河南省名校联盟　2018 届高三适应性考试（一）

数学（理科）

第Ⅰ卷（共 60 分）

一、选择题：本大题共 **12** 个小题 **,** 每小题 **5** 分 **,** 共 **60** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x\le -1或x\ge 1\}$，集合 $B=\{x|0<x<1\}$，则（　　）

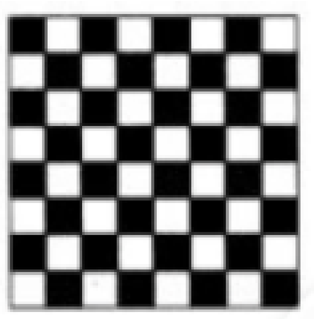
A．$A\cap B=\{1\}$　　B．$A\cap \complement_R B=A$　　C．$(\complement_R A)\cap B=(0,1]$

D．$A\cup B=\mathbf{R}$

2. 复数 $z=\dfrac{2}{1+i}$，则 $z^2=$（　　）

A．-2　　B．2　　C．$-2i$　　D．$2i$

3. 如图所示为一个 8×8 的国际象棋棋盘，其中每个格子的大小都一样，向棋盘内随机抛撒 100 枚豆子，则落在黑格内的豆子总数最接近（　　）



A．40　　B．50　　C．60　　D．64

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_3=a_4=4$，则 $a_6=$（　　）

A．6　　B．± 8　　C．-8　　D．8

5. 空间中有不重合的平面 α，β，γ 和直线 a，b，c，则下列四个命题中正确的有（　　）

p_1：若 $\alpha\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\gamma$，则 $\beta/\!/\gamma$；

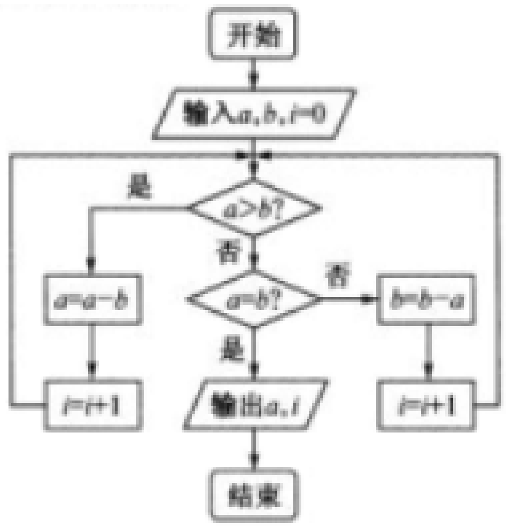
p_2：若 $a\perp b$ 且 $a\perp c$，则 $b/\!/c$；

p_3：若 $a\perp\alpha$ 且 $b\perp\alpha$，则 $a/\!/b$；

p_4：若 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$.

A．p_1，p_2　　B．p_2，p_3　　C．p_1，p_3　　D．p_3，p_4

6.《九章算术》中介绍了一种“更相减损术”，用于求两个正整数的最大公约数，将该方法用算法流程图表示如下，若输入 $a=20$，$b=8$，则输出的结果为（ ）

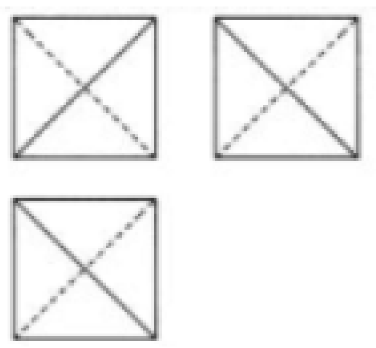


A．$a=4$，$i=3$　　B．$a=4$，$i=4$　　C．$a=2$，$i=3$　　D．$a=2$，$i=4$

7．已知 $\int_1^e\left(\frac{1}{x}-m\right)dx=\frac{3-e}{2}$，则 m 的值为（ ）

A．$\frac{e-1}{4e}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-1

8．已知某几何体的外接球的半径为 $\sqrt{3}$，其三视图如图所示，图中均为正方形，则该几何体的体积为（ ）



A．16　　B．$\frac{16}{3}$　　C．$\frac{8}{3}$　　D．8

9．变量 x，y 满足 $\begin{cases}x+y\le 2\\2x-y\ge -2\\2y-x\ge 1\end{cases}$，则 $z=3y-x$ 的取值范围为（ ）

A．$[1,2]$　　B．$[2,5]$　　C．$[2,6]$　　D．$[1,6]$

10．在 $(x^2+1)^2(x-1)^6$ 的展开式中，x^3 项的系数为（ ）

A．32　　B．-32　　C．-20　　D．-26

11．过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点作一条斜率为 1 的直线交抛物线于 A，B 两点向 y 轴引垂线交 y 轴于 D，C，若梯形 $ABCD$ 的面积为 $3\sqrt{2}$，则 $p=$（ ）

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

12. 若对于任意的 $0<x_1<x_2<a$，都有 $\frac{x_2\ln x_1-x_1\ln x_2}{x_1-x_2}>1$，则 a 的最大值为（　　）

A．$2e$　　　B．e　　　C．1　　　D．$\frac{1}{2}$

第Ⅱ卷（共 **90** 分）

二、填空题（每题 **5** 分，满分 **20** 分，将答案填在答题纸上）

13. 已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，$\vec{b}\perp(4\vec{a}+\vec{b})$，则 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=$__________.

14. 已知圆 O：$x^2+y^2=1$，点 $A\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$，$B\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，记射线 OA 与 x 轴正半轴所夹的锐角为 α，将点 B 绕圆心 O 逆时针旋转 α 角度得到点 C，则点 C 的坐标为 __________.

15. 以双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两焦点为直径作圆，且该圆在 x 轴上方交双曲线于 A，B 两点；再以线段 AB 为直径作圆，且该圆恰好经过双曲线的两个顶点，则双曲线的离心率为__________.

16. 数列 $b_n=a_n\cos\frac{n\pi}{3}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_{2015}=1$，$S_{2016}=0$，若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $S_{2017}=$__________.

三、解答题 （本大题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

17. 锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，且满足 $R=\frac{2}{3}a\sin A$．

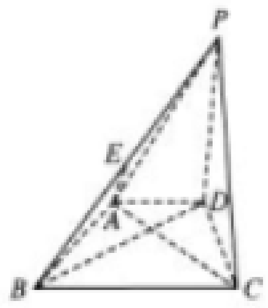
（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=2$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值．

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$\triangle PDC$ 和 $\triangle BDC$ 均为等边三角形，且平面 $PDC\perp$ 平面 BDC，点 E 为 PB 中点．

（1）求证：AE // 平面 PDC；

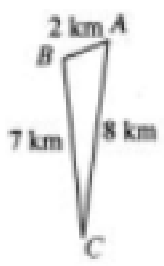
（2）求平面 PAB 与平面 PBC 所成的锐二面角的余弦值．

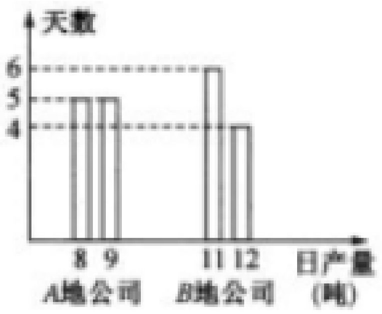


19. 某建材公司在 A，B 两地各有一家工厂，它们生产的建材由公司直接运往 C 地.由于土路交通运输不便，为了减少运费，该公司预备投资修建一条从 A 地或 B 地直达 C 地的公路；若选择从某地修建公路，则另外一地生产的建材可先运输至该地再运至 C 以节约费用 .已知 A，B 之间为土路，土路运费为每吨千米 20 元，公路的运费减半，A，B，C 三地距离如图所示 .为了制定修路计划，公司统计了最近 10 天两个工厂每天的建材产量，得到下面的柱形图，以两个工厂在最近 10 天日产量的频率代替日产量的概率 .

（1）求“A，B 两地工厂某天的总日产量为 20 吨”的概率；

（2）以修路后每天总的运费的期望为依据，判断从 A，B 哪一地修路更加划算 .





20. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的上下左右四个顶点分别为 A，B，C，D，x 轴正半轴上的某点 P 满足 $|PA|=|PD|=2$，$|PC|=4$.

（1）求椭圆的标准方程以及点 P 的坐标；

（2）过点 C 作直线 l_1 交椭圆于点 Q，过点 P 作直线 l_2 交椭圆于点 M，N，且 $l_1\parallel l_2$，是否存在这样的直线 l_1，l_2 使得 ΔCDQ，ΔMNA，ΔMND 的面积相等？若存在，请求出直线的斜率；若不存在，请说明理由 .

21. 已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2+ax$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)\le 0$ 恒成立，求 a 的取值范围 .

请考生在 **22**、**23** 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22. 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \theta_0$（$\rho \in \mathbf{R}$），曲线 C 与直线 l 相交于 A，B 两点.

（1）当 $\theta_0 = \frac{\pi}{12}$ 时，求 $|AB|$；

（2）设 AB 中点为 P，当 θ_0 变化时，求点 P 轨迹的参数方程.

23. 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x + a| + |x + 1|$.

（1）当 $a = -1$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $2a$，求 a 的值.

数学（理科）参考答案

一、选择题

1-5:BCBDD　　6-10:ABCDB　　11、12：AC

二、填空题

13. 2　　14. $\left(-\frac{56}{65},\frac{33}{65}\right)$　　15. $\sqrt{2}$　　16. $-\frac{1}{2}$

三、解答题

17. 解：（1）由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=2R$，

再结合 $R=\frac{2}{3}a\sin A$，得 $\frac{a}{2\sin A}=\frac{2}{3}a\sin A$，

解得 $\sin^2 A=\frac{3}{4}$，由 ΔABC 为锐角三角形，得 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由 $a=2$、$A=\frac{\pi}{3}$ 及余弦定理，得 $4=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $(b+c)^2=4+3bc$，

结合 $bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$，得 $(b+c)^2\le 4+3\times\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$，

解得 $b+c\le 4$（当且仅当 $b=c$ 时取等号），

所以 $a+b+c=2+b+c\le 2+4=6$（当且仅当 $b=c$ 时取等号），

故当 ΔABC 为正三角形时，ΔABC 周长的最大值为 6.

18. 解：（1）过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 PC 于点 F，连接 DF；

取 BC 的中点 G，连接 DG

$\because$ DG 是等边 ΔBCD 底边 BC 的中线,

$\therefore \angle DGB=90^\circ$.

$\because \angle ABC=\angle BAD=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 为矩形,

$\therefore AD=BG=\frac{1}{2}BC$，$AD \parallel BC$.

$\because$ EF 为 ΔBCP 底边 BC 的中位线

$\therefore EF=\frac{1}{2}BC$，$EF \parallel BC$，

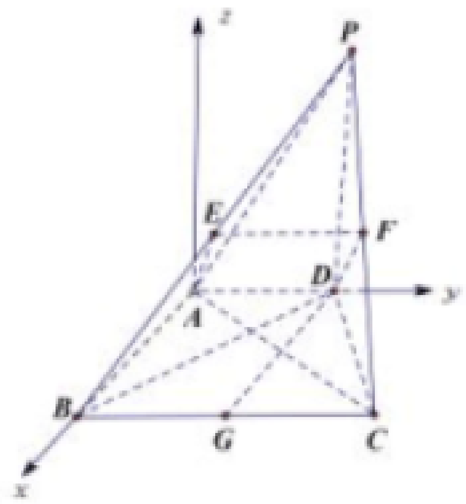
$\therefore AD=EF$，$AD \parallel EF$，

四边形 ADFE 是平行四边形,

$\therefore AE // DF$,

$\because DF \subseteq$ 面 PDC ,

$\therefore AE //$ 面 PDC .



（2）以点 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴正方向, $|\overrightarrow{AD}|$ 为单位长度建立空间直角坐标系 $A-xyz$

如图所示，各个点的坐标为 $A(0,0,0)$, $B(\sqrt{3},0,0)$, $C(\sqrt{3},2,0)$, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$

因此向量 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},0,0)$, $\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$.

设面 ABP 、面 CBP 的法向量分别为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{3}{2}y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$ ，不妨令 $y_1=1$，解得 $\vec{m}=\left(0,1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 同理得 $\vec{n}=(2,0,1)$

设平面 PAB 与平面 PBC 所成的锐二面角为 θ,

则 $\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{105}}{35}$

19. 解：（1）设“A、 B 两地公司总日产量为 20 吨”为事件 C ,

则 $P(C)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{2}$.

（2）同样可求 A、 B 两地工厂某天的总日产量为 19 吨, 21 吨的概率分别为 $\frac{3}{10}$、$\frac{1}{5}$.

若从 A 地修路，从 B 地到 A 地每天的运费的期望为：

$2\times\left(11\times\frac{6}{10}\times20+12\times\frac{4}{10}\times20\right)=456$（元）.

从 A 地到 C 地每天的运费的期望为：

$19\times\frac{3}{10}\times8\times10+20\times\frac{1}{2}\times8\times10+21\times\frac{1}{5}\times8\times10=1592$（元）.

所以从 A 地修路，每天的总运费的期望为：$456+1592=2048$（元）.

若从 B 地修路，从 A 地到 B 地每天的运费的期望为：$2\times\left(8\times\frac{5}{10}\times20+9\times\frac{5}{10}\times20\right)=340$.

从 B 地到 C 地每天的运费的期望为：

$19\times\frac{3}{10}\times7\times10+20\times\frac{1}{2}\times7\times10+21\times\frac{1}{5}\times7\times10=1393$（元）.

所以从 B 地修路，每天的总运费的期望为：$340+1393=1733$（元）.

所以从 B 地修路更划算.

20. 解：（1）设点 P 的坐标为 $(x_0,0)$（$x_0>0$），易知 $2a=2+4$，$a=3$，

$x_0=4-a=1$，$b=\sqrt{2^2-x_0^2}=\sqrt{3}$.

因此椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$，P 点坐标为 $(1,0)$.

（2）设直线的斜率为 k，$Q(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 l_1：$y=k(x+3)$，l_2：

$y=k(x-1)$

ΔMNA、ΔMND 的面积相等，则点 A，D 到直线 l_2 的距离相等.

所以 $\frac{\left|-\sqrt{3}-k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3k-k|}{\sqrt{k^2+1}}$，解之得 $k=\sqrt{3}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $k=\sqrt{3}$ 时，直线 l_2 的方程可化为：$x=\frac{y}{\sqrt{3}}+1$，代入椭圆方程并整理得：

$5y^2+\sqrt{3}y-12=0$，所以 $\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{\sqrt{3}}{5}, \\ y_1y_2=-\frac{12}{5} \end{cases}$

所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{9\sqrt{3}}{5}$；

所以 ΔMND 的面积为 $\frac{1}{2}|PD|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times2\times\frac{9\sqrt{3}}{5}=\frac{9\sqrt{3}}{5}$.

当 $k=\sqrt{3}$ 时，直线 l_1 的方程可化为： $x=\frac{y}{\sqrt{3}}-3$，代入椭圆方程并整理得：

$5y^2-3\sqrt{3}y=0$，解之得 $y_0=\frac{3\sqrt{3}}{5}$ 或 $y_0=0$（舍）

所以 ΔCDQ 的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times\frac{3\sqrt{3}}{5}=\frac{9\sqrt{3}}{5}$.

所以 $S_{\Delta CDQ}=S_{\Delta MND}$，满足题意,

②当 $k=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ 时，直线 l_2 的方程为： $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$，代入椭圆方程并整理得：

$x^2-x-4=0$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\x_1x_2=-4,\end{cases}$

所以 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{51}}{3}$ ；

又 D 点到直线 l_2 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\times(3-1)\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=1$

所以 ΔMND 的面积为 $\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2\sqrt{51}}{3}=\frac{\sqrt{51}}{3}$.

当 $k=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ 时，直线 l_1 的方程可化为： $x=-\sqrt{3}y-3$，代入椭圆方程并整理得：

$y^2+\sqrt{3}y=0$，解之得 $y_0=-\sqrt{3}$ 或 $y_0=0$（舍）

所以 ΔCDQ 的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

所以 $S_{\Delta CDQ}\neq S_{\Delta MND}$，不满足题意 .

综上知，存在这样的直线 l_1，l_2，且直线的斜率为 $\sqrt{3}$.

21. 解：（1）1）当 $a=0$ 时， $f(x)=-x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

2）当 $a\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{-2x^2+ax+a}{x}$.

①当 $a<0$ 时，在定义域 $(0,+\infty)$上，$-2x^2<0$，$ax+a<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

②当 $a>0$时，$f'(x)=0$的解为 $x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}$，$x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2+8a}}{4}<0$（负值舍去），

$f'(x)$在$(0,x_1)$上大于 0，$f(x)$在$(0,x_1)$上单调递增，

$f'(x)$在$(x_1,+\infty)$上小于 0，$f(x)$在$(x_1,+\infty)$上单调递减；

综上所述，当 $a\in(-\infty,0]$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

当$a\in(0,+\infty)$时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$上单调递减；

（2）①当 $a=0$时，$f(x)=-x^2\leq 0$，满足题意；

②当 $a\in(-\infty,-1]$时，$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=a\left(\dfrac{1}{e}-1\right)-\dfrac{1}{e^2}\geq 1-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}>0$，不满足题意；

③当 $a\in(-1,0)$时，$f\left(-\dfrac{a}{e}\right)=a\left[\ln(-a)-\dfrac{1+e}{e^2}a-1\right]$，

由于 $\ln(-a)<0$且 $-1-\dfrac{1+e}{e^2}a<\dfrac{1+e-e^2}{e^2}<0$，

所以 $a\left[\ln(-a)-\dfrac{1+e}{e^2}a-1\right]$为两负数的乘积大于 0，即 $f\left(-\dfrac{a}{e}\right)>0$，不满足题意；

④当 $a\in(0,+\infty)$时，由（1）可知

$$f(x)\leq f\left(\frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)=a\left\{\ln\frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}-1\right]\right\}$$

令 $\dfrac{a+\sqrt{a^2+8a}}{4}=t$，则将上式写为 $f(t)=a\left[\ln t+\dfrac{1}{2}(t-1)\right]$，令 $f(t)=0$，解得 $t=1$，

此时 $a=1$，

而当 $a\in(0,1]$时，$t\leq 1$，$\ln t+\dfrac{1}{2}(t-1)\leq 0$，$f(t)\leq 0$满足题意；

当 $a\in(1,+\infty)$时，$t>1$，$\ln t+\frac{1}{2}(t-1)>0$，$f(t)>0$不满足题意；

综上可得，当 $a\in[0,1]$时，$f(x)\le 0$.

22. 解：（1）将曲线 C 化为直角坐标方程得 $x^2+y^2-4x-4y=0$，易知曲线 C 是一个圆，且过原点 .又直线 l 经过原点，因此 l 与圆的交点之一即为坐标原点 O，

所以 $|AB|=\rho=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{6}$.

（2）设点 $A(0,0)$，$B(x_B,y_B)$，$P(x,y)$，则 $x_B=2x$，$y_B=2y$，

由 B 点在圆上，得 $(2x)^2+(2y)^2-4(2x)-4(2y)=0$，

化简，得 $x^2+y^2-2x-2y=0$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

化成参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数） .

23. 解：（1）当 $a=-1$时，$f(x)=|2x-1|+|x+1|$.

当 $x\le -1$时，$f(x)=-3x$；

当 $-1<x\le\frac{1}{2}$时，$f(x)=2-x$；

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x$.

由单调性知，$f(x)$的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

（2）令 $2x+a=0$，得 $x=-\frac{a}{2}$；令 $x+1=0$，得 $x=-1$.

①当 $-\frac{a}{2}\le -1$，即 $a\ge 2$时，$f(x)=3x+1+a$，$x\in[-1,1]$，

最大值为 $f(1)=4+a=2a$，解得 $a=4$.

②当 $-1<-\frac{a}{2}\le 1$，即 $-2\le a<2$时，$f(x)=\begin{cases}-x-a+1, x\in\left[-1,-\frac{a}{2}\right],\\ 3x+1+a, x\in\left(-\frac{a}{2},1\right].\end{cases}$

其最大值在区间两个端点处取得 .

若 $f(-1)=2-a=2a$，解得 $a=\frac{2}{3}$，此时 $f(1)=\frac{14}{3}>f(-1)=\frac{4}{3}$，舍去；

若 $f(1)=4+a=2a$，解得 $a=4$，舍去；

③当 $-\frac{a}{2}>1$，即 $a<-2$时， $f(x)=-x-a+1$， $x\in[-1,1]$，

最大值为 $f(-1)=2-a=2a$，解得 $a=\frac{2}{3}$，舍去．

综上所述， $a=4$．