac{x_2+3x_3}{2}\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}$$

$\therefore$二次型的标准型为 $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2$

$\therefore$二次型的规范型为 $z_1^2+z_2^2$

21. （本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

（1） 求 a

（2） 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

【答案】

（1） $a=2$

（2） $P=\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$， $k_2\neq k_3,k_1,k_2,k_3\in R$

【解析】

（1）

$\because$ 矩阵 A 经过初等列变换得到矩阵 B

$\therefore$ 矩阵 A, B 等价

$\therefore r(A)=r(B)$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2-a\end{bmatrix}$$

$\therefore 2-a=0, a=2$

（2）

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1 & 2 & a & 1 & a & 2\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-6k_1+3\\ 2k_1-1\\ k_1\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}-6k_2+4\\ 2k_2-1\\ k_2\end{bmatrix}, Z=\begin{bmatrix}-6k_3+4\\ 2k_3-1\\ k_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & k_3-k_2\end{bmatrix}$$

$\because P$ 可逆，$\therefore k_2\neq k_3$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}，\ k_2\neq k_3, k_1, k_2, k_3\in R$$

22.已知随机变量 X, Y 相互独立，且 $P(X=1)=P(X=-1)=\dfrac{1}{2}, Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，$Z=XY$。

（1）求 $Cou(X,Z)$　　　　（2）求 Z 的分布律

【解析】

$(1).\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,XY)=EX^2Y-EXEXY=EY=\lambda$

(2). Z的所有可能取值为$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

$$P(Z=k)=P(X\cdot Y=k)=P(XY=k\mid X=1)P(X=1)+P(XY=k\mid x=-1)P(X=-1)$$

$$=P(XY=k, X=1)+P(XY=k, X=-1)$$

$$=P(Y=k, X=1)+P(Y=-k, X=-1)$$

$$=\frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k)$$

当 $k=0: P(Z=0)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$

当 $k<0: P(Z=k)=0+\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{-k}}{2(-k)!}e^{-\lambda}$

当 $k>0: P(Z=k)=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-k}}{k!}e^{-\lambda}+0=\frac{\lambda^{-k}}{2k!}e^{-\lambda}$

23.已知总体 X 的密度函数为 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty<x<+\infty$

$X_{1,} X_2, \ldots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，σ 为大于 0 的参数，σ 的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$

（1）求$\hat{\sigma}$　　（2）求 $E\hat{\sigma}, D\hat{\sigma}$

【解析】对于样本值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$

（1）似然函数为 $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$

$$\frac{\partial\ln L(\sigma)}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=0$$

解得 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$

$\therefore\sigma$ 的最大似然估计量为 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$

（2） $E(\sigma)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\sigma$

$D(\sigma)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\frac{1}{n}D(|X|))=\frac{1}{n}[E(X^2)-(E(|X|))^2]$

其中 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=2\sigma^2$ $,\therefore D(\sigma)=\frac{\sigma^2}{n}$.