“超级全能生”2018 高考全国卷 26 省 9 月联考乙卷（A）

文科解析

1.C【解析】 $z=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$，故选 C.

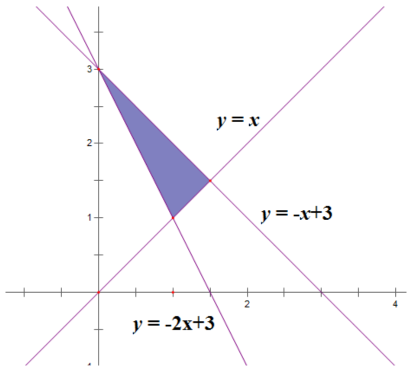
2.D【解析】 $A=\{x|x<4\},B=\{x|x<-1或x>3\}$，所以 $A\cap B=\{x|x<-1或3<x<4\}$，故选 D.

3. C【解析】因为方程 $3x^2+mx+1=0$ 有实根，所以 $\Delta\geq0$，即 $m^2-12\geq0$，所以 $m\geq2\sqrt{3}$ 或 $m\leq-2\sqrt{3}$，又因为 $m\in\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 m=4,5,6，所以所求概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，故选 C.

4.A【解析】此框图的功能就是求两个正数 a，b 的最大公约数，故选 A.

5.D【解析】A 中，命题的否命题应为“若 $x^2-3x-4\neq0$，则 $x\neq4$”，所以 A 不正确；B 中，当 a=2 时，$y=x^2$ 在定义域上不单调，充分性不成立，所以 B 不正确；C 中，因为 $x\in(-\infty,0),3^x>4^x$ 恒成立，所以 C 不正确；D 中，全称命题的否命题是特称命题，所以 D 正确，故选 D.

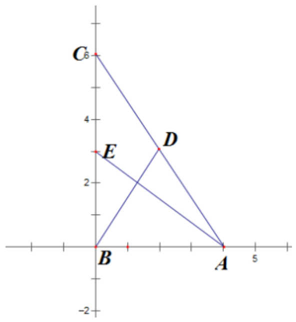
6. B【解析】作出可行域如图中阴影部分（含边界）所示，$z=\frac{y}{x}$ 表示可行域内的点与点（0,0）连线的斜率，由图可得 $k\geq1$，故选 B.



7.A【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(4,0),B(0,0),C(0,6),D(2,3)$.设 $E(0,b)$，

因为 $AE\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，即 $(-4,b)\cdot(2,3)=0$，所以 $b=\dfrac{8}{3}$，

所以 $E\left(0,\dfrac{8}{3}\right),\overrightarrow{AE}=\left(-4,\dfrac{8}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=16$，故选 A.



8.B【解析】将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6\omega}$ 得 $g(x)=2\sin\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{6\omega}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]$，即

$g(x)=2\sin\omega x$ 的图象.所以当 $y=g(x)$ 满足 $\omega x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in Z)$，即

$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{2k\pi}{\omega},\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{2k\pi}{\omega}\right]\ (k\in Z)$ 时，$y=g(x)$ 单调递增.

因为 $y=g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上为增函数，所以 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2\omega}\le-\dfrac{\pi}{6},\\ \dfrac{\pi}{2\omega}\ge\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$ 即 $\omega\le 2$，故选 B.

9.C【解析】由已知得 $a_1=a,a_2=a+d,a_3=(a+d)q,a_4=(a+d)q+d$，由 $a_1.a_3=a_2^2,得 a+d=aq$，由 $a_2.a_4=a_3^2,得(a+d)q^2=(a+d)q+d$，两式联立得 $\begin{cases}d=0,\\ q=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=-2a,\\ q=-1,\end{cases}$ 所以 $a_n=(-1)^{n-1}a$，或 $a_n=a$, 故选 C.

10.C【解析】设 $P(0,m),F(c,0)$，所以直线 $PF\colon\frac{x}{c}+\frac{y}{m}=1$，与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$，联立得 $M\left(\frac{acm}{am+bc},\frac{bcm}{am+bc}\right)$，由 ΔMFO 的面积是 ΔPMO 的面积的 3 倍，得 $\overrightarrow{FM}=3\overrightarrow{MP}$，所以 $m=\frac{bc}{3a}$，所以 $M\left(\frac{c}{4},\frac{bc}{4a}\right)$，以 OP 为直径的圆的方程为 $x^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}$，由点 $M\left(\frac{c}{4},\frac{bc}{4a}\right)$ 满足圆的方

程，得$3a^2=b^2$,所以$\frac{c^2}{a^2}=4$,即$e=2$，故选 C.

11.D【解析】 函数 $f(x)=e^x-a|x|$有三个零点等价于$g(x)=e^x$与$h(x)=a|x|$有三个交点，

当$a\le 0$时，$g(x)=e^x$与$h(x)=a|x|$显然没有交点，不符合题意；当$a>0$时，当$x<0$时，

$g(x)=e^x$与$h(x)=a|x|$有且仅有一个交点；当$x\ge 0$时，$g(x)=e^x$与$h(x)=a|x|$得有两个

交点，即转化为求$h(x)=ax$与$g(x)=e^x$相切时 a 的值,设切点$P(x_0,e^{x_0})$,$g'(x)=e^x$,切线斜

率为 $k=e^{x_0}$,所以切线方程为$y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$,切线过$(0,0)$点，所以$x_0=1$，即$k=e$.

所以当$x\ge 0$时，若$g(x)=e^x$与$h(x)=ax$有两个交点，则$k>e$.综上，函数 $f(x)=e^x-a|x|$有

三个零点时$a>e$，故选 D.

12. A【解析】设球 O 的半径为 R，正四棱锥 $P\text{–}ABCD$ 内切球半径为 r，即

$\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{2}R\right)^2\times R=\frac{1}{3}r\times\left[\left(\sqrt{2}R\right)^2+4\times\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}R\right)^2}{4}\right]$,得$\frac{R}{r}=\sqrt{3}+1$，故选 A.

13. $\pi+8$【解析】该几何体为，前面是底面半径为 1、高为 2 的半个圆柱，后面是棱长为 2 的正方体的组合体，所以体积为$\frac{1}{2}\times\pi\times 2+8=\pi+8$.

14. ± 1【解析】设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 $y=x+b$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 联立得,$2x^2+2bx+b^2-2=0$,所以 $\Delta=(2b)^2-4\times 2\times(b^2-2)=16-4b^2>0$，即$-2<b<2$，则$x_1+x_2=-b$,$x_1x_2=\frac{1}{2}(b^2-2)$,由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$，$x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=b^2-2=-1$,所以$b^2=1$,所以$b=\pm 1$.

15. $\left(0,\frac{9}{8}\right)$【解析】函数$f(x)=\frac{t}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+t$在区间$(0,+\infty)$上既有极大值又有极小值等价于方程$f'(x)$在区间$(0,+\infty)$上有两个互易实根$x_1,x_2$,

由已知,$f'(x)=tx^2-3x+2$，$x_1+x_2=\frac{3}{t}$,$x_1x_2=\frac{2}{t}$,则

$x_1>0,x_2>0,\Delta>0$，即$\begin{cases}\frac{3}{t}>0\\ \frac{2}{t}>0\\ 9-8t>0\end{cases}$,所以 $0<t<\frac{9}{8}$.

16. 2019【解析】对任意的正整数m,n,p,q，当$m+n=p+q$时，都有$a_m-b_n=a_p-b_q$，

所以$a_2-b_1=a_1-b_2$，所以$b_2=-2$，所以$a_{n+1}-b_1=a_n-b_2$，所以$a_{n+1}-a_n=1$，

所以$a_n=n$，所以$a_2-b_n=a_1-b_{n+1}$，所以$b_{n+1}-b_n=-1$，所以$b_n=-n$，

所以$a_n-b_n=2n$，$\frac{1}{2018}\sum_{i=1}^{2018}(a_i-b_i)=\frac{1}{2018}[(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2018}\times$

$2\times\frac{2018\times2019}{2}=2019$.

17.解：（Ⅰ）由$\frac{4}{\sin\angle BAC}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，得$\sin\angle BAC=\frac{1}{2}$,

又$BC<AC$，则$\angle BAC<\frac{\pi}{4}$，解得$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$.

所以$\angle ACB=\frac{7\pi}{12}$，

所以ΔABC的面积$S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\times\sin\frac{7\pi}{12}=4(\sqrt{3}+1)$. ………………6 分

（Ⅱ）设$AB=x$，则在△ABC中，由余弦定理得$32=x^2+16-8x\cos\frac{\pi}{4}$,

即 $x^2-4\sqrt{2}x-16=0$，解得 $x=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$（舍负），$\therefore BD=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

……………9 分

在 ΔBCD中，由余弦定理 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\frac{\pi}{4}=16-4\sqrt{3}$,

………………12 分

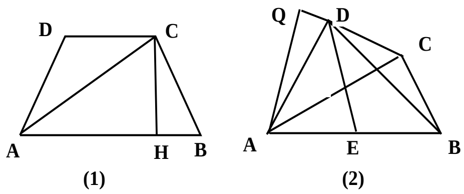
18.解：（Ⅰ）证明：在图 1 中，作 $CH\perp AB$ 于 H，则 $BH=\frac{1}{2}$, $AH=\frac{3}{2}$, 又 $BC=1$, $\therefore CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore CA=\sqrt{3}$，$\therefore AC\perp BC$.

$\because$平面 $ADC\perp$平面 ABC，且平面 $ADC\cap$平面 $ABC=AC$，$\therefore BC\perp$平面 ADC，又 $AD\subset$平面ADC

$\therefore BC\perp AD$. ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）如图 2，∵E 为 AB 的中点，∴E 到平面 BCD 的距离等于 A 到平面 BCD 距离的一半.



而平面 $ADC\perp$平面 BCD，所以过 A 作 $AQ\perp CD$ 于 Q，又由 $AQ\perp BC,BC\cap CD=C$ 则 $AQ\perp$平面 BCD，AQ 就是 A 到平面 BCD 的距离.

由图易得 $AQ=CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴E 到平面 BCD 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………12 分

19．解：(Ⅰ)甲的平均值 $\overline{X_{甲}}=\frac{1}{6}(-1-2+1+2+3+0)+20=20.5$,

乙的平均值$\overline{X_{乙}}=\frac{1}{6}(-2-2.5+0+3+2+2.5)+20=20.5$. …………………………2 分

甲的方差 $S_{甲}^2=\frac{1}{6}[(20.5-19)^2+(20.5-18)^2+(20.5-21)^2+(20.5-22)^2+(20.5-23)^2+(20.5-20)^2]$

$=\frac{35}{12}$.

乙的方差 $S_{乙}^2=\frac{1}{6}[(20.5-18)^2+(20.5-17.5)^2+(20.5-20)^2+(20.5-23)^2+(20.5-22)^2+(20.5-22.5)^2]$

$=\frac{14}{3}$.

因为甲、乙两种手机的平均数相同，甲的方差比乙的方差小，所以认为甲种手机电池质量更好. …………………………………………………6 分

（Ⅱ）由题意得上述 6 部乙种手机中有 3 部手机的供电时间大于该种手机供电时间平均值，记它们分别是 A_1,A_2,A_3,其余的为 a_1,a_2,a_3，

从上述 6 部乙种手机中随机抽取 2 部的所有结果为$(A_1,A_2),(A_1,A_3)$，$(A_1,a_1),(A_1,a_2)$,

$(A_1,a_3),(A_2,A_3),(A_2,a_1),(A_2,a_2),(A_2,a_3)$，$(A_3,a_1),(A_3,a_2),(A_3,a_3)$，$(a_1,a_2)$,

$(a_1,a_3),(a_2,a_3)$，共有 15 种，

其中恰有一部手机的供电时间大于该种手机供电时间平均值的结果为$(A_1,a_1),(A_1,a_2)$,

(A_1,a_3) ,(A_2,a_1),(A_2,a_2),(A_2,a_3)，(A_3,a_1),(A_3,a_2),(A_3,a_3)，共有 9 种，

所以所求概率为 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$． ……12 分

20．解：（Ⅰ)由已知得$\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$,解得 $a=2,b=\sqrt{2}$.

∴椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………………………4 分

(Ⅱ)把 $y=x+m$ 代入 E 的方程得

$3x^2+4mx+2m^2-4=0$,

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{3}$,

$\Delta=8(6-m^2)>0$,$-\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{16m^2}{9}-4\times\frac{2m^2-4}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{6-m^2}$, ……………7 分

设 AB 的中点为 P,则 $x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2m}{3}$,$y_p=m+x_p=\frac{m}{3}$,∴$P(-\frac{2m}{3},\frac{m}{3})$,

∴PC:$y=-x-\frac{m}{3}$,令 $x=0$,则 $C(0,-\frac{m}{3})$,

由题意可知，$|PC|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$,

∴$\sqrt{\frac{4m^2}{9}+\frac{4m^2}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{6-m^2}$,解得 $m=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$. 符合$\Delta>0$,

∴直线 l 的方程为 $y=x\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$. …………………………12 分

21.解：（Ⅰ）∵$h(1)=-\frac{1}{2}a+1=0$，所以$a=2$，

此时$h(x)=\ln x-x^2+x,x>0,h'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{1+x-2x^2}{x}$,

∵$x>0$，由$h'(x)>0$得$0<x<1$，由$h'(x)<0$得$x>1$,

∴$h(x)$的单调增区间是（0,1），单调递减区间是（1，+,∞）…………6 分

（Ⅱ）设$\varphi(x)=m[f(x)-f(m)]-(x-m)$，$x>0$，则$\varphi'(x)=\dfrac{m-x}{x}$，

当$x\in(0,m)$时，$\varphi'(x)>0$，$\therefore\varphi(x)$在$(0,m)$上单调递增，

$\because m>n>0$，$\therefore\varphi(n)<\varphi(m)=0$，即$m[f(n)-f(m)]-(n-m)<0$，$\therefore\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}>\dfrac{1}{m}$，

又$\because m^2+n^2>2mn$，$\therefore\dfrac{2n}{m^2+n^2}<\dfrac{1}{m}$，

$\therefore\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}>\dfrac{2n}{m^2+n^2}$. ………………12 分

22．解：(Ⅰ)把圆 C 的参数方程化为普通方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2$,即 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$,

由 $x^2+y^2=\rho^2,x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

得圆 C 的极坐标方程为$\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+6=0$.

………………5 分

(Ⅱ)设 $P(2+\sqrt{2}\cos\theta,2+\sqrt{2}\sin\theta)$,$A$,$B$ 的直角坐标分别为$(-1,0)$,$(1,0)$,

则$|PA|^2+|PB|^2=(3+\sqrt{2}\cos\theta)^2+(2+\sqrt{2}\sin\theta)^2+(1+\sqrt{2}\cos\theta)^2+(2+\sqrt{2}\sin\theta)^2$

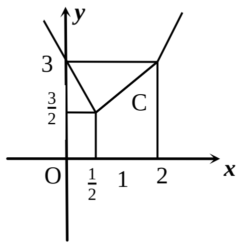
$=22+16\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[6,38]$,

所以$|PA|^2+|PB|^2$ 的取值范围为$[6,38]$. ………………10 分

23．解：(Ⅰ) $f(x)=\begin{cases}-3x+3\left(x\le\frac{1}{2}\right)\\ x+1\left(\frac{1}{2}<x\le2\right)\\ 3x-3(x>2)\end{cases}$,

其图象如图所示,由图可知 $f(x)\ge3$ 的解集为$\{x|x\le0$ 或 $x\ge2\}$.

…………5 分



(Ⅱ)由图知 $f(x)_{\min}=\frac{3}{2}$,$\therefore\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le\frac{3}{2}$. $\therefore\frac{m+n}{mn}\le\frac{3}{2}$,

即 $m+n\le\frac{3}{2}mn\le\frac{3}{2}(\frac{m+n}{2})^2$,当且仅当 $m=n$ 时等号成立，

$\because m,n>0$，解得 $m+n\ge\frac{8}{3}$,当且仅当 $m=n$ 时等号成立，

故 $m+n$ 的最小值为$\frac{8}{3}$.　　　　　　………………10 分