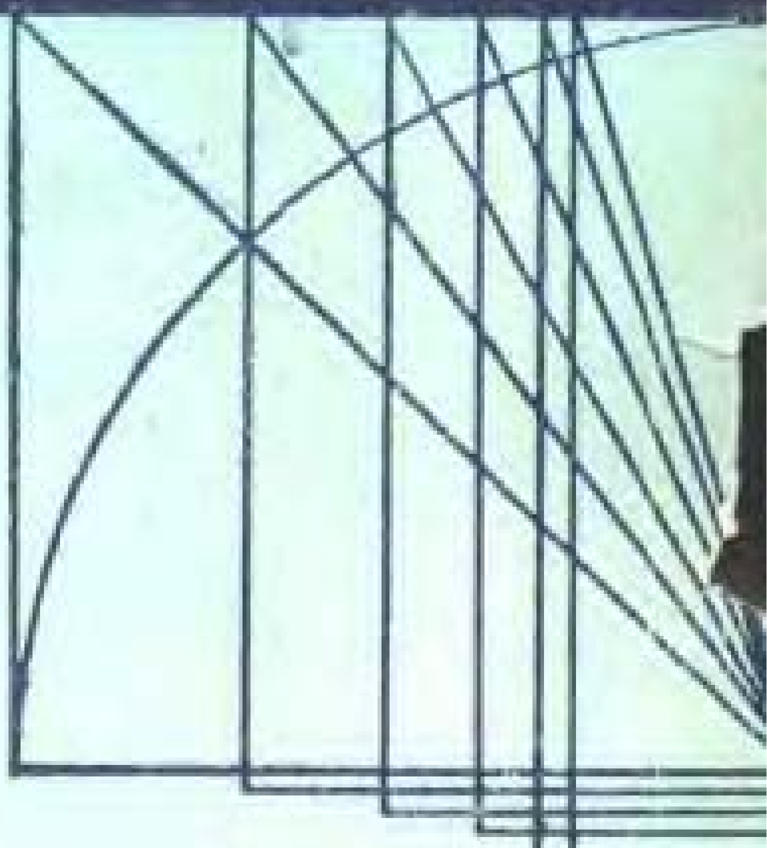
习题集

高等数学导论

GAODENG SHUXUE DAOLUN



中国科学技术大学
高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

责任编辑：刘卫东
封面设计：盛琴琴

ISBN 7-312-00043-6/O·16
书号：13474·16 定价：2.15元

高等数学导论
习题集

中国科学技术大学高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

1988 · 合肥

高等数学导论习题集

中国科学技术大学高等数学教研室　编

责任编辑：刘卫东　　封面设计：盧琴琴

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本：850×1168　1/32　印张：9.875　字数：254千

1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7-312-00043-6/O·16

书号：13474·16　定价：2.15元

内 容 提 要

本书是与《高等数学导论》(下简称"导论")配套使用的。本书与"导论"均是中国科学技术大学三十年来高等数学教学实践的结晶，深受广大同学的喜爱。本书的章节编排与"导论"完全一致，选辑题目从兼重计算技巧和推理论证出发，力图使同学在巩固所学基本理论的同时，锻炼提高计算能力和逻辑推理能力。其外，在概念多的章节中，本书编有复习思考题，帮助同学加深对其的理解和掌握。

本书可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

目　录

第一章　函数的极限

第一节　数　列　极　限

复习思考题

1. 试述数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义，并作出几何解释。

2. 若对于某几个或无穷多个正数ε，存在自然数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，$|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否说$\{a_n\}$以a为极限？为什么？

3. 若对于任意正数ε，存在自然数$N(\varepsilon)$使a_N后有无穷多项满足不等式$|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否说$\{a_n\}$以a为极限？为什么？

4. 对于每一个自然数k，有自然数N_k，当$n>N_k$时，有$|a_n-a|<\dfrac{1}{k}$，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$成立？

5. 对于每一个区间$\left(a-\dfrac{1}{k},\ a+\dfrac{1}{k}\right)$ $(k=1,2,\cdots)$，$\{a_n\}$中只有有限多项位于区间之外，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$？

6. 设$a_n\to a\,(n\to\infty)$，今把$\{a_n\}$的有限多项换成新的数，问新的数列是否收敛？是否仍以a为极限？

7. 试用“$\varepsilon-N$”语言完整地表达：$\{a_n\}$不以a为极限。

8. 数列极限有哪些基本性质？并指出其成立的条件。

9. 收敛数列是否一定有界？有界数列是否一定收敛？无界数列是否有可能收敛？

10. 若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n\pm b_n\}$，$\{a_nb_n\}$的收敛性如何？举例说明。若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$皆发散则情况又如何？

11. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$，又是否能断定

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1$？

12. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，是否能由此推出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$？若再设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，上结论又如何？

13. 已知单调有界数列必收敛，那么收敛的数列是否一定是单调的？举例说明。

14. 若对于任意正数ε，存在N，使当$n>N$时，有$|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$，则是否能断定$\{a_n\}$收敛？举例说明。

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1$，这个等式的错误何在？

16. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n个}=0,$$
这里有没有错误，原因何在？

17. 设$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=a(q>1)$，由于$q^{n+1}=q\cdot q^n$，两边取极限得$a=q\cdot a$，从而$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$(q>1)$。这里有没有错误，原因何在？

习　题

1. 证明：若a为一定点，δ为一正数，则不等式$|x-a|<\delta$与$a-\delta<x<a+\delta$等价。并说明其几何意义。

2. 解下列绝对值不等式：

（1）$|\sqrt{x}-1|<1/2$；　（2）$|x+1|>2$；

（3）$|2x+1|<1$；　（4）$|x-1|<|x+1|$；

（5）$|x^2-2|\leqslant 1$；　（6）$|5-x^{-1}|<1$.

3．试写出下列数列的一般项：

（1）$\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \cdots$

（2）$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

（3）$\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \cdots$

（4）$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$

（5）$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \cdots$

（6）$0, \frac{1}{2}\cos\pi, \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{4}\cos 2\pi, \cdots$

4．试用“$\varepsilon-N$”方法，证明下列各题。

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，并填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
N						

（2）证明$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(0.1)^n=0$，并问$n$从何值开始，使得数列$a_n=(-1)^n(0.1)^n$与其极限之差的绝对值不超过$10^{-5}$？

（3）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5+3n}=\frac{1}{3}$；

（4）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$；

（5）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+4n+5}=\frac{1}{3}$；

（6）证明$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$；

（7）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；

（8）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$，（$a$为任意实常数）。

5. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$。

6. 证明：若数列$\{a_n\}$的奇数项及偶数项都收敛于同一极限a，即$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

7. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$。但反之不一定成立，试举例说明之。但若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。试证之。

8. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，又$|b_n|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$。

9. 从数列$\{a_n\}$中任意挑出无限多项，按照原来序号的大小排成一个数列：

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots,\ a_{n_k},\ \cdots$$

称为原数列$\{a_n\}$的一个子数列。

试证明：若$\{a_n\}$收敛于a，则任一子数列$\{a_{n_k}\}$也必收敛于a；若$\{a_n\}$有一个子数列发散，则$\{a_n\}$必发散。又若$\{a_n\}$有某个子数列收敛，则$\{a_n\}$不一定收敛，试举例说明。

10. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^5\cdot n}{n^2+1}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n!}{n+1}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-5n}}$； (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$。

11. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n+a)(n+b)}-n]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+4}-n^2)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}2(\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}\right)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

12. 求下列数列的极限：

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$；

(2) $a_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}$；

(3) $a_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}$；

(4) $a_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$;

(5) $a_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(6) $a_n=\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{(n-1)^3}{n^4}$;

(提示：$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3=[1+2+\cdots+(n-1)]^2$)

(7) $a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$;

(8) $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

(9) $a_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$;

(10) $a_n=(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})$,
($|q|<1$)。

13. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$，其中 $0<k<1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

(提示：$\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$)

14. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}}$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\ln 2}{2}+\sin\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

15. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且$a>0$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$（其中$k$为正整数）.

16. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且$a>0$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\lg a_n=\lg a$.

17. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，其中$a_1$，$a_2$，…，$a_m$均为正数.

18. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

19. 利用18题结果，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

20. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

21. 已知$\left\{s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$收敛，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=0$.

22. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且$a_n>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

23. 证明：若$a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

24. 求证：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

25. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}|x|>1;\\ 0, & \text{当}|x|=1;\\ -1, & \text{当}|x|<1.\end{cases}$$

求证：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

26. 证明下列数列收敛：

（1）$a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$；

（2）$a_n=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$，其中$0<x_n<1$，$n=1,2\cdots$；

（3）$a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

（4）$a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{12}{5}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$；

（5）$a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$；

（6）$a_n=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+1}$.

27. 证明下列数列收敛，并求出其极限：

（1）$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，…；

$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$；

（2）$a_n=\dfrac{n}{c^n}(c>1)$；（3）$a_n=\dfrac{c^n}{n!}$（c为任意实数）；

(4) $a_n = \underbrace{\sin\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x$;

(5) $a_1 = \dfrac{c}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a_n^2}{2}$, $(0 \leqslant c \leqslant 1)$;

(6) $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$;

(7) $a > 0$, $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$;

(提示：先证明 $a_n^2 \geqslant a$)；

(8) $a_0 = 1$, $a_n = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$.

28．证明：若$\{a_n\}$是单调增数列，$\{b_n\}$是单调减数列，且$a_n < b_n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则必有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

29．设$x_1 = a > 0$，$y_1 = b > 0$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$，$y_{n+1} = \dfrac{(x_n + y_n)}{2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明x_n和y_n有相同的极限。(这极限叫做数a和b的“算术——几何平均数。”)

30．设$0 < a_n < 1$，且适合$(1 - a_n)a_{n+1} > \dfrac{1}{4}$，证明$\{a_n\}$是单调增数列，并求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

31．证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$，$\left(\begin{array}{c} a > 1, \\ k\text{为正整数} \end{array}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^k} = 0$，$(k > 0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$，$(a > 1,\ k > 0)$

32．证明下列数列不收敛：

(1) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$;

(2) $a_n=5\left(1-\frac{2}{n}\right)+(-1)^n$.

33. 证明不等式：

(1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n=1,2,\cdots)$;

(3) $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$.

34. 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, 求下列数列的极限：

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$; (2) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$;

(3) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; (4) $a_n=\left(1+\frac{1}{n-4}\right)^n$;

(5) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$; (6) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$;

(7) $a_n=\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$; (8) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}$.

35. 试利用柯西收敛准则判别下列数列的收敛性：

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$;

(2) $a_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3!}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$,

(3) $a_n=\frac{a\cos 2+b\sin 2}{2(2+\sin 2!)}+\frac{a\cos 3+b\sin 3}{3(3+\sin 3!)}+\cdots$

$$+\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n)},$$

（4） $a_n=\alpha_0+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\cdots+\alpha_n q^n$，

其中$|\alpha_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots)$，而$|q|<1$；

（5） $a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$；

（6） $a_n=\sin 1+\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$；

（7） $a_n=\sin\sin 1+\sin\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\sin\frac{1}{n}$。

36．求数列$\{a_n\}$的下确界和上确界：

（1） $a_n=1-\frac{1}{n}$；

（2） $a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$；

（3） $a_n=1+2\cdot(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

（4） $a_n=\frac{1}{n-1\cdot 2}$。

第二节　函数极限

复习思考题

1．用严格的数学语言叙述下列极限的定义，并作出几何说明。

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$；　　（2） $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$；

（3） $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$；　　（4） $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$；

(5) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$;　　(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$。

2．若函数在一点的两个单侧极限都存在，是否在这点的极限一定存在？

3．若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ 成立，则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$ 是否成立？反之，若 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$ 成立，是否必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ 成立？举例说明之。

4．设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，能否说 $f(x)$ 在它的整个定义域内一定有界？举例说明。

5．写出下列式子的数学定义，并作出几何说明。

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$;　　(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$;　　(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$。

6．试举例说明"$\frac{\infty}{\infty}$"及"$\infty - \infty$"型未定式的各种变化状态。

7．下列各种说法是否正确？

(1) 无穷小量是比任何数都小的数。

(2) 无穷小量就是绝对值很小的量。

(3) 无穷小量就是 0。

(4) $-\infty$是无穷小量。

(5) 无限多个无穷小之和仍为无穷小。

(6) 无穷大量是很大的数。

(7) 有限个无穷大之和仍为无穷大。

(8) 无穷大量与有界变量的乘积仍是无穷大量。

8．无穷小量与无穷大量乘积的结果是什么？试举例说明。

9．任意两个无穷小量是否可以比较其阶的高低？试举例说明。

10．等价的无穷小量有些什么性质？若当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，问是否有 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$？

习 题

1．按定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$，并填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

2．按定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0$，（$n$ 为自然数）；

（3）$\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$；

（4）$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[k]{x}=\sqrt[k]{a}$，　（$a>0$，$k$为正整数）；

（5）$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$；　（6）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=2$。

3．证明：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$，则当 x 充分接近 a 时，必有 $f(x)>0$。

4．按定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$，（$a>1$）；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$；　（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=0$。

5．证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-a}$。

6．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^5-5x+2+\frac{1}{x}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$，（$m$，$n$为自然数）；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$，（$m$，$n$ 为自然数）；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$，（$n$ 为自然数）；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$，（$m$，$n$ 为自然数）；

(9) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$；

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$;　　(14) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$;

(19) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

(20) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

7. 证明：$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$（其中 r 为有理数）.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$，（$m,n$ 为自然数；α,β 为实数）.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$，（$m,n$ 为自然数；α,β 为实数）.

9. 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，试证：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}$$，其中 m 为自然数.

10. 设 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$，求 $f(0+0)$ 及 $f(0-0)$.

11. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$，其中 k 为整数.

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$，($m,n$ 为自然数)；

(8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$，($p\neq 0$ 为常数)；

(10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to \alpha}\frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}\alpha}{x-\alpha}$，($\alpha\neq n\pi$)；

(12) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$； (13) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$；

(14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$；

(15) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$；

(16) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x$； (17) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

(18) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$； (19) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$。

13. 求证：$\lim\limits_{n\to \infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$；

（提示：先证明关系 $\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

$\cdot\sin\frac{x}{2^n}$）。

14. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{2a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{na}{n^2}\right)=\frac{a}{2}$；

（提示：先证明 $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Bigg)。$$

15. 试从条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$ 决定常数 a 和 b。

16. 试从条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ 决定常数 a 和 b。

17. 按定义证明：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$，$(a>1)$；

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$，$(a>1)$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$，$(a>1)$；

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty$。

18. 设 $R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$，其中 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m，n 都是自然数，证明：

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & 当 n=m,\\ 0, & 当 n<m,\\ \infty, & 当 n>m.\end{cases}$$

19. 证明：若 $a_n\to\infty(n\to\infty)$，$|b_n|\geqslant b>0,(n=1,2,\cdots)$，则：$a_nb_n\to\infty(n\to\infty)$.

20. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\sin x)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$.

21. 若 $x\to0$，试证明：

（1）$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$；

（2）$\sin x=x+o(x)$；　　（3）$\operatorname{tg}x\sim x$；

（4）$\operatorname{tg}x-\sin x=o(x^2)$；

（5）$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$；　　（6）$1-\cos x=o(x)$；

（7）$\sqrt[n]{x^2+\sqrt{x^3}}\sim\sqrt[n]{x\sqrt{x}}$，其中 n 为正整数.

22. 若 $x\to+\infty$，试证明：

（1）$\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\sim\dfrac{1}{x}$；

（2）$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$；

（3）$x^2+x\sin x\sim x^2$；

（4）$\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2x^2+1}\sim\dfrac{\pi}{4x^2}$.

23. 证明：当 $x\to0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}=1+\dfrac{1}{n}x+o(x)$，并利用

近似计算下列各方根之值：

（1）$\sqrt[3]{1047}$；　　（2）$\sqrt[3]{8144}$；

（3）$\sqrt{1.1}$；　　（4）$\sqrt[5]{1080}$.

24. 证明：当 $x\to0$ 时，$(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

$+o(x^2)$，并利用它近似计算下列各值：

（1）$(1.005)^3$；　　（2）$(0.998)^3$；

（3）$(2.01)^4$；　　　　　（4）$(1.98)^4$。

25. 证明：当$x\to 0$时，$\operatorname{tg}x-\sin x$关于$x$是三级的无穷小量。

26. 证明：若$a_0\neq 0$，则$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$与$x^n$是同阶无穷大量，$(x\to\infty)$。

27. 当$x\to 0$时，下列函数关于x是几级的无穷小量？

（1）$\sin(\sqrt{1+x}-1)$；　　　　（2）$\sqrt{1+x^2}-1$；

（3）$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$，$(x>0)$；　　　（4）$\dfrac{x(1+x)}{x^2+x+1}$；

（5）$\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$，$(a>0)$；　　（6）$2\sqrt[3]{\sin x}$；

（7）$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$；

（8）$\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$。

28. 当$x\to+\infty$时，试比较下列无穷大量的级：

（1）$\ln x$与x^k，$(k>0)$；

（2）x^k与a^x，$(a>1,\ k>0)$；

（3）2^x与3^x；　　　　（4）$\sqrt{1+x^2}$与$x-1$；

（5）$\sqrt{x^3+x+1}$与$\sqrt{x+\sin^2x}$；

（6）$\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$与$\sqrt[3]{x^2}$。

29. 试用等价的无穷小量去代换分子或分母的方法计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}ax}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$，　（$m$，$n$均为自然数）；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)}{x}$；　　（4）$\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2\varphi\cdot\arcsin\varphi}{\sin 3\varphi\cdot\operatorname{arctg}2\varphi}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg}x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$，　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

第三节　函数的连续性

复习思考题

1．叙述函数$f(x)$在点x_0连续的定义，并作出几何解释。

2．设对于某些正数ε，可找到对应的正数$\delta(\varepsilon)$，使得只要$|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。问可否断定$f(x)$在点$x_0$连续？试考察两种情况：

(1) 诸数ε是有限个数；

(2) ε是一串数$\dfrac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$。

3．若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，是否$f(x)$就在点$x_0$连续？

4．画出下列各种间断情况的草图，并适当举例说明：

(1) $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$；

(2) $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$；

(3) $f(x_0+0)=+\infty$，$f(x_0-0)=f(x_0)$；

(4) $f(x_0+0)=+\infty$，$f(x_0-0)=+\infty$；

(5) $f(x_0+0)$不存在，$f(x_0-0)=f(x_0)$。

5．第一类间断点与第二类间断点有什么区别？第一类间断点就是可去间断点吗？

6. 试求下列函数的间断点，说明这些间断点属于哪一类，并分别写出函数的连续区间。

(1) $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)(x+2)}$；　(2) $f(x)=\ln\sin x$；

(3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$；　(4) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$；

(5) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$；　(6) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$。

7. 设$f(x)$是定义在$(-\infty, +\infty)$的函数，又知

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0,\ x_0\in(-\infty, +\infty).$$

问$f(x)$在$x=x_0$处是否连续？为什么？

8. 设在点$x=x_0$，$f(x)$连续，$g(x)$不连续，则$f(x)\pm g(x)$与$f(x)\cdot g(x)$在点x_0的连续性如何？举出适当的例子。又若$f(x)$，$g(x)$在该点都不连续，情况又将如何？

9. 不连续函数平方以后是否仍是不连续函数？试举出一个处处不连续，但平方以后是处处连续的函数。

10. 闭区间上连续的函数有哪些重要性质？这些性质对开区间上的连续函数是否成立？试举例说明。

11. 叙述函数在区间$[a, b]$上一致连续的定义。怎样的函数一定一致连续？一致连续的函数是否逐点连续？

12. 试用"$\varepsilon-\delta$"语言写出$f(x)$在$[a,b]$上不一致连续的定义。

习　题

1. 用"$\varepsilon-\delta$"的论证法，证明函数$f(x)=x^2$在$x=3$连续，并填下表：

ε	1	0.1	0.01	……
δ				

2．用"$\varepsilon-\delta$"的论证法，证明下列函数在所指定的区间上连续：

（1）$f(x)=x^3$，$(-\infty,+\infty)$；

（2）$f(x)=\sin x$，$(-\infty,+\infty)$；

（3）$f(x)=\sqrt{x}$，$[0,+\infty)$；

（4）$f(x)=(x+1)^2$，$(-\infty,+\infty)$．

3．要做一个边长为 $x_0=10\text{cm}$ 的正方形金属薄片，若要其面积 $y=x^2$ 与预计的 $y_0=100\text{cm}^2$ 的差不超过 i) $\pm 1\text{cm}^2$，ii) $\pm 0.1\text{cm}^2$，iii) $\pm \varepsilon\text{cm}^2$，问其边长 x 可以在什么范围内变化？

4．证明：若函数 $f(x)$ 连续，则 $|f(x)|$ 必定连续；但反之不成立，试举例说明之。

5．求下列函数 $y=f(x)$ 的间断点，并判别间断点的类型．如果是可去间断点，则补充定义，使它在该点连续。

（1）$y=\dfrac{x+1}{x-2}$；　　（2）$y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$；

（3）$y=\dfrac{\sin 3x}{x}$；　　（4）$y=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$；

（5）$y=\dfrac{x}{\sin x}$；　　（6）$y=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$；

（7）$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$；　　（8）$y=x\ln x^2$；

（9）$y=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$；　　（10）$y=\dfrac{1}{\ln|x|}$；

（11）$y=1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-a}$；　　（12）$y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；

(13) $y=e^{\frac{1}{1-x}}$;　　(14) $y=\cos\frac{1}{x}$.

6. 研究下列函数在其定义域上的连续性：

(1) $y=|x|$;　　(2) $y=[x]$;

(3) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x\neq -1,\\ A, & x=-1;\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(5) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ A, & x=2;\end{cases}$

(6) $y=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(7) $y=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　(8) $y=\begin{cases}x, & 当 |x|\leqslant 1,\\ 1, & 当 |x|>1;\end{cases}$

(9) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x\neq 1,\\ A, & x=1;\end{cases}$　　(10) $y=\begin{cases}x\ln x^2, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$

(11) $y=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{\sqrt[4]{1+\pi(x-1)}-1}{x-1}, & x>1;\end{cases}$

(12) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{e^x-1}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ 1+e^{\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$

7. 研究下列函数的连续性：

(1) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$, $(x\geqslant 0)$;

(2) $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, $(-\infty,+\infty)$;

(3) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$, $(-\infty,+\infty)$;

(4) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$, $(-\infty,+\infty)$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 问怎样选择 a 才能使函数连续？

9. 证明：函数 $D(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为有理数,\\ 0, & 当\ x\ 为无理数,\end{cases}$ 处处不连续。

10. 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续，但不左连续。

11. 证明下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$，($\alpha$ 为任何实数)；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$，($\alpha$ 为任何实数)；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$，　$(a>0)$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$，（$\mu$为任何实数）；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+\lambda\sin\dfrac{x}{n}\right)^n=e^{\lambda x}$，（λ为任何实数）；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}=\sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$均为大于0的实数）。

12．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}$；　（6）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)$；　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$；

（9）$\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^\alpha-e^\beta}{\alpha-\beta}$；　（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；　（12）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$；

（13）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；　（14）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\sin x}$；

（15）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$；　（16）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\arcsin\sqrt{\ln x}}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2e}\right)}$；

（17）$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$。

13．判别以下无穷小量关于x是几级的（$x\to 0$）：

(1) $e^{\sin x}-1$;　　(2) $\ln(1+\sqrt{x^2\sin x})$;

(3) $e^x-\cos x$;　　(4) $e^{\sqrt{x}}-1$;

(5) $e^{2x}-e^{-x}$;　　(6) $\ln(a+x)-\ln a,(a>0)$.

14. 双曲函数是否是初等函数？证明下列恒等式（与三角函数比较）：

(1) $\mathrm{sh}(-x)=-\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}(-x)=\mathrm{ch}x$;

(2) $\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$;

(3) $\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$;

(4) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$;

(5) $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$, $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

15. 证明恒等式：

(1) $\mathrm{arcch}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $(x\geqslant1)$;

(2) $\mathrm{arcth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $(|x|<1)$.

16. 试证：若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为此区间中的任意值。则在$[a,b]$中一定可找到一个数值 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

17. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是区间$[a,b]$中的 n 个点，又 $t_1>0,t_2>0,\cdots,t_n>0$，且 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$，证明在$[a,b]$中必有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

18. 利用连续函数的性质证明：

(1) 方程 $x^3-3x=1$ 在区间 $[1, 2]$ 内有根；

(2) 方程 $x\cdot2^x=1$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$ 内有根；

(3) 方程 $x-\sin(x+1)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有根；

(4) 任何一个奇次多项式 $p(x)$ 至少有一个实根；

(5) 方程 $\mathrm{tg}x=x$ 有无穷多个实根；

(6) 方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一

个正根，并且不超过 $a+b$。

19. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且值域就是 $[a,b]$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有一个不动点，即有一点 x_0，使 $f(x_0)=x_0$。

20. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上的两个连续函数，而且 $f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，试证：至少存在一点 x_0，$a<x_0<b$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$。

21. 平面上在单位圆 $x^2+y^2=1$ 中有1500个点，证明：在 x 轴上至少存在一点，使之到已知的1500个点的距离之和为1500。

22. 设函数 $f(x)$ 满足：

（1）$-\infty<a\leqslant f(x)\leqslant b<+\infty$，$(a\leqslant x\leqslant b)$，

（2）$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$，$(0<k<1, x,y\in[a,b])$

证明：（1）存在唯一的 x_0，使 $f(x_0)=x_0$；

（2）设 $x_1\in[a,b]$，并定义数列 $\{x_n\}$：

$$x_{n+1}=f(x_n)\ ,\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

23. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上有界。

24. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$，$(-\infty<x<+\infty)$ 是有界的。

25. 证明：$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

26. 证明：$y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续。

27. 证明：$f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续且有界，但不一致连续。

28. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是一致连续的。

第二章 单变量函数的微分学

第一节 函数的微商

复习思考题

1．微商概念是由哪些具体问题引入的？它有什么几何意义？

2．曲线的切线是怎样定义的？如何计算曲线上某点切线的斜率？

3．函数在某点的连续性和可微性间的关系怎样？两者是否等价？试举例说明之。

4．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 有导数，且 $f(0)=0$，问 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 为何？

5．设函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，问

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$ 为何？

6．如果在区间 $[a, b]$ 上有不等式：$f(x)\geqslant g(x)$，是否由此可导出 $f'(x)\geqslant g'(x)$？举例说明之。

7．（1）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，而函数 $g(x)$ 在点 x_0 不可微，那末它们的和函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在点 x_0 是否可微？

（2）若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 都不可微，那末它们的和 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在点 x_0 是否可微？它们的积 $G(x)=f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 是否可微？（提示：考虑函数 $f(x)=|x|$，

$g(x)=-|x|$ 在点 $x=0$ 的情况)

8．微商是由极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ 来定义的，但在具体计算初等函数的微商时，我们并没有直接计算上述的极限，而只需要记住几个极简单的初等函数的微商公式，因而使计算微商的问题大大简化．试问这里主要是哪些法则在起作用？在这些法则中，尤以哪个法则作用最大？

9．指出下面计算的错误：

（1）$[\cos(1-x)]'=-\sin(1-x)$；

（2）$\left(\ln\dfrac{1}{X}\right)'=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$；

（3）$$\left(x^2+\sqrt{5+3x}\right)'=\left(2x+\frac{1}{\sqrt{5+3x}}\right)(5+3x)'$$
$$=3\left(2x+\frac{1}{\sqrt{5+3x}}\right).$$

习　　题

1．已知质点的直线运动方程是 $s=5t^2+6$，

（1）求 $2\leqslant t\leqslant 2+\Delta t$ 时间内的平均速度，设 $\Delta t=1$，0.1，0.01，0.001；

（2）从上面平均速度的变化趋势，估计在 $t=2$ 秒这一时刻的瞬时速度；

（3）由瞬时速度的定义，算出在 $t=2$ 秒的瞬时速度．

2．有一质量分布不均匀的细杆 AB，长 20cm，AM 段的质量与从点 A 到 M 点的距离平方成正比，并且已知一段 $AM=2$cm 的质量等于 8 克．试求：

（1）$AM=2$cm 一段上的平均线密度；

（2）全杆的平均线密度；

（3）在任意点M处的密度。

3．长30cm的非均匀细杆AB的质量（克）按规律：$m=3l^2+5l$分布，这里l是从A算起的一段杆长，试求：

（1）杆的平均线密度；

（2）离A点5cm处的线密度；

（3）杆的末端B点的线密度。

4．设$f(x)=x$，用定义求$f'(1)$，$f'(0)$，$f'(-2)$，$f'(-\sqrt{2})$。

5．$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$，当$x$为何值时，有

（1）$f'(x)=0$；（2）$f'(x)=-2$；（3）$f'(x)=10$。

6．$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & 当\ x\neq 0,\\ 0, & 当\ x=0;\end{cases}$ 求$f'\left(\frac{2}{\pi}\right)$，$f'\left(\frac{1}{\pi}\right)$，$f'(0)$。

7．$f(x)=3x^3-3x+\sqrt{x}-1$，求$f'\left(\frac{1}{4}\right)$。

8．设$\rho(\theta)=\frac{p}{1+e\cos\theta}$，求$\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)$。

9．求下列函数的微商：

（1）$y=ax^3+bx^2+cx+d$；

（2）$y=\sqrt[5]{x}+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{\sqrt[5]{3}}$；

（3）$y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}$；　（4）$y=\frac{x+1}{x+2}$；

（5）$y=\frac{ax+b}{cx+d}$；　（6）$y=\frac{3x^2+9x-2}{5x+8}$；

（7）$y=\sin x\cdot\cos^2 x$；　（8）$y=\sin x\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$；

（9）$y=\frac{\sin^2 x\cos x}{x^3+\operatorname{tg}x}$；　（10）$y=\frac{0.3x^5+a\sin x}{(a+b)\cos x}$；

(11) $y=\frac{\ln x}{x^{n}}$;　　(12) $y=a^{x}\ln x$;

(13) $y=\frac{x+\arcsin x}{\sin x}$;　　(14) $y=\frac{t^{3}\operatorname{arctg}t}{e^{t}}$;

(15) $y=(a^{2}+b^{2})x^{a}\cdot e^{x}\cdot\operatorname{arctg}x$;

(16) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

(17) $y=x^{2}\log_{3}x$;　　(18) $y=\frac{1-10^{x}}{1+10^{x}}$;

(19) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

(20) $y=\frac{1}{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}$.

10. 求曲线 $y=x-\frac{1}{x}$ 与横轴交点处的切线方程。

11. 在抛物线 $y=x^{2}$ 上取横标为 $x_{1}=1$，$x_{2}=3$ 的两点，抛物线上哪一点的切线平行于过这两点所引的割线。

12. 抛物线 $y=x^{2}$ 上哪一点的切线和直线 $3x-y+1=0$ 交成 $45°$ 角？

13. 验证对于函数 $f(x)=x^{2}$，关系式 $f'(a+b)=f'(a)+f'(b)$ 成立。

14. 证明双曲线 $xy=a^{2}$ 的切线与两坐标轴组成的三角形的面积等于常数 $2a^{2}$。

15. 求曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的交角，（即两曲线交点处切线的夹角）。

16. 求下列函数的微商：

（1） $y=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;　　（2） $y=\sin^{\alpha}x\ln^{\beta}x$;

（3） $y=\sqrt[3]{1+\ln^{2}x}$;

(4) $\gamma=\sqrt{1+\varphi^2}\operatorname{arctg}(\varphi^3)$;

(5) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+x^2}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(6) $y=(\arcsin x+\arccos x)^n$;

(7) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;　(8) $w=z5^z$;

(9) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$;

(10) $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$;

(11) $y=\sin[\sin(\sin x)]$;

(12) $y=\sin[\cos^5(\operatorname{arctg} x^3)]$;

(13) $y=\sec^2\dfrac{x}{a^2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{b^2}$;　(14) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$;

(15) $y=a^x e^{\sin\operatorname{ctg} x}$;　(16) $y=\cos\dfrac{1}{x^2}e^{\cos\frac{1}{x^2}}$;

(17) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$;

(18) $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(19) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;　(20) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(21) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;　(22) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

(23) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$;　(24) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(25) $y=x^{x^x}+x^x+x^{a^x}$;　(26) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

(27) $y=(\operatorname{tg}ax)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{b}}$;　(28) $y=(\ln x)^x\cdot x^{\ln x}$;

(29) $y=\arcsin(\sin x^2)$;

(30) $y=\arccos(\sin x^4-\cos x^4)$;

(31) $y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$;

(32) $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)$;

(33) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\cdot\arcsin\dfrac{x}{a}$;

(34) $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$;

(35) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(36) $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$;

(37) $r=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$;

(38) $s=\dfrac{t^6}{1+t^{12}}-\cos\operatorname{ctg} t^6$;

(39) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

(40) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2+x^4}{1+x^2+x^4}}$.

17. 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为可微函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$；　(2) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$；

(3) $y=\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}$；

(4) $y=\operatorname{arctg}[1+\varphi(x)+\varphi(x)^{\psi(x)}]$.

18. 设 $f(x)$ 为可微函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^3)$；　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$；

(3) $y=f(e^x+x^e)$；(4) $y=\sin[f(\sin f(x))]$；

（5） $y=f\{f[f(\sin x+\cos x)]\}$；

（6） $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$。

19。设 $A=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$， $B=\operatorname{arctg}\lambda$，证明： $\frac{dA}{d\lambda}=\frac{dB}{d\lambda}$。

20。验证函数 $y=\ln\frac{1}{x+1}$满足关系式 $x\frac{dy}{dx}+1=e^y$。

21。验证函数 $y=\frac{1+x}{1-x}$满足关系式$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$。

22。验证函数 $y=e^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$ 满足关系式 $y'+y=\cos x$。

23。验证函数 $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ 满足关系式 $2y=xy'+\ln y'$。

24。设$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$，证明：$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$。 $\left(\text{提示：设 } u=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}\right)$

25。从等式 $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$出发，导出表示和式

$$P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1},$$

$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$$

的公式。

26。求下列函数的反函数的微商 $x'(y)$：

（1） $y=xe^x$； （2） $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$；

（3） $y=2e^{-x}-e^{-2x}$； （4） $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。

27。试证可微的偶函数其导函数为奇函数；可微的奇函数其

导函数为偶函数。

28. 试证可微的周期函数其导函数仍为具有相同周期之周期函数。

29. 一质点沿直线运动，由始点起经过七秒后的路程为 $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$，问何时它的速度为 0？

30. 一气球从离开观察者 500 米处离地铅直上升，其速度为 140 米/分，当气球高度为 500 米时，观察者视线的仰角增加率如何？

31. 有一长为 5 米的梯子贴靠在铅直的墙上，若其下端沿地板以 3 米/秒的速率离开墙脚而滑动。问，（1）当其下端离开墙脚 1.4 米时，梯子的上端下滑之速率为何？（2）何时梯子的上下端能以相同速率移动？

32. 两轮船 A 和 B 从同一码头同时出发，A 船往北，B 船往东。若 A 船的速度为 30 公里/小时，B 船的速度为 40 公里/小时，问两船间距离增加的速率如何？

33. 水自高为 18 厘米，底半径为 6 厘米的圆锥形漏斗流入直径为 10 厘米的圆柱形筒中，已知水在漏斗中深度为 12 厘米时水平面下降之速率为 1 厘米/分，问圆柱形筒中水平面上升之速度为何？

34. 石块落在平静水面上，产生圆形波纹。若最外一圈波的半径增大率恒为 1 米/秒，问在 2 秒末，被扰动之水面面积增大率为何？

35. 写出下列曲线在已知点处的切线与法线方程：

（1）$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，在 $t=\pi$ 处；

（2）$x=\sin t$，$y=\cos 2t$，在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处；

（3）$x=\frac{3at}{1+t^2}$，$y=\frac{3at^2}{1+t^2}$，在 $t=2$ 处。

36. 证明椭圆的光学性质：法线平分两焦向径间的夹角。

37. 设 $\rho=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程，ω 为切线与切点向径所成的角，试证 $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{\rho}{\rho'}$。

38. 研究下列函数的连续性与可微性：

（1）$f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant1,\\ \sqrt{x}, & x>1;\end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{1/x}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

（4）$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant1,\\ x-1, & x<1.\end{cases}$

39. 求下列函数的导函数：

（1）$f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant1,\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1;\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}x+\left(\sin x\sin\dfrac{1}{x}\right)^2, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

40. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ ax+b, & x>1;\end{cases}$ 问：当 a，b 取何值时，$f(x)$ 在点 $x=1$ 连续且可微？

41. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0;\end{cases}$ 问：当 a,b 取何值时，$f(x)$ 在点 x_0 可微？

42. 当实数 n 满足什么条件时，函数

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

具有：（1）在点 $x=0$ 连续；（2）在点 $x=0$ 可微；（3）在点 $x=0$ 导函数连续。

第二节 函数的微分

复习思考题

1. 微分概念是怎样引入的？它和函数的增量有什么关系？

2. 用几何图形表出函数的微分 dy 与函数的增量 Δy 间的关系，从这图形可以看出什么样的函数，它的值分恒等于它的增量。

3. 记号 dx^2，$(dx)^2$，$d(x^2)$ 有什么区别？

4. 函数的微分有什么重要的特性？

5. 何谓“一阶微分形式的不变性”？对于高阶微分，这种不变性是否还存在？

6. 用公式：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

作近似计算时，对 Δx 有什么要求？为什么？

7. 指出下面计算的错误：

（1）设 $x=a\sin\theta$，$y=b\cos\theta$；

$\because\quad dy=-b\sin\theta d\theta$，$dx=a\cos\theta d\theta$，$d^2y=-b\cos\theta d\theta^2$，

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b\cos\theta d\theta^2}{(a\cos\theta d\theta)^2}=\frac{-b\cos\theta d\theta^2}{a^2\cos^2\theta d\theta^2}=-\frac{b}{a^2\cos\theta}.$$

（2）设 $x=a\sin\theta$，$y=b\cos\theta$；

$$\because\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d(b\cos\theta)}{d(a\sin\theta)}=\frac{-b\sin\theta d\theta}{a\cos\theta d\theta}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta,$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)'=\left(-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\theta\right)'=-\frac{b}{a}\sec^2\theta.$$

习　　题

1．当自变量 x 由 $x=1$ 变到 $x=1.02$ 时，函数 $y=x^2$ 的增量 Δy 等于多少？Δy 的主要部分 dy 等于多少？

2．设 $y=x^2+x$，计算在 $x=1$ 处，当 $\Delta x=10$，1，0.1，0.01 时，相应的函数改变量 Δy 和函数的微分 dy。并观察两者之差 $\Delta y-dy$ 随着 Δx 减少的变化情况。

3．一个正方形的边长等于 8 厘米，如果每边增加：（1）1 厘米；（2）0.5厘米；（3）0.1厘米；那末正方形的面积分别增加多少？并求这个面积增量的主要部分。

4．求下列函数的微分：

（1）$y=\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)$；　　（2）$y=5^{\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}$；

（3）$y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$；　　（4）$y=\sin x-x\cos x$；

（5）$y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$；　　（6）$y=\operatorname{tg}^2(1+2x^2)$。

5．当 φ 由 $\dfrac{\pi}{6}$ 变到 $\dfrac{61}{360}\pi$ 时，求 $y=\sin 2\varphi$ 的微分。

6．验证函数 $y=\dfrac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ 满足关系式

$$2x^2dy=(x^2y^2+1)dx.$$

7．当 x 很小时，证明近似等式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

8．利用上题的公式，证明当 x 很小时，有下列近似等式：

（1）$\sin x\approx x$；　　（2）$\ln(1+x)\approx x$；

（3）$\operatorname{tg}x\approx x$；　　（4）$e^x\approx 1+x$。

9. 当$\frac{|x|}{a^n}$很小（$a>0$），证明近似公式

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}.$$

10. 利用微分近似计算：

（1）$\sqrt[5]{1.01}$；（2）$\sqrt[10]{1000}$；（3）$\sin 29°$；

（4）$\ln 1.03$；（5）$\operatorname{tg} 45°4'$；（6）$e^{1.01}$.

11. 如果一条重索（电缆）的长等于$2s$，半拱的长为l，而重索垂距为f，则近似等式$s=l\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$成立。问：

（1）当重索垂距f变动df时，长度s变化如何？

（2）如果重索长度变化ds，垂距变化怎样？

12. 对于以下两种情况：（1）x为自变量，（2）x为中间变量，分别求函数$y=e^x$的一阶微分dy和二阶微分d^2y.

13. 设u及v为变量x的可微分两次的函数，对下列函数求d^2y：

（1）$y=uv$；（2）$y=\frac{u}{v}$.

14. 设$y=e^u$，其中u是x的可微分足够多次的函数，求d^3y.

15. 设$y=\sin x$，$x=e^t$，试用（1）x和dx，（2）t和dt表示d^2y.

16. 设$x=\sqrt{1+t}$，$y=\sqrt{1-t}$，验证$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}$.

17. 在下列参变量方程中，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$x=\ln(1+t^2)$，$y=t-\operatorname{arctg} t$；

（2）$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$；

（3）$x=a\varphi\cos\varphi$，$y=a\varphi\sin\varphi$；

（4）$x=a\cos^3\varphi$，$y=a\sin^3\varphi$。

第三节　高阶微商与高阶微分

复习思考题

1．写出函数乘积的高阶微商的莱布尼兹公式。这个公式在哪些情况下用起来特别方便？

2．写出：x^n，$\sin x$，$\cos x$，$\log_a(1+x)$，e^{ax}，a^x 的 n 阶微商。

习　题

1．求下列函数的二阶微商：

（1）$y=e^{-x^2}$；　　（2）$y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$；

（3）$y=x^2a^x$；　　（4）$y=\sin\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$；

（5）$y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$；

（6）$y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$。

2．设 $f(x)=e^{\sin x}\cos(\sin x)$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$。

3．设 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$ 为可微分二次的函数，求 y''：

（1）$y=\ln\dfrac{u}{v}$；　　（2）$y=\sqrt{u^2+v^2}$。

4．设 $f(x)$ 为可微分三次的函数，求 y''，y'''：

（1）$y=f(x^2)$；　　（2）$y=f(e^x+x)$；

（3）$y=\ln f(x)$；　　（4）$y=e^{f(ax+b)}$。

5．验证函数 $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ 满足关系式

$$xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0.$$

6．验证函数 $y=\cos e^x+\sin e^x$ 满足关系式

$$y'' - y + ye^{2x} = 0.$$

7. 验证函数 $y = A\sin(\omega t + \delta)$ 满足关系式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

8. 若 r_1, r_2 是代数方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根，证明函数 $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ 满足关系式

$y'' + py' + qy = 0$，其中 c_1, c_2 是任意两常数。

9. 求下列函数的高阶微商：

(1) $(x^2e^x)^{(30)}$；　　(2) $[\ln(1+x)^x]^{(30)}$；

(3) $[(x^2+1)\sin x]^{(n)}$；　(4) $\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)}$；

(5) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$；　(6) $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{(n)}$；

(7) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}$；　(8) $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$，求 $f^{(n)}(0)$。

第四节　微分学的基本定理

复习思考题

1. 极大值和最大值有什么区别？有什么联系？

2. 设 $f(x)$ 在 x_1 取得极大值、在 x_2 取得极小值，是否一定有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$？试画图说明之。

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 的微商等于 0，即 $f'(x_0) = 0$，$f(x)$ 是否一定在点 x_0 取到极值？举例说明之。

4. 若函数 $f(x)$ 在区间的内点 x_0 处取到极值，是否一定有 $f'(x_0) = 0$？考查函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 的情形。

5. 在罗尔定理中，三个条件 (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，(3) $f(a) = f(b)$ 中有一条件不成立，

那末结论就不正确了。试分别举例说明之。

6. 试用几何的语言叙述费尔马，罗示，拉格朗日三条定理。

7. 设 $ab<0$，$f(x)=\frac{1}{x}$，$a\leqslant x\leqslant b$，问在区间 $[a,b]$ 上拉格朗日定理的结论是否成立？为什么？

8. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，问在区间 $[-1,1]$ 上柯西中值定理的结论是否成立？为什么？

习　题

1. 验证罗尔定理对函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间 $[-1,2]$ 上的正确性。

2. (1) 验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\ln x$ 在闭区间 $[1,e]$ 上的正确性。

(2) 验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\operatorname{arctg}x$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的正确性。

3. 应用罗尔定理证明：方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的根，其中 c 为任意实数。

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶导数，且 $f(2)=f(1)=0$，又 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，那末在区间 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ，使得 $F''(\xi)=0$。

5. 设对于所有的实数对 x，y，不等式

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|^2,\quad (M\text{为正常数})$$

都成立，证明：在 $-\infty<x<+\infty$ 上 $f(x)\equiv$常数。

6. (1) 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的微商，应用罗尔定理，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间。

(2) 若实系数多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\ (a_0\neq 0)$$

的根全是实根，则其逐次导函数 $P'_n(x)$，$P''_n(x)$，$\cdots$，$P_n^{(n-1)}(x)$

也仅有实根，试证明之。

7. 应用拉格朗日定理证明下列不等式：

(1) 当 $b>a>0$，$n>1$ 时有

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

(2) 当 $x\neq0$时，$e^x>1+x$.

(3) 当 $0<b\leqslant a$，$\dfrac{a-b}{a}\leqslant\ln\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a-b}{b}$.

(4) 当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(5) 当 $0<a<b$，$(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$.

8. 证明下列恒等式：

(1) $\operatorname{arc\,tg}x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & \text{当 } x>-1;\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & \text{当 } x<-1.\end{cases}$

(3) 当 $|x|\leqslant1$ 时，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 当$|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$.

9. 证明：如果$f'(x)\equiv k(-\infty<x<+\infty)$，那末$f(x)$一定是线性函数，即$f(x)=kx+c$.

10. 设$f(x)$，$g(x)$均为可微函数，$f(0)=g(0)$，且当$x>0$时有$f'(x)>g'(x)$，试证当$x>0$时，恒有$f(x)>g(x)$.

11. 设$\varphi(x)$可微分二次，$\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，且当$x>0$时$\varphi''(x)>0$，试证当$x>0$时，恒有$\varphi(x)>0$.

12. 试证明：若函数$f(x)$在有穷区间(a,b)内可微，但无界，则其导函数$f'(x)$在区间(a,b)内也无界。其逆定理不真，举例说明。

13. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=0$及$f'(a)\cdot f'(b)>0$，则$f(x)$在(a,b)内至少存在一点c，使$f(c)=0$。

14. 若$f(x)$在$[0,+\infty)$可微，$f(0)=0$，$f'(x)$严格增，证明$\frac{f(x)}{x}$严格增。

15. 证明方程$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x-a_n=0$，（其中$a_i\geqslant0$，$i=1,2,\cdots,n-1$，$a_n>0$）有且仅有一个正根。

16. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上的二阶微商存在，且$f(0)=1$，$f(1)=-1$，$f''(x)<0$ $(0<x<1)$，证明在区间$(0,1)$上方程$f(x)=0$有唯一的实根。

17. 设$f(x)$是$(-\infty,0)$上可微分二次的函数，且满足$f(0)<0$，$f'(0)<0$，$f''(x)\geqslant0$ $(-\infty<x<0)$，证明方程$f(x)=0$在区间$(-\infty,0)$内有且只有一个实根。

18. 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上可微分二次，并且满足(1) $f(a)>0$，(2) $f'(a)<0$，(3) 当$x>a$时，$f''(x)\leqslant0$；试证在区间$(a,+\infty)$内有且仅有方程$f(x)=0$的一个实根。

19. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且当$x>a$时，$f'(x)\geqslant k>0$，k为常数。证明：若$f(a)<0$，则方程$f(x)=0$在区间$(a,+\infty)$内有且仅有一个实根。

题中条件$f'(x)\geqslant k>0$能否改为$f'(x)>0$？试在区间$[1,+\infty)$上研究函数$y=-\frac{1}{x}$。

20. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微，且$|f'(x)|<1$，又$f(0)=f(1)$，证明对于$[0,1]$上的任意两点x_1，x_2，恒有$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$。

21. 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上可微，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

22. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$内可微，且当$x\to+\infty$时，$f'(x)$

有界，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$。

第五节 泰 勒 公 式

复习思考题

1. 泰勒公式主要解决什么问题？为什么说泰勒公式是研究函数局部性质的一个重要工具？

2. 写出函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的泰勒展开式和在点 $x=0$ 的马克劳林展开式。

3. 写出函数 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$(1+x)^\alpha$，$\ln(1+x)$ 的马克劳林展开式，并指出它们成立的区间。

4. 试证明当 α 为自然数时，函数 $(1+x)^\alpha$ 的马克劳林展开式就是牛顿二项式公式。

习 题

1. 按 $(x-4)$ 的乘幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$。

2. 按 $(x-1)$ 的乘幂展开函数 $f(x)=x^6$。

3. 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式，并且 $f(2)=-1$，$f'(2)=0$，$f''(2)=2$，$f'''(2)=-12$，$f^{(4)}(2)=24$，试计算 $f(-1)$，$f'(0)$，$f''(1)$。

4. 求函数 $y=\mathrm{tg}x$ 在 $x_0=0$ 的二阶泰勒展开式。

5. 写出函数 $y=\arcsin x$ 的三阶马克劳林展开式。

6. 写出函数 $y=xe^x$ 的 n 阶马克劳林展开式。

7. 求 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x_0=-1$ 的 n 阶泰勒展开式。

8. 求函数 $y=\frac{x}{x-1}$ 在点 $x_0=2$ 的 n 阶泰勒展开式。

9. 求函数 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x_0=4$ 的三阶泰勒展开式。

10. 求函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的 $2n$ 阶马克劳林展开式.

11. 求函数 $y=\sin^2 x$ 的 $2n$ 阶马克劳林展开式.

12. 求函数 $y=\operatorname{arctg} x$ 在 $x_0=0$ 的 $2n-1$ 阶泰勒多项式.

13. 证明：奇函数的马克劳林展开式中无偶次幂项；偶函数的无奇次幂项.

14. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导数存在，且

$$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$$

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$，其中 $a\leqslant\xi<b$.

15. 设 $f(x)$ 可微分 $k+1$ 次，则 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的 k 重根的充要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，$f^{(k)}(x_0)\neq0$，试证之.

（若在 x_0 的某邻域内有 $f(x)=(x-x_0)^k\cdot g(x)$，其中 k 为正整数，$g(x_0)\neq0$ 且 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则称 x_0 是 $f(x)=0$ 的 k 重根.）

16. 利用函数 $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$ 在点 $x_0=1$ 的泰勒展开式的前三项计算 $f(1.03)$ 的近似值.

17. 利用函数 $f(x)=x^{80}-x^{40}+x^{20}$ 在点 $x_0=1$ 的泰勒展开式的前三项计算 $f(1.005)$ 的近似值.

18. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值，并估计误差：

(1) $\sin 18°$；　　(2) $\sqrt[3]{30}$；

(3) $\sqrt[5]{250}$；　　(4) $\ln 1.2$.

19. 用五阶泰勒多项式求 $\sin 20°$ 的近似值.

20. 近似计算 $\sqrt{e}$ 之值，使其误差不超过 10^{-4}.

21. 近似计算 $\cos 10°$ 之值，使其误差不超过 10^{-4}.

第六节　未定式的极限

复习思考题

1. 叙述$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的洛必达法则。

2. 下列极限是否可以用洛必达法则？为什么？

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{1-x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$。

习　题

1. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin4x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(1-\cos x)}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$；

（8）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$；　　（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}7x}{\ln\operatorname{tg}2x}$；

（10）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$；　　（11）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$； (13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{x}}{\operatorname{tg}x-x}$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^{x}-a^{x}}{x^{2}}\ (a>0)$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{x^{3}}$；

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$； (17) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$；

(18) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

(19) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$； (20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$；

(21) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^{m}$； (22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$；

(23) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^{2}}}$； (24) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{k}{x}$；

(25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^{2}}\right)^{x}$； (26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$；

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$； (28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$；

(29) $\lim\limits_{x\to 1^{-}}\ln x\ln(1-x)$；

(30) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$；

(31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

(32) $\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

2．下列极限是否存在？是否可用洛必达法则？为什么？若有极限，求出其极限值。

（1）$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{k}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\operatorname{tg}x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2\cos x}{x+2\cos x}$；（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$．

3．当 $x\to+\infty$ 时，试比较下列无穷大量的级。

(1)　$(\ln x)^k$ $(k>0)$ 与 $x^\alpha(\alpha>0)$；

(2) $x^\alpha(\alpha>0)$ 与 $e^{\sqrt{x}}$；　　(3) e^x 与 x^x；

(4) $\ln\sin\dfrac{a}{x}$ 与 $\ln\sin\dfrac{b}{x}$，　$(a>0,\ b>0)$．

第七节　函数的增减性与极值

复习思考题

1．函数 $y=f(x)$ 的驻点和极值点有何区别？在什么条件下，驻点必是极值点？

2．怎样求出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值？

3．设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有唯一的一个极值点 x_0，若 $f(x)$ 在 x_0 达到极大(极小)，则 $f(x)$ 在 x_0 达到最大（最小），对否？你能证明吗？

4．为什么当微商 $f'(x)\geq0$ 且等于零只在一些孤立点上成立时，函数 $y=f(x)$ 仍是递增函数？

5．若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格增，则有 $f'(x)>0$ $(a<x<b)$，对否？

6．单调函数的导函数是否也必定是单调函数？

习　　题

1．求下列函数的极值：

（1）$y=2x^3-3x^2$；　　（2）$y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$；

（3）$y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$；　　（4）$y=x-\ln(1+x)$；

（5）$y=x^2e^{-x^2}$；　　（6）$y=2e^x+e^{-x}$；

（7）$y=\cos x+\sin x$，$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$；

（8）$y=x^{\frac{1}{x}}$；　　（9）$y=x-\sin x$；

（10）$y=x^2(x-1)^3$；　　（11）$(x-3)^4$；

（12）$y=x+\operatorname{tg}x$；　　（13）$y=e^x\cos x$；

（14）$y=\dfrac{x}{\ln x}$；　　（15）$y=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$；

（16）$y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$；　　（17）$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$．

2．求下列函数在所给区间上的最大值和最小值：

（1）$y=x^4-2x^2+5$，$[-2,2]$；

（2）$y=x^3-3x^2+6x-2$，$[-1,1]$；

（3）$y=\sqrt{100-x^2}$，$[-6,8]$；

（4）$y=\sin 2x-x$，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$；

（5）$y=\dfrac{x-1}{x+1}$，$[0,4]$；

（6）$y=x^x$，$[e^{-1},+\infty)$；

（7）$y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$，$[0,1]$；

（8）$y=x\ln x$，$(0,+\infty)$．

3. 用极值方法证明下列不等式：

（1）若 $0\leqslant x\leqslant 1$，$p>1$，

则 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$。

（2）当 $|x|\leqslant 2$ 时，有 $|3x-x^3|\leqslant 2$。

（3）若 $m>0$，$n>0$，则当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时

有 $x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}\cdot a^{m+n}$。

4. 下列方程有几个实根？并确定实根所在范围：

（1）$x^3-6x^2+9x-10=0$；

（2）$x^3-3x^2-9x+k=0$；

（3）$\ln x=ax$（其中 $a>0$）。

5. 有一面积为 8×5 厘米^2 的长方形厚纸，在各角剪去相同的小正方形，把四边折起成一个无盖的盒子。要使盒子的容积最大，问剪去的小正方形边长应为多少？

6. 要做一个圆锥形的漏斗，其母线长 20 厘米，要使其体积最大，其高应为多少？

7. 试证：定容圆锥形帐幕当其高为底半径的 $\sqrt{2}$ 倍时，所需的材料最省。

8. 设圆桌面的半径为 a，应该在桌面中央上方多高的地方安置电灯，才可使桌子边缘上的照度为最大？$\left(\text{提示：照度}\right.$ $I=k\frac{\sin\varphi}{r^2}$，式中 φ 为光线倾斜的角度，r 为光源与被照处的距离，k 为光源强度。$\left.\right)$

9. 三个点 A、B 和 C 不在同一直线上，$\angle ABC=60°$，汽车以 80 公里/小时的速度由 A 向 B 行进，同时火车以 50 公里/小时的速度由 B 向 C 驶去。如果 $AB=200$ 公里，问运动开始几小

时后汽车与火车的距离最小？

10．过点 $M(1,4)$ 引一直线，使其在两坐标轴上的截距均为正，且它们之和为最小，求此直线方程。

11．某工厂将制造一种无盖的圆柱形圆桶，容量为$\frac{3}{2}\pi$米^3，用来作底的金属每平方米 3 元，作侧面的金属每平方米 2 元，为使成本最低，应如何制作这圆桶？

12．有甲、乙两城，甲位于一直线形的河岸，乙离岸40公里，而其到岸的垂足与甲相距 50 公里。两城同用一抽水机从河中取水。从水厂到甲城及乙城之水管费分别为每公里 500 元和 700 元，为使水管费用最省，水厂应建在河边何处？

13．从南到北的铁路干线经过甲乙两城，两城相距 15 公里。某工厂位于乙城正西 2 公里处。现要从甲城把货物运往工厂，在铁路线上的运费每公里 3 元，在公路上的运费每公里 5 元。为使运费最省，应在铁路干线上何处起，修一条通往工厂的公路？

14．一张 1.4 米高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼 1.8 米，问观察者离墙多远才能看得最清晰（即视角最大）？

15．宽度为 a 的运河垂直地流向宽度为 b 的运河，问能在运河中航行的船的最大长度是多少？

16．证明函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ 在 $(-1,1)$ 上递减。

17．证明函数 $f(x)=x^5+x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上递增。

18．证明函数 $y=\operatorname{arctg}x-x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上递减。

19．利用函数的增减性证明下列不等式：

（1）当 $x\neq0$ 时，有 $e^x>1+x$；

（2）当 $x>0$ 时，有 $\ln(1+x)>\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x}$；

(3) 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时，有$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1}>\frac{x_2}{x_1}$；

(4) 当 $x>0$ 时，有 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

(5) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，有 $\sin x+\operatorname{tg} x>2x$；

(6) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$；

(7) 当 $x>0$ 时，有 $e^x>1+x^2$；

(8) 当 $x>0$，$y>0$，$0<\alpha<\beta$ 时，

有$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$。

第八节　函数图形的描绘

第九节　平面曲线的曲率

复习思考题

1. 如果二阶微商 $f''(x)$ 在区间 (a,b) 内恒大于零，问 $f(x)$ 的图形在 (a,b) 内有什么特性？

2. 何谓函数 $y=f(x)$ 的扭转点？满足 $f''(x)=0$ 的点是否一定是扭转点？

3. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导函数，如果 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq 0$，问 $x=x_0$是否为极值点？为什么？又 $x=x_0$是否为扭转点？为什么？

4. 当曲线 $y=f(x)$的图形无限伸展时，在什么条件下有水平的渐近线？有斜渐近线？

5. (1) 曲线是由参变量 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 所表示的。验证：只有在 $t=t_0$ 的那些值且 $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty$和 $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=\infty$

时才可能有斜渐近线。如果斜渐近线的方程为$y=ax+b$，则

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)},\quad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)].$$

（2）在参变量方程$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$所表示的曲线中，如何求平行于坐标轴的渐近线？

6．描绘函数$y=f(x)$的图形有哪些主要步骤？

7．如何计算平面曲线的曲率？

习　题

1．求下列函数的上升，下降区间及极值点：

（1）$y=(x-1)(x+1)^3$；

（2）$y=(x-2)^5(2x+1)^4$；

（3）$y=x^2e^{-x}$；　（4）$y=x-2\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$；

（5）$y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\,(a>0)$；

（6）$y=2\sin x+\cos 2x\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$；

（7）$y=x+\cos x$；　（8）$y=x-\ln(1+x)$；

（9）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　（10）$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$。

2．求下列函数的凹凸区间和扭转点：

（1）$y=x^5$；　（2）$y=e^{\operatorname{arctg}x}$；

（3）$y=x^3-3x^2-9x+9$；

（4）$y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$；

（5）$y=x^4(12\ln x-7)$；　（6）$y=(1+x^2)e^x$；

（7）$y=x+\sin x$；　（8）$y=\ln(1+x^2)$；

（9）$y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}(a>0)$；　（10）$y=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（11）$y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}(a>0)$；　（12）$y=e^{-x^2}$。

3．问a、b为何值时，点（1，3）为曲线$y=ax^3+bx^2$的

扭转点？

4. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值，使曲线在扭转点处的法线通过原点。

5. 选定 α 和 β 的值，使点(2,2.5) 为曲线 $x^2y+\alpha x+\beta y=0$ 的扭转点。又问它还有哪些扭转点？

6. 证明曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有三个扭转点在同一直线上。

7. 试证曲线 $y=\pm e^{-x}$ 和 $y=e^{-x}\sin x$ 的图形在曲线 $y=e^{-x}\sin x$ 的扭转点上有公共切线。

8. 求下列曲线的扭转点：

（1） $x=t^2$， $y=3t+t^3$。

（2） $x=e^t$， $y=\sin t$。

9. 求下列曲线的渐近线：

（1） $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；　（2） $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$；

（3） $y=\ln x$；　（4） $y=\dfrac{\sin x}{x}$；

（5） $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$；　（6） $y=2x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$；

（7） $y^3=a^3-x^3$；　（8） $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

（9） $y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x-1}$；　（10） $(y+x+1)^2=x^2+1$；

（11） $y=\dfrac{xf(x)+a}{f(x)}$，其中 $f(x)$ 为多项式（不恒等于常数），且 $a\neq0$。

10. 求由参变量表示的曲线的渐近线：

（1） $x=\dfrac{1}{t}$，　$y=\dfrac{t}{t+1}$；

（2） $x=\dfrac{2e^t}{t-1}$， $y=\dfrac{te^t}{t-1}$；

（3） $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$， $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\ (a>0)$；

（4） $x=\dfrac{t-8}{t^2-4}$， $y=\dfrac{3}{t(t^2-4)}$.

11. 证明抛物线 $y=ax^2$ 无渐近线。

12. 描绘下列各曲线的图形：

（1） $y=\dfrac{8a^3}{x^2+a^2}$；　　（2） $y=x-2\operatorname{arctg}x$；

（3） $y=x-\dfrac{1}{x}$；　　（4） $y=\dfrac{x}{3-x^2}$；

（5） $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$；　　（6） $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$；

（7） $y=\dfrac{\ln x}{x}$；　　（8） $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$；

（9） $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$；　　（10） $y=e^{-x}\sin x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$；

13. 求下列曲线在指定点的曲率：

（1） $xy=4$ 在点 $(2,2)$ 处；

（2） $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处；

（3） $y=x^3$ 在点 (x,y) 处；

（4） $y^2=8x$ 在点$\left(\dfrac{9}{8},\ 3\right)$处；

（5） $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(0,0)$ 处；

（6） $y=\sin x$ 在函数所对应的各极值点处；

（7） $x^3+y^3=3axy$ 在点$\left(\dfrac{3}{2}a,\dfrac{3}{2}a\right)$处；

（8） $x=3t^2$， $y=3t-t^3$ 在 $t=1$ 处；

（9） $x=a\cos^3t$， $y=a\sin^3t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处 $(a>0)$；

(10) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$

在 $t=\frac{\pi}{2}$处。

14. 设$f(x)$为二阶可微函数，证明曲线$y=f(x)$在点$M(x,y)$处的曲率可用表达式 $k=\left|\frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}x}\right|$来表示。其中$\alpha$是曲线在点$M$的切线与横轴正向所夹的角。

15. 证明：悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(a>0)$ 上任一点P的曲率半径的数值等于点P之法线夹于点P与x轴间的长度。

16. 要使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{当} x\leqslant 1,\\ ax^2+bx+c, & \text{当} x>1,\end{cases}$$

到处都有连续曲率，a，b，c应为何值？

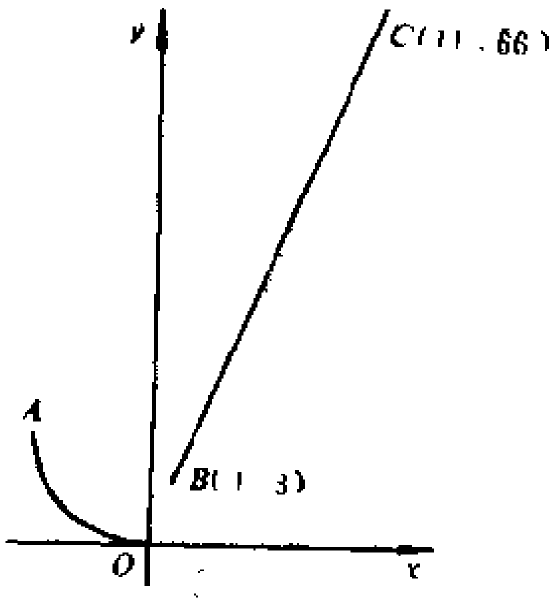


图 2.1

17. 已知半径为5，中心在（0，5）的圆弧AO（图2.1）及连接两点B（1，3），$C(11,66)$的线段BC，今用5次抛物线将点O与点B连接起来，使曲线$AOBC$到处都有连续的曲率。试求该抛物线的方程。

第三章 单变量函数的积分学

第一节 不 定 积 分

复习思考题

1. 叙述原函数的定义．是否任何函数都一定有原函数？

2. 若 $f(x)$ 有原函数，这原函数是不是唯一的？

3. 函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$，$e^x \operatorname{sh} x$，$e^x \operatorname{ch} x$，是不是同一函数的原函数？

4. 如果 $F(x)$ 和 $H(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，那末 $F(x)$ 和 $H(x)$ 有什么关系？

5. 叙述不定积分的定义．它与原函数有什么关系？

6. 设函数 $F(x)$ 在一区间 I 上可微，函数 $f(x)$ 在 I 上连续，回答下列问题：

（1）$\left(\int f(x)dx\right)' = ?$　　（2）$d\int f(x)dx = ?$

（3）$\int F'(x)dx = ?$　　（4）$\int dF(x) = ?$

习　　题

1. 利用基本积分公式求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$；　　（2）$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$；

（3）$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$；　　（4）$\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$；

(5) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;

(6) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; (7) $\int\frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$;

(8) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(9) $\int(2^x+3^x)^2 dx$; (10) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$;

(11) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; (12) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$;

(13) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$; (14) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

(15) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$; (16) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

2. 求下列$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$型的不定积分：

(1) $\int\frac{x}{1+x^2}dx$; (2) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$;

(3) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx$; (4) $\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$;

(5) $\int\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$; (6) $\int\frac{\cos x-\sin x}{3+\sin x+\cos x}dx$.

3. 计算下列不定积分：

(1) $\int|x|dx$; (2) $\int e^{-|x|}dx$;

(3) $\int\max(1,x^2)dx$.

4. 利用基本初等函数的变换$\Big($如$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$，$x^n dx=$

$\frac{1}{n+1}dx^{n+1}$，$\frac{1}{x}dx = d\ln x$，$\sec^2 x dx = d\operatorname{tg} x$等等）计算下列不定积分：

（1）$\int (2x-3)^{100} dx$；（2）$\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)dt$；

（3）$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$；（4）$\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx$；

（5）$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$；（6）$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$；

（7）$\int e^{\sin x}\cdot\cos x dx$；（8）$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$；

（9）$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$；（10）$\int x\sqrt{1-x^2}dx$。

5. 用换元积分法求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；（2）$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$；

（3）$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^6-4}}dx$；（4）$\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$；

（5）$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$；（6）$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^4 x}}dx$；

（7）$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$；（8）$\frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$；

（9）$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$；（10）$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$；

(11) $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{a-b} dx$;　　(12) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}$;

(13) $\int e^{e^x+x} dx$;　　(14) $\int e^{2x^2+\ln x} dx$;

(15) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$;

(16) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}} dx$;

(17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$;　　(18) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;

(19) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$;　　(20) $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$.

6. 先将被积函数分项，然后积分之：

(1) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;　　(2) $\int \sin^2 x dx$;

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$;　(4) $\int \sin^4 x dx$;

(5) $\int \sin mx \sin nx dx$;　　(6) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$;

(7) $\int \cos x \cdot \cos^2 3x dx$;　　(8) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$;

(9) $\int \frac{1}{e^x+1} dx$;　　(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

(11) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$;　　(12) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^2 dx$.

7. 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x \sin 2x dx$;　　(2) $\int x e^{-x} dx$;

(3) $\int x^2\cos 5x\mathrm{d}x$;　(4) $\int x^2a^x\mathrm{d}x$;

(5) $\int x\operatorname{sh}x\mathrm{d}x$;　(6) $\int x\operatorname{arc\,tg}x\mathrm{d}x$;

(7) $\int x^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$;　(8) $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\int x\arcsin x\mathrm{d}x$;　(10) $\int x^n\ln x\mathrm{d}x\ (n\neq -1)$;

(11) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;　(12) $\int \frac{x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x$;　(14) $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$;

(15) $\int \sin x\ln(\operatorname{tg}x)\mathrm{d}x$;　(16) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$;

(17) $\int \operatorname{sh}ax\sin bx\mathrm{d}x$;　(18) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$;

(19) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　(20) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

(21) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$;　(22) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3x}\mathrm{d}x$.

8. 求下列有理函数的积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$;　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$;

(3) $\int \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x$;　(4) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}$;

(5) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\mathrm{d}x$;　(6) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}$;　(10) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+6)^2}$；

(12) $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx$。

9．求下列三角函数的积分：

（1）$\int \frac{dx}{\cos x}$； （2）$\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$；

（3）$\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$；（4）$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$；

（5）$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$； （6）$\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；

（7）$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$； （8）$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$；

（9）$\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$； （10）$\int \frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}$。

10．用最简单的方法计算下列不定积分：

（1）$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$； （2）$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$；

（3）$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$； （4）$\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$；

（5）$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$； （6）$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$。

11．用以下各种变换求$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$：

（1）设 $x=\sec t$； （2）设 $x=\csc t$；

（3）设$y=\frac{1}{x}$； （4）设$\sqrt{x^2-1}=u$。

12．求下列无理函数的积分：

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{2+4x}}$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^{3}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^{2}}}}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+x+1}}$；

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{2}}}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \sqrt{3+4x-4x^{2}}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{4x^{2}+2x-3}}\mathrm{d}x$；　(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^{2}+x+1}}$.

13. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；　(2) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{4}x}$；　(4) $\int \frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\mathrm{d}x$；　(6) $\int |\sin x|\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^{2}}}$；

(9) $\int \sqrt{x^{3}+x^{4}}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$；

(11) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^{2}-1}}$；　(12) $\int \sqrt{x}\ln^{2}x\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$; (14) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

(15) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$;

(16) $\int x^5 e^{x^3} dx$; (17) $\int \cos^4 x dx$;

(18) $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) dx$;

(19) $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)\sin^2 x}$; (20) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x + 4\operatorname{tg} x}} dx$;

(21) $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} dx$; (22) $\int \operatorname{sh}^3 x dx$;

(23) $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} dx$; (24) $\int \operatorname{ch}^4 x dx$;

(25) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$; (26) $\int \frac{2^x}{1-4^x} dx$;

(27) $\int \frac{dx}{1-x^4}$; (28) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$;

(29) $\int \ln(1+x^2) dx$; (30) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(31) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; (32) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$;

(33) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; (34) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx$;

(35) $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arc\,tg} x dx$; (36) $\int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$;

(37) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2} dx$; (38) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;

(39) $\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；　　(40) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$；

(41) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$，

$\left(\text{提示：}\frac{1}{x(x^6+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(x^6+4)-x^6}{x(x^6+4)}\right)$；

(42) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$；　　(43) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$；

(44) $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$。

第二节　定积分的概念与可积函数

复习思考题

1．叙述定积分的定义。黎曼和是怎样构成的？

2．在定积分的定义中，是否可以把 $\lambda(T)\to0$ 的极限过程换成$n\to\infty$（即分点无限增多）？

3．定积分有什么几何意义与物理意义？

4．定积分的存在及其数值应取决于哪些因素？为什么有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta$？

5．定积分存在的必要条件是什么？什么样的函数一定可积？

6．下列函数在指定的区间上是否可积？

（1）$f(x)=\begin{cases}x+\sin x, & x\leqslant0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 在任何有限区间；

（2）$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leqslant1,\end{cases}$ 在区间[0,1]上；

（3）$f(x)=[x]$，其中$[x]$表示不大于x的最大整数，在任何有限区间上；

（4）$f(x)=\max[\varphi(x),\psi(x)]$，$a\leqslant x\leqslant b$，其中$\varphi(x)$ $\psi(x)$都是$[a,b]$上的连续函数。

习　题

1．放射性物体的分解速度V是时间t的函数$V=V(t)$，试表示放射性物体由时间T_0到T_1所分解的质量m：a）用积分和表示其近似值，b）用定积分表示其准确值。

2．一个图形是由横轴和直线$y=2x$，$x=4$，$x=6$所围成，将区间$[4,6]$分成n等分，作n阶台阶形。试求内接和外接n阶台阶形的面积，证验两个面积当n无限增大时趋于同一个极限，即图形的面积。再求出用这两个n阶台阶形的面积代替图形的面积时的绝对误差。

3．已知质点的运动速度$V=2t+4$厘米／秒，试求质点在前10秒内所走过的路程。

4．由定义计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 e^x dx$；　　（2）$\int_0^1 x dx$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$；　　（4）$\int_1^5 x^2 dx$；

（5）$\int_1^2\frac{dx}{x}$；　　（6）$\int_1^2 \ln x dx$。

［提示：在（5）和（6）中，使分点的坐标成几何级数$2^{\frac{i}{n}}(i=1,2,3,\cdots,n)$］。

5．先将下列各式写成黎曼和极限的形式，再表成定积分：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots\right.$

$\left.+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$.

第三节 定积分的性质及其计算

第四节 定积分的近似计算

复习思考题

1. 定积分有哪些基本性质?

2. 若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，函数$g(x)$在$[a,b]$上不可积，问函数$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$上是否可积?

3. 若函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都不可积，问$f(x)+g(x)$和$f(x)\cdot g(x)$在$[a,b]$上是否不可积? 试举例说明。

4. 定积分与原函数有什么关系?

5. 既然一个可变上限的定积分是被积函数的原函数，那末能否说定积分与原函数的概念是相同的?

6. 哪一类函数有原函数，为什么?

7. 使用牛顿—莱布尼兹公式时，需要具备什么条件?

8. 下列定积分是否可利用牛顿—莱布尼兹公式?错在哪里?

(1) $\int_0^\pi \sec^2 x dx=\operatorname{tg}x\Big|_0^\pi=0$;

（2）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$。

9. 使用定积分换元公式需要注意什么条件？如下例，定积分计算对吗？其错误何在？

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}\xlongequal{\text{令}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y}\int_0^0\frac{2dy}{(1+y^2)\left(1+0.5\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}=0.$$

10. 积分近似计算法的基本思想是什么？

习　题

1. 不计算，试比较下列积分的大小：

（1）$\int_0^1 x^2dx$和$\int_0^1 x^4dx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx$和$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2xdx$；

（3）$\int_1^2\ln xdx$ 和 $\int_1^2(\ln x)^2dx$；

（4）$\int_3^4\ln xdx$ 和 $\int_3^4(\ln x)^2dx$；

（5）$\int_0^1 e^xdx$和$\int_0^1 e^{x^2}dx$；

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx$和$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2xdx$。

2. 确定下列积分的符号：

（1）$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln xdx$；　（2）$\int_{-2}^{1}x^32^xdx$；

（3）$\int_0^{2\pi}x\sin xdx$；　（4）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$。

3. 若$f(x)$在$[a,b]$上单调增，证明：

$$(b-a)f(a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f(b).$$

4. 证明下列各不等式：

（1）$\int_0^{10}\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+16}\leqslant\frac{5}{6}$；

（2）$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\leqslant\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$；

（3）$\int_0^{2\pi}|a\sin x+b\cos x|\,dx\leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$；

（4）$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$，$(m>0,\ n>0)$.

5. 估计下列积分值的范围：

（1）$\int_0^2\frac{x^2+5}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}$；（4）$\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x$.

6. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$，$0<a<b$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$，$p>0$.

7. 证明：若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 的充分必要条件是 $f(x)=0\,(a\leqslant x\leqslant b)$.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 是区间$[a,b]$ 上的连续正值函数，则
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

9. 计算下列微商：

（1）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$；

（2）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt$；

（3）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\sin t^2\,dt$；　　（4）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sqrt{\ln x}}^{x}e^{-t^2}\,dt$。

10. 对下列函数的参数方程，求$\dfrac{dy}{dx}$：

（1）$x=\displaystyle\int_0^t\sin t\,dt$，$y=\displaystyle\int_0^t\cos t\,dt$；

（2）$x=\displaystyle\int_1^{t^2}t\ln t\,dt$，$y=\displaystyle\int_{t^2}^1 t^2\ln t\,dt$。

11. 当 x 为何值时，函数$f(x)=\displaystyle\int_0^x xe^{-x^2}dx$有极值？

12. 试求函数 $y=\displaystyle\int_0^x(x-1)(x-2)^2dx$ 图形的极值点和扭转点。

13. 设 $f(x)$ 是连续正值函数，证明当 $x\geqslant0$时，函数$\varphi(x)=\dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}$递增。

14. 求下列极限：

（1）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^2t\,dt}{x}$；　　（2）$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^3\,dt}{x^4}$；

（3）$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\mathrm{arc\,tg}\,t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^{\sin x}\dfrac{\operatorname{arctg}(u^2)}{u}du$；

（6）$\lim\limits_{\alpha\to 1}\dfrac{\int_{2\alpha-1}^{\alpha^2}e^{x^2}dx}{(\alpha-1)^2}$。

15．用牛顿——莱布尼兹公式计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\pi}\sin x dx$；　　（2）$\int_0^1 e^x dx$；

（3）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　（4）$\int_2^3\dfrac{dx}{2x^2+3x-2}$；

（5）$\int_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$；　　（6）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$；

（7）$\int_0^2|x-1|dx$；　　（8）$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$；

（9）$\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}x\,dx$；　　（10）$\int_1^{e^2}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

（11）$\int_0^x f(x)dx$，　$f(x)=\begin{cases}1\text{，} & \text{当}|x|\leqslant L\text{，}\\ 0\text{，} & \text{当}|x|>L\text{。}\end{cases}$

16．设$f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1;\end{cases}$　求$F(x)=\int_{-1}^x f(x)dx$，

并求$\dfrac{dF(x)}{dx}$。

17．若m，n为正整数，证明：

（1）$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0$；

（2）$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=$

$$\begin{cases}0, & 当m\neq n,\\ \pi, & 当m=n.\end{cases}$$

18．计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\ln 2}xe^{-x}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin x\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^a\ln(t+\sqrt{t^2+a^2})\mathrm{d}t\ (a>0)$；

（6）$\int_0^a\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}(a>0)$；

（7）$\int_1^e\ln^2x\mathrm{d}x$；　　（8）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{3+2\cos t}$。

19．设 n 为正整数，证明：

（1）$\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^{\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{\pi}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=0$；

（4）$\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=0$；

（5）$\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x$.

20．利用$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$的递推公式计算下列

定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\pi} \cos^8 x \mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^{11} x \mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x \mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^{1} \sqrt{(1-x^2)^3} \mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x$；　　(8) $\int_0^{a} x^2 \sqrt{a^2-x^2} \mathrm{d}x$。

21. 用分部积分法证明下列积分递推公式：

(1) $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \dfrac{\pi}{2}, \text{当 } m, n \text{ 全为偶数} \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, \text{当 } m, n \text{ 不全为偶数.} \end{cases}$$

(2) $I_n = \int_{-1}^{0} x^n e^x \mathrm{d}x = (-1)^n n! \left(1 - e^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$。

22. 证明：$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \ (x>0)$。

23. 证明：$\int_0^a x^3 f(x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) \mathrm{d}x \ (a>0)$。

24. 设 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续函数，证明 $\int_a^{a+T} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^T f(x) \mathrm{d}x$，并说明这个等式的几何意义。

25. (1) 若 $f(x)$ 是连续的奇函数，证明 $\int_0^x f(x) \mathrm{d}x$ 是偶函数；

（2）若$f(x)$是连续的偶函数，$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$是奇函数吗？

（3）若$f(x)$是连续的偶函数，证明$\int_0^x x^3 f(x)\mathrm{d}x$是偶函数；

（4）若$f(x)$在实轴上连续，且恒有$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$，证明$f(x)$是奇函数。

26. 利用函数的奇偶性计算以下定积分：

（1）$\int_{-5}^{5} \frac{x^3 \sin^2 x}{(x^4+2x^2+1)}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x\mathrm{d}x$；　（4）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$；

（5）$\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。

27. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

并且用所得结果计算积分$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$。

28. 设$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x\mathrm{d}x$，证明：

（1）$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$；

（2）$\frac{1}{2n+2} < I_n < \frac{1}{2n-2}$。

29. 计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ (ab \neq 0)$；

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x \mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^4 x \mathrm{d}x$; (6) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 \mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d}x$;

(8) $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \mathrm{d}\theta$ (n是正整数);

(9) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x} \mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\operatorname{tg} x)^{100}}$;

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2} \mathrm{d}\theta$;

(12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos x} \mathrm{d}x$.

30. 试证积分 $\int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x} \mathrm{d}x$ 介于 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 之间，并求其值。

31. 证明若 $f(x)$ 是在有界闭区间 $[a,b]$ 上的正值连续函数，且在这区间上的最大值为 M，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x} = M$。

32. 若$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导函数，证明：

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant |f(0)|.$$

33. 已知$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$，试把$[0,1]$区间4等分，用抛物线法计算$\pi$的近似值，精确到$10^{-4}$。

34. 根据辛普生公式，用下表所列的函数值，计算积分$\int_{1.05}^{1.35} f(x)\mathrm{d}x$的近似值：

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

第五节 定积分的应用

复习思考题

1. 叙述应用定积分解决实际问题的主要过程。

2. 由曲线$x=g(y)$，Oy轴及平行于Ox轴的直线$y=c$，$y=d$所围成的曲边梯形的面积可表示成怎样形式的定积分？

3. 写出曲线段$x=g(y)$（$c\leqslant y\leqslant d$）绕Oy轴旋转所得旋转体的体积与侧面积的公式。

4. 在"定积分应用"这一节的所有公式中，积分号下的被积表达式各表示什么意义？

习　题

1. 计算下列曲线围成的平面图形的面积：

（1）$y=x^2$，$x+y=2$；　　（2）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(3) $y^2=x^2(a^2-x^2)$;

(4) $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$;

(5) $y=x$, $y=2x$, $xy=2$ 在第一象限部分;

(6) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$;

(7) $y^2=4(x+1)$, $y^2=4(1-x)$;

(8) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 及$y=0$;

(9) $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(10) $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=2t^2-t^3;\end{cases}$

(11) $r=a(1+\cos\varphi)$; (12) $r^2=a^2\sin 2\varphi$.

2. 计算下列曲线的弧长:

(1) $y=a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant b<a)$;

(2) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(0\leqslant x\leqslant b)$;

(3) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) $\begin{cases}x=a\cos^4 t,\\ y=a\sin^4 t,\end{cases}$ $\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(5) $r=a\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$;

(6) $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}\left(|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. 证明: 高为h,底半径为r的正圆锥的体积$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

4. 计算下列曲面所围成的体积:

（1）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

（2）$x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$。

5．证明：将面积 $a\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant f(x)$（$f(x)$ 为连续函数）绕 y 轴旋转所成的旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

6．求由下列曲线旋转所成的立体体积：

（1）$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 绕 x 轴及 y 轴；

（2）$y=\dfrac{3}{x}$，$y=4-x$ 绕 x 轴及 y 轴；

（3）$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴；

（4）$x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$ 绕 x 轴。

7．求下列各区域绕 y 轴旋转所形成的立体体积：

（1）$y=\dfrac{\sin x}{x}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$；

（2）$y=e^{x^2}$，$0\leqslant x\leqslant 1$；

（3）$y=\dfrac{1}{xe^x}$，$1\leqslant x\leqslant 4$；

（4）$y=\dfrac{\ln x}{x^2}$，$1\leqslant x\leqslant 2$。

8．求下列曲线旋转后所成立体的侧面积：

（1）$x^2+y^2=R^2$ 绕 x 轴；

（2）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴（设 $a>b$）；

（3）$y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 x 轴；

（4）$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ （$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）绕 x 轴；

（5）$r=a(1+\cos\varphi)$ 绕极轴。

9．求下列函数的平均值：

（1）$y=2xe^{-x}$，$0\leqslant x\leqslant 2$；

（2）$y=\sin^2 x$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$。

10．两个带正电的小球中心相距为 r，带电量分别为 q_1,q_2，其相互排斥力可由库仑定律 $F=k\frac{q_1q_2}{r^2}$（k 为常数）来计算。设当 $r=50$ 厘米时，$F=20$ 克力，求两球的距离由 $r=75$ 厘米变到 $r=100$ 厘米时，库仑力所作的功。

11．挖一半球形的蓄水池，深 20 米，求克服土块重力所作的功。（设土的比重为 1.5 吨/米^3）。

12．求水对垂直板的压力，这个板的形状是上底为 6 米，下底为 10 米，高为 5 米的等腰梯形，设下底沉于水面下 20 米处。（设水的比重为 1 吨/米）。

13．一块高为 a，底为 b 的等腰三角形薄板垂直地沉没在水中，顶在下，底与水面相齐，试计算薄板所受的水压力。如果把它倒放，使它的顶与水面相齐，而底与水面平行，那末压力如何？

14．设某物质在化学反应中分解的速度与反应进行的时间成正比，比例系数为 2，设开始时有物质 m_0 克．问 3 秒后还有物质多少？

15．一质点沿直线运动，受到阻力的影响，速度每秒减小 2 米，若初速度为 25 米/秒，问它能走多远？

16．高 H 为 20 厘米的圆锥形漏斗盛满了水，上口半径 R 为 12 厘米，底口半径 r 为 0.3 厘米；问：（1）漏斗内的水平面降低 5 厘米需要多少时间？（2）全部漏完需多少时间？

第六节　广义积分

复习思考题

1．广义积分分为几类？分别叙述它们收敛的定义。

2．若积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，$a<b$，问积分$\int_b^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$是否收敛？反之又如何？

3．积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的意义如何？若积分$\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$都发散，积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$能否收敛？

4．若积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$，对否？

5．试建立积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的分部积分和换元公式。

习　题

1．判断下列广义积分的收敛性：

（1）$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$；　（4）$\int_0^{+\infty}x\sin x\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\mathrm{d}x$；　（6）$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x$；

（7）$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}\mathrm{d}x$；　（8）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；

（9）$\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$；　（10）$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；

（11）$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$；　（12）$\int_a^{2a}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{3/2}}$；

(13) $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$；　　(14) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$。

2. 计算下列广义积分：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$；　　(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$，　$(a>0)$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$；　　(4) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$；

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$；　　(6) $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ $(a \neq 0)$；

(7) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$，　（$n$是正整数）；

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$，（$n$是正整数，$a>0$）；

(9) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(10) $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$；

(11) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$；　　(12) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$；

(13) $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$，　(14) $\int_0^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx$，

（m是自然数）；

(15) $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$，（$n$是正整数）；

(16) $\int_0^1 (\ln x)^n dx$，（n是正整数）。

第四章　可积微分方程

第一节　微分方程的基本概念

第二节　一阶微分方程

1．求下列可分离变量方程的通解：

（1）$(1+y^2)dx=xdy$；　（2）$y'=e^{2x-y}$；

（3）$y-xy'=a(y+x^2y)$；　（4）$xyy'=1-x^2$；

（5）$\operatorname{tg}x\cdot\sin^2ydx+\cos^2x\operatorname{ctg}ydy=0$；

（6）$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$；

（7）$yy'=\dfrac{1-2x}{y}$；　（8）$xy'+y=y^2$。

2．求下列方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$，　$y|_{x=0}=1$；

（2）$y'\sin x=y\ln y$，　$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$；

（3）$\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$，　$y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

（4）$y-xy'=6(1+x^2y')$，　$y|_{x=1}=1$。

3．一曲线过点（2，3），其在坐标轴间的任意切线段被切点平分，求这曲线。

4．求所有这样的曲线，其在切点和横坐标轴之间的切线段被此切线和纵坐标轴的交点所平分。

5．一物体冷却的速率与物体和周围介质温度之差成正比，比例系数为$k=k_0(1+\alpha t)$，在这种假定下，设$t=0$时物体温度

$\theta=\theta_0$，介质温度为 θ_1，试求温度 θ 和时间 t 的依从关系。

6．某液体起化学反应的速率与该液体尚未起化学反应的存量成正比。设液体总量为 a，试求这液体起化学反应之量与时间 t 的关系。

7．有一质量为 1 克的质点受力的作用作直线运动，这力从瞬时 $t=0$ 秒起和时间成正比，且和质点运动的速度成反比。在 $t=10$ 秒时，速度等于 50 厘米/秒，力为 4 达因。试建立这质点运动的微分方程，并求 1 分钟后的速度。

8．一汽艇以速度 v 等于 10 公里/小时在静水上运动，它的发动机在开足马力后关掉，经过 20 秒后，汽艇的速度降低为 v_1 等于 6 公里/小时。设水对汽艇运动的阻力和速度成正比，试求：

(1) 发动机停止 2 分钟后汽艇的速度；

(2) 发动机停止 1 分钟后汽艇所走的路程。

9．求下列齐次方程和可化为齐次方程的解：

(1) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$；　(2) $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$；

(3) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$；　(4) $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$；

(5) $y^2+x^2y'=xyy'$；　(6) $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$；

(7) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$；　(8) $y'=\dfrac{y}{x}\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$；

(9) $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$；　(10) $y'=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$；

(11) $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$；　(12) $y'=\dfrac{x-y+5}{x-y-2}$；

(13) $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$；　(14) $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$；

(15) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$；

(16) $(x+y+1)\mathrm{d}x=(2x+2y-1)\mathrm{d}y$。

10. 一曲线上任意点 M 的向径的长度等于点 M 的切线和 y 轴的交点与原点间的距离，求这曲线。

11. 求下列线性方程和贝努里方程的解：

(1) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$；

(2) $y'+ay=\mathrm{e}^{mx}$； (3) $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$；

(4) $(y^2-6x)y'+2y=0$； (5) $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$；

(6) $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$； (7) $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$；

(8) $(x+1)y'-ny=\mathrm{e}^x(x+1)^{n+1}$；

(9) $y'=x\sqrt{y}+\dfrac{xy}{x^2-1}$； (10) $y'=\dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$；

(11) $\mathrm{d}y+(xy-xy^3)\mathrm{d}x=0$； (12) $y'+2xy=2x^3y^3$；

(13) $(xy+x^2y^3)y'=1$；

(14) $3y^2y'-ay^3=x+1$。

12. 由曲线上任意点的横坐标及该点切线与纵轴交点的纵坐标为边所作成的矩形面积为一常量 a^2，求这曲线。

13. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于 v_0 的一瞬间起，有一与时间的立方成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面，此外，质点还受介质的阻力，阻力与速度和时间的乘积成正比（比例系数为 k_2），试求速度和时间的依从关系。

14. 在电阻为 R，自感系数为 L 和电压为 V 的电路中，电流强度 I 满足方程

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI=V$$

如果 L，R 均为常数，而 $V=E\sin\omega t$，其中 ω 和 E 为常数，试求电流强度 I 与时间 t 的依从关系。

15. 从原点到曲线上任意点的切线的距离等于从原点到这同一点的法线的距离，求此曲线。

16. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

（1）$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$，　$y(1)=0$；

（2）$y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，　$y(1)=1$；

（3）$\dfrac{y-xy'}{x+yy'}=2$，　$y(1)=1$；

（4）$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$，　$y(1)=1$；

（5）$y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1+x$，　$y(0)=1$；

（6）$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$，　$y(\pi)=1$；

（7）$xy'+2y=\sin x$，　$y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$；

（8）$y'+y\cos x=\sin x\cos x$，　$y(0)=1$。

17. 用适当的变量代换（如：$x=u^2$，$y=v^2$，$z=\sin y$，$z=\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$，$z=x+y$ 等），将下列方程化为齐次方程或线性方程，并求通解：

（1）$y'+x=\sqrt{x^2+y}$；　（2）$y'=\left(\dfrac{a}{x+y}\right)^2$；

（3）$(y^4-3x^2)dy+xydx=0$；

（4）$y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$；

（5）$(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y dy=0$；

（6）$y'-e^{x-y}+e^x=0$；

（7）$y'=\dfrac{x}{\cos y}-\operatorname{tg} y$；

(8) $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$;

(9) $xy'\ln x \sin y + \cos y(1 - x\cos y) = 0$;

(10) $y' = \cos(x - y)$.

18. 求下列黎卡提方程的通解：

(1) $y' = xy^2 - \frac{3}{x^2}$;

(2) $xy' + y - e^{-x}y^2 = xe^x$.

第三节　可降阶的二阶微分方程

1. 求下列二阶方程的通解：

(1) $y'' = x + \sin x$;　(2) $xy'' = y'$;

(3) $y'' = y' + x$;　(4) $y'' = \frac{y'}{x} + x$;

(5) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;　(6) $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$;

(7) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;　(8) $1 + (y')^2 = 2yy''$;

(9) $(y')^2 + 2yy'' = 0$;　(10) $a^2y'' - y = 0$;

(11) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$;　(12) $yy'' + (y')^2 = 1$;

(13) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$;　(14) $y'' = e^y$;

(15) $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$;　(16) $y'y''' = 3(y'')^2$.

2. 求下列二阶方程满足所给初始条件的特解：

(1) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$,　$y|_{x=2} = 2$,　$y'|_{x=2} = 1$.

(2) $2y'' = 3y^2$;　$y|_{x=-2} = 1$,　$y'|_{x=-2} = -1$.

(3) $y^3y'' = -1$;　$y|_{x=1} = 1$,　$y'|_{x=1} = 0$.

(4) $y'' = e^{2y}$;　$y|_{x=0} = 0$,　$y'|_{x=0} = 1$.

(5) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$;　$y|_{x=1} = 1$,　$y'|_{x=1} = 0$.

3．一个物体，只受地球引力作用，自无穷高处落下，求落到地面时的速度。（地球半径算作6400千米，重力加速度g=9.8米/秒^2）．

4．一子弹以速度v_0=200米/秒打进一块厚度为h=10厘米的板，然后穿透它，以速速v_1=80米/秒离开板，设板对子弹运动的阻力和运动速度的平方成正比，求子弹穿过板所用的时间。

5．质量为m的物体以初速v_0铅直向上抛，空气阻力等于kv^2，（1）建立物体上抛和下落运动的微分方程；（2）求物体落到地面上那一瞬间所具有的速度。

第五章　空间解析几何

第一节　空间直角坐标系

1．指出下列各点在哪个坐标轴上或坐标平面上？

（1）$(-4,0,0)$；　　（2）$(0,-7,0)$；

（3）$(0,-7,2)$；　　（4）$(-5,0,3)$．

2．指出下列各点位于第几卦限？

（1）$(2,-1,3)$；　　（2）$(-1,-2,4)$；

（3）$(1,4,-3)$；　　（4）$(-1,-2,-3)$；

（5）$(1,-1,-1)$；　　（6）$(-2,1,-3)$．

3．设某点与给定点 (a,b,c) 分别对称于下列坐标平面：（1）Oxy；（2）Oyz；（3）Oxz．求它的坐标．

4．设某点与给定点 (a,b,c) 分别对称于（1）x 轴；（2）y 轴；（3）z 轴；（4）原点 O．求它的坐标．

5．求点 $P(4,-3,5)$ 到坐标原点以及到各坐标轴的距离．

6．求顶点为 $A(2,1,4)$，$B(3,-1,2)$，$C(5,0,6)$ 的三角形各边的长．

7．在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点．

8．在 Oyz 平面上求一点 P，使它与三已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 及 $C(0,5,1)$ 等距离．

9．求点 $(1,-3,2)$ 关于点 $(-1,2,1)$ 的对称点．

提示：应用中点公式

第二节 向 量 代 数

1. 判断下列结论是否成立，并举例说明：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$。

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。

(3) 两单位向量的数量积必等于1，向量积必等于一单位向量。

(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

(5) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$。

(6) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$。

(7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$。

2. 设 $ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 是对角线 AC 和 BD 的交点。试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$。

3. 设 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，证明：对任意一点 O，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

4. 证明空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形。

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,3)$，$\boldsymbol{c}=(4,-1,-3)$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 和 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ 的坐标。

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-4)$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的模和方向余弦。

7. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 的坐标。

8. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与轴 Ox 和 Oy 所夹的角 $\alpha=60^\circ$，$\beta=120^\circ$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，试求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标。

9. 设 $\boldsymbol{a}=(-2,3,\beta)$，$\boldsymbol{b}=(\alpha,-6,2)$，问 α,β 为何值时，两向量共线？

10. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$，且 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$，计算：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　（2）$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(4,-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(6,-3,2)$，试计算：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　　（2）$\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}$；

（3）$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$；　　（4）$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$。

12. 求向量 $\boldsymbol{a}=(2,-4,4)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-3,2,6)$ 夹角的余弦。

13. 试求向量 $\boldsymbol{a}=(5,2,5)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$ 上的投影，即求数值 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^{\circ}$。

14. 证明下列恒等式

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$$

并说明它的几何意义。

15. 作图说明下列各式：

（1）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$。

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，试计算：

（1）$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$；

（2）$|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$。

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，又 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$，试计算：

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$；　　（2）$[(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$。

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-1,-2)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$，试求下列向量积的坐标：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　　（2）$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$。

19. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三个互相垂直的已知向量，且 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$，求 $\boldsymbol{r}$ 的模。

20. 已知点$A(1,2,0)$，$B(3,0,-3)$，$C(5,2,6)$，求三角形ABC的面积。

21. 计算顶点为$A(2,-1,1)$，$B(5,5,4)$，$C(3,2,-1)$，$D(4,1,3)$的四面体的体积。

22. 判断下列向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是否共面？

（1）$\boldsymbol{a}=(2,3,-1),\boldsymbol{b}=(1,-1,3),\boldsymbol{c}=(1,9,-11)$；

（2）$\boldsymbol{a}=(3,-2,1),\boldsymbol{b}=(2,1,2),\boldsymbol{c}=(3,-1-2)$.

23. 下列四点：$A(1,2,-1)$，$B(0,1,5)$，$C(-1,2,1)$，$D(2,1,3)$是否在一个平面上？

24. 已知$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$，问$A,B,C$三点是否共线？

25. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$的单位向量，试求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$的值。

26. 试证恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

27. 已知$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，试证：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

28. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共线，且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，求证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$.

29. 若向量$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$垂直于向量$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，向量$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$垂直于向量$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求两向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$间的夹角。

30. 计算以向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-3\boldsymbol{r}$，和$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$为棱的平行六面体的体积，这里$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{r}$是互相垂直的单位向量。

31. 计算以向量$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{m}+7\boldsymbol{n}$为棱的平行六面体的体积，这里$|\boldsymbol{m}|=\dfrac{1}{2}$，$|\boldsymbol{n}|=3$，$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=135°$.

32. 点M的矢径与x轴成$45°$角，，与y轴成$60°$角，其长为6单位，若在z轴上的坐标是负值，求点M的坐标。

33. 已知一个三角形的一个顶点 $A(2,-5,3)$ 及二边的向量 $\overrightarrow{AB}=(4,1,2)$ 和 $\overrightarrow{BC}=(3,-2,5)$，求其余顶点的坐标和向量 $\overrightarrow{CA}$，并求 $\angle A$。

34. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，证明：

$$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=a^4\boldsymbol{b}.$$

35. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与实数λ；求一向量 $\boldsymbol{x}$，使其满足方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\lambda.\end{cases}$$

第三节　平面与直线

1. 指出下列平面位置的特点，并作图：

（1）$4x+4y+4z=-2$；（2）$2x-3y+2=0$；

（3）$y-3z=0$；（4）$3x-2=0$。

2. 已知点 $P(2,-1,-1)$ 是原点到一个平面所引垂线的垂足，求这个平面的方程。

3. 试求通过点 $M_1(2,-1,3,)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{v}=(3,-1,4)$ 的平面的方程。

4. 设平面通过点 $(5,-7,4)$ 且在 x，y，z 三轴上的截距相等，求平面方程。

5. 一平面通过点 $(2,1,-1)$，而在 x 轴和 y 轴上截距分别为 2 和 1，求它的方程。

6. 试求经过下列各组三点的平面方程：

（1）$(3,-1,2)$，$(4,-1,-1)$，$(2,0,2)$；

（2）$(2,3,0)$，$(-2,-3,4)$，$(0,6,0)$；

（3）$(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$，$(1,-1,2)$。

7. 试判断下列方程组中各组平面的位值关系，（平行，重合，相交，垂直）：

（1）$2x-3y+5z-7=0$ 与 $2x-3y+5z+3=0$；

（2）$4x+2y-4z+5=0$ 与 $2x+y+2z-1=0$；

（3）$x-3z+2=0$ 与 $2x-6z+4=0$；

（4）$3x-y-2z-5=0$ 与 $x+9y-3z+2=0$；

（5）$2x+3y-z-3=0$ 与 $x-y-z+5=0$；

（6）$2x-5y+z=0$ 与 $x+2z-3=0$。

8．求通过点 $M(3,-1,1)$ 且同时垂直于两个平面 $2x-z+1=0$ 和 $y=0$ 的平面方程。

9．求通过点 $M(-5,2,-1)$ 且平行于坐标面 Oyz 的平面的方程。

10．求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于 Oy 轴的平面的方程。

11．求下列各对平面的夹角：

（1）$2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$；

（2）$4x+2y+4z-7=0$ 和 $3x-4y=0$；

（3）$2x+y-2z-4=0$ 和 $3x+6y-2z-12=0$。

12．计算点到平面的距离 d：

（1）$M(2,-1,-1)$，$16x-12y+15z-4=0$；

（2）$M(1,2,-3)$，$5x-3y+z+4=0$；

（3）$M(9,2,-2)$，$12y-5z+5=0$。

13．求两平行平面间的距离：

（1）$3x+6y-2z-7=0$ 与 $3x+6y-2z+14=0$；

（2）$2x-y+2z+9=0$ 与 $4x-2y+4z-21=0$。

14．试判定点 $M(2,-1,1)$ 与原点在下列平面的同侧还是异侧？

（1）$5x+3y+z-18=0$；

（2）$x+5y+12z-1=0$。

15．求与两平面 $x+y-2z-1=0$ 和 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面。

16. 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$ 所成两个二面角的平分面。

17. 在平面 $x+y+z-1=0$ 与三坐标平面所围成的四面体内求一点，使它到四个面的距离相等。

18. 在 Oy 轴上求一点，使它到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离 $d=4$。

19. 在 Oy 轴上求一点，使它到平面 $2x+3y+6z-6=0$ 及平面 $8x+9y-72z+73=0$ 距离相等。

20. 分别按下列各组条件求平面方程：

（1）平分两点 A（1，2，3）和 B（2，－1，4）间的线段且垂直于线段 AB；

（2）与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，且到原点的距离为1个单位；

（3）与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，而点 $(0,2,-1)$ 到这两个平面的距离相等；

（4）通过 x 轴，且点 $(5,4,13)$ 到这个平面的距离为8个单位。

21. 求下列平面的方程：

（1）经过点 M（0，0，1）及 N（3，0，0），并与 Oxy 平面成 $\pi/3$ 角；

（2）经过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 $\pi/3$ 角。

22. 过点 P (a,b,c) 作平行于坐标面的三个平面，它和坐标面围成一个长方体（如图）。试证通过 A,B,C 的平面和通过 A',B',C' 的平面是平行的。并求这两平面的距离。

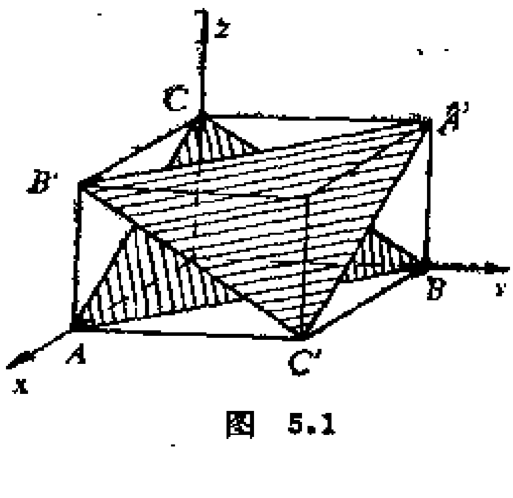


图 5.1

23. 一半径 $R=5$，球心在 $M(5,-5,3)$ 的球与平面 $9x-6y$

$-2z=25$ 相截得一圆，求这圆的圆心坐标和半径。

24. 分别求出满足下列各组条件的直线方程：

（1）过点（2，3，－8）且平行于直线

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+8}{5},$$

（2）过点 $(2,-3,4)$ 且与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直；

（3）过点 $(0,2,4)$ 而与两平面 $x+2z=1$，$y-3z=2$ 平行；

（4）过点 $(-1,2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x+y-2z-1=0\\x+2y-z+1=0\end{cases}$；

（5）过点 $(2,-3,4)$ 且和 z 轴垂直并相交。

25. 求通过两已知点的直线方程：

（1）$(1,-2,1)$，$(3,1,-1)$；

（2）$(3,-1,0)$，$(1,0,-3)$。

26. 求通过点 $(-1,-4,3)$ 并与下面两直线：

$$\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$$

都垂直的直线方程。

27. 求直线 $\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\3x-5y+2z+1=0,\end{cases}$ 的参数方程。

28. 求直线与平面的交点：

（1）$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$，$2x+3y+z-1=0$；

（2）$\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$，$x+2y-2z+6=0$；

（3）$\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$，$3x+5y-z-2=0$；

（4）$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$，$3x-3y+2z-5=0$。

29．求下列直线的夹角：

（1）$\begin{cases}2x-2y-z+8=0\\x+2y-2z+1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}4x+y+3z-21=0\\2x+2y-3z+15=0\end{cases}$；

（2）$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$ 和 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2}$，

（3）$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$；

（4）$\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-2y+z+1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x-y-z-1=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}$。

30．证明下列各组直线互相平行，并求它们间的距离：

（1）$\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=z$ 和 $\begin{cases}x+y-z=0\\x-y-5z-8=0\end{cases}$；

（2）$\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$ 和 $\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\x-y-z-22=0\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}2y+z=0\\3y-4z=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}5y-2z=8\\4y+z=4\end{cases}$。

31．证明下列各组直线垂直相交，并求它们的交点：

（1）$\begin{cases}x+2y=1\\2y-z=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x-y=1\\x-2z=3\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}4x+y-3z+24=0\\z-5=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+y+3=0\\x+2=0\end{cases}$。

32．求直线和平面的夹角 φ：

（1）$\begin{cases}3x-2y=24\\3x-z=-4\end{cases}$，　$6x+15y-10z+31=0$；

（2）$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0, \end{cases}$ $x-y-z+1=0$；

（3）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$，$3x-2y+7z=8$。

33．求点到直线的距离 P：

（1）$M_0(1,0,-1)$，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$；

（2）$M_0(1,2,3)$，$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=3 \end{cases}$；

（3）$M_0(3,-1,2)$，$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y-z+1=0。\end{cases}$

34．证明下列各组直线是异面直线，并求它们的距离（即两直线公垂线之长）：

（1）$\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$；

（2）$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=3 \end{cases}$ 和 $x=y=z-1$；

（3）$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0。\end{cases}$

35．试求通过点 $P_0(1,-2,1)$ 且垂直于直线

$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ 的平面方程。

36．试求通过两平面 $2x-3y+z-3=0$，$x+3y+2z+1=0$ 的交线和一点 $P(1,-2,3)$ 的平面的方程。

37．试求通过直线 $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-3y+2z+2=0 \end{cases}$ 并垂直于平面 $x+2y+3z-5=0$ 的平面方程。

38. 求经过两平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+4=0$ 的交线，且和平面 $x-4y-8z+12=0$ 相交 45° 角的平面方程。

39. 试求过点 $P_0(1,2,-3)$ 且平行于两直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3} \text{ 和 } \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$$

的平面方程。

40. 求通过直线 $x=3t+1$，$y=2t+3$，$z=-t-2$ 且平行于直线 $\begin{cases}2x-y+z-3=0\\x+2y-z-5=0\end{cases}$ 的平面方程。

41. 过直线 $\begin{cases}5x-11z+7=0\\5y+7z-4=0\end{cases}$ 作两互相垂直的平面，其中一平面过点（4，－3，1）求比二平面方程。

42. 求点（$-1,2,0$）在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影。

43. 求点（$2,3,1$）在直线 $x=t-7$，$y=2t-2$，$z=3t-2$ 上的投影。

44. 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 对称的点的坐标。

45. 求点$(1,2,3)$关于直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 对称的点的坐标。

46. 试求 λ，使两直线 $\frac{x-1}{\lambda}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{-3}$ 与 $\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+14}{7}$ 相交，并求出交点和由此两直线确定的平面方程。

47. 经过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线，作切于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的平面。

48. 试求通过点 $P_0(-1,2,-3)$，垂直于向量 $s=(6,-2,$

$-3)$且与直线$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$相交的直线方程。

49。一直线通过点（-3，5，-9），且与两直线

$$\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-y-7=0 \\ 5x-z+10=0 \end{cases}$$

相交，求其方程。

50。求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线的方程。

51。求直线$x=3-t$，$y=-1+2t$，$z=5+8t$在三坐标面上的投影直线方程。

52。写出垂直于平面$5x-y+3z-2=0$，且与它的交线在Oxy平面上的平面方程。

53。求平行于平面$2x+y+2z+5=0$而与三坐标平面所构成的四面体的体积为1单位的平面。

54。求过点$A(1,1,1)$，并与直线$\begin{cases} 3x+y-z+1=0 \\ 2x-y+4z-4=0 \end{cases}$相交成直角的直线方程。

55。求由原点到直线$\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$的垂线方程。

56。一平面通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的垂线并垂直于平面$z=0$，试求其方程。

57。一直线过点$(-1,0,4)$，平行于平面$3x-4y+z-10=0$，且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交，试求其方程。

第四节　常 见 曲 面

1．指出下列方程中哪些是旋转曲面，它们是怎样产生的：

（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$；（2）$x^2+y^2+z^2=1$；

（3）$x^2+2y^2+3z^2=1$；　　（4）$x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$；

（5）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1$；（6）$x^2-y^2-z^2=1$；

（7）$x^2+y^2=4z$；　　（8）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=3z$。

2．指出下列方程在平面直角坐标系 Oxy 和空间直角坐标系 $Oxyz$ 中分别表示怎样的几何图形：

（1）$x=2$；　　（2）$y=x+1$；

（3）$x^2+y^2=4$；　　（4）$x^2-y^2=1$；

（5）$y=x^2+1$；　　（6）$\begin{cases}5x-y+1=0,\\2x-y-3=0;\end{cases}$

（7）$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\\y=2;\end{cases}$　　（8）$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\\x=4.\end{cases}$

3．求下列旋转曲面的方程，并指出它们的名称：

（1）曲线$\begin{cases}y^2-\frac{z^2}{4}=1\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周；

（2）曲线$\begin{cases}y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周；

（3）曲线$\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\z=0\end{cases}$绕$x$轴旋转一周；

（4）曲线$\begin{cases}z^2=5x\\y=0\end{cases}$绕$x$轴旋转一周；

（5）曲线$\begin{cases}x^2+z^2=9\\y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周；

（6）曲线$\begin{cases}y=kx\\z=0\end{cases}$绕$x$轴旋转一周。

4．画出下列各组曲面所围成的立体图形：

（1）$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$；

（2）$z=x^2+y^2$，$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y-1=0$；

（3）$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2+z^2=R^2$；

（4）$x^2+y^2=2x$，$z=0$，$z=1$；

（5）$x^2+y^2+z^2=R^2$，$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$；

（6）$z=xy$，$x^2+y^2=2x$，$z=0$。

5．考察曲面$x^2-y^2-z^2=9$在下列平面上的截痕：

（1）$z=0$；　　（2）$x=0$；

（3）$y=0$；　　（4）$x=5$。

6．考察曲面$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$在下列平面上的截痕：

（1）$x=2$；　　（2）$y=0$；

（3）$y=5$；　　（4）$z=2$。

7．一动点$P(x,y,z)$到原点的距离等于它到平面$z=4$的距离，试求此动点P的轨迹，并判定它是什么曲面。

8．一动点$P(x,y,z)$到点（1，0，0）的距离等于它到平面$z=4$距离的一半，求动点P的轨迹，并判定它是什么曲面。

9．建立通过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线，而母线平行于 z 轴的柱面方程。

10．已知一球面经过点（0，－3，1）且与 Oxy 平面交成圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ z=0\end{cases}$，试求其方程。

11．建立单叶双曲面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线在 Oxy 平面上的投影柱面。

12．问在 Oxy 平面中方程 $xy=h$（h 是或正，或负，或为零的常数）表示怎样的曲线？在空间坐标系中方程 $xy=z$ 表示什么曲面？试用截口法研究它的图形。

第五节　空间的坐标变换

1．用坐标系平移将原点移至 $(2,4,-1)$ 时，问下列各点：$A(-3,4,1)$，$B(2,-3,-5)$，$C(6,7,-3)$ 的新坐标为何？

2．用坐标系平移将原点移至 $O'(1,2,3)$ 时，下列各方程将产生怎样的改变：

（1）$3x-5y+6z=1$；

（2）$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{2}$，

（3）$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$；

（4）$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-7x-8y-9z+19=0$。

3．在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中取向量 $i'=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)$，$j'=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)$，$K'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为新坐标系 $Ox'y'z'$ 的基本单位向量。求点 $A(0,1,0)$，$B(1,0,-1)$

的新坐标和平面 $3x-y-2z+1=0$ 的新方程。

4. 试利用坐标系旋转，消去方程 $x^2-y^2-z^2+2yz+2x+y-8=0$ 中的yz项。

5. 利用坐标系的一般变换，化简下列方程，并指出它们是什么曲面：

(1) $5x^2+y^2+2z^2-4zx+\sqrt{5}x-2y+2\sqrt{5}z+7=0$；

(2) $2x^2+6y^2+2z^2+8xy-4x-8y+3=0$；

(3) $3x^2+5y^2-3z^2+8xz-2x+14z-13=0$。

第六章　多变量函数的微分学

第一节　多变量函数的极限与连续

复习思考题

1．何谓平面点集G的内点，外点和边界点？一个开集满足什么条件时就构成区域？

2．叙述三元函数的定义。

3．以三元函数为例，叙述多元函数极限的定义。多元函数的极限概念与一元函数有何区别？

4，二重极限与累次极限有何不同？在重极限与两个累次极限中，若两个存在能否导至另一个也存在？举例说明。

5．以三元函数为例，叙述多元函数的连续定义和一致连续定义。

6．多元连续函数有哪些重要的性质？

习　题

1．设$f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x+y}$，求$f(0,\frac{\pi}{2})$，$f(1,\frac{\pi}{2})$，$f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。

2．设$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求$f(x,x)$，$f(y,x)$，$f(1,\frac{y}{x})$，$f(t,s)$。

3．设$f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}(x>0)$，求$f(x)$。

$f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$　$(x\neq0)$，求$f(x,y)$。

5. 确定并画出下列函数的定义域：

（1）$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

（2）$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

（3）$z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$；

（4）$u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（5）$u=\sqrt{2az-x^2-y^2-z^2}$；

（6）$u=\log(1-x^2-y^2-y^2)$。

6. 作出下列函数的图形：

（1）$z=1-x-y$；　　（2）$z=x^2+y^2$；

（3）$z=xy$；　　（4）$z=\sqrt{x^2+y^2}$。

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$，又 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，

求 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$。

8. 设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 当\ y\geqslant x,\\ 0, & 当\ y<x,\end{cases}$　　又 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，

求 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$。

9. 设 $z=f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{y}{x}$，又 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，试把 z 表为 (r,θ) 的函数。

10. 设 $f(x,y)=x^y$，$\varphi(x,y)=x+y$，$\psi(x,y)=x-y$，求 $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，$\varphi[f(x,y),\psi(x,y)]$，$\psi[\varphi(x,y),f(x,y)]$。

11. 证明对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，有

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$，但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在。

12. 证明对于函数 $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\ \sin\frac{1}{y}$，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$，但两个累次极限都不存在。

13. 计算下列累次极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$，　$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{x^y}{1+x^y}$，　$\lim\limits_{y\to 0^+}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}$，　$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$，　$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$。

14. 判断下列各题是否有极限，若有极限并求其极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$；　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$；

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$；　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$；

(11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；　(12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$。

15. 若 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，问沿着怎样的方向 φ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，下列有限的极限存在？

(1) $\lim\limits_{\rho \to +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{\rho \to +\infty} e^{x^2-y^2} \sin 2xy$。

16. 求下列函数的不连续点：

(1) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(2) $u = \dfrac{xy}{x-y}$；

(3) $u = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$；　　(4) $u = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$；

(5) $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$；　　(6) $u = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

17. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & 当 (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & 当 (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, & 当\ x+y \neq 0; \\ 0, & 当\ x+y = 0. \end{cases}$

18. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & 若\ x^2+y^2 > 0, \\ 0, & 若\ x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

在点（0，0）处分别对每一个变量 x 或 y（当另一个变量的值固定时）是连续的，但对这两个变量总体来说是不连续的。

19. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & 若\ x^2+y^2 > 0, \\ 0, & 若\ x^2+y^2 = 0; \end{cases}$$

在点（0，0）沿着此点的每一射线

$$x = t\cos\alpha, \qquad y = t\sin\alpha, \ (0 \leqslant t <$$

连续，即 $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0,0)$。但此函数在点 $(0,0)$ 并不连续。

第二节　多变量函数的微商与微分

复习思考题

1．叙述偏微商的定义及其几何意义。

2．何时有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$？

3．叙述二元函数在一点可微的定义，它与一元函数的可微性定义有何异同？

4．具备什么条件就能保证多元函数是可微的？

5．什么是全微分？全微分与全增量有何关系？

6．多元函数的可微性与连续性有什么关系？

习　题

1．求下列各函数在指定点的偏微商：

（1）设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,4)$；

（2）设 $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$；

（3）设 $f(x,y)=3x+\ln(1+xy)$，求 $f_y(1,2)$；

（4）设 $z=\sin x^2y$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=[illegible]}}$。

2．求下列各函数对于每个自变量的偏微商：

（1）$z=\dfrac{xe^y}{y^2}$；　　（2）$z=x^y$；

（3）$z=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$；　　（4）$u=\operatorname{arctg}\dfrac{v+w}{v-w}$；

(5) $z=(1+xy)^y$；　　(6) $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$；

(7) $z=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(8) $z=\ln(x+\ln y)$；

(9) $z=xy\ln\ (x+y)$；　　(10) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；

(11) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$；　　(12) $u=xy+yz+zx$；

(13) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；　　(14) $u=x^{y^z}$；

(15) $u=\rho e^{t\varphi}+e^{-\varphi}+t$；　　(16) $\theta=xe^{-t}+\ln(xy)+t$。

3．设 $z=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,1)}$ 与 $z'_y(x,1)$。

4．设 $f(x,y)=\ln[xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}]$，

求 $f'_x(1,y)$ 及 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,y)}$。

5．设 $f(x,y)=\displaystyle\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$。

6．设 $u=\sqrt{az^3-bt^3}$，试求当 $z=b$，$t=a$ 时 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 的值。

7．求曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ 在点 (2,4,5) 处的切线与 Ox 轴的正向所成的角度。

8．求曲面 $z=xy$ 与平面 $x=3$ 的交线在点（3，4，12）处的切线对于 Oy 轴的斜率。

9．求曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点（1，1，$\sqrt{3}$）处的切线与 y 轴正向所成的角度。

10. 两个曲面 $z=x^2+\frac{y^2}{6}$ 和 $z=\frac{x^2+y^2}{3}$ 与平面 $y=2$ 相交的曲线成什么角度?

11. 在下列各题中，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

(1) $z=\sin xy$;　　(2) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

(3) $z=\frac{x-y}{x+y}$;　　(4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

(5) $z=\ln(x^2+y^2)$;　　(6) $z=\sin^2(ax+by)$;

(7) $z=y^{\ln x}$;　　(8) $z=\arcsin(xy)$.

12. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

13. 设 $u=e^{xyz}$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

14. 设 $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, 验证:

(1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;　(2) $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

15. 设 $z=\ln(e^x+e^y)$, 验证:

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2=0$.

16. 设 $z=(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$, 证明 z 满足方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

17. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明当 $r\neq 0$ 时有:

(1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$;

(2) $\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}$;

(3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{1}{r}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{1}{r}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\dfrac{1}{r}=0$。

18。设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$$

证明 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$。

19。求下列函数的全微分：

(1) $z=\ln(x^2+y^2)$；　　(2) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；

(3) $u=\dfrac{s+t}{s-t}$；　　(4) $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$；

(5) $z=\sin(xy)$；　　(6) $u=x^{yz}$；

(7) $u=xy+yz+zx$；　　(8) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$。

20。求函数 $z=x^2y^3$ 当 $x=2$，$y=-1$，$\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$ 时的全微分及全增量。

21。计算函数 $z=2x^2+3y^2$ 当 $x=10$，$y=8$，$\Delta x=0.2$，$\Delta y=0.3$ 时的 Δz 及 dz，并估计用 dz 来替代 Δz 所产生的相对误差。

22。设 $z=\dfrac{y}{x}$，求当 $x=2$，$y=1$，$dx=0.1$，$dy=0.2$ 时的 dz 及 Δz。

23。设 $z=e^{xy}$，求当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$ 时的 dz。

24。设 $z=\ln(x^2+y^2)$，求当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.1$ 时的 dz。

25。计算下列各式的近似值：

（1）$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$；

（2）$\ln(\sqrt{4.05}+\sqrt[3]{7.99}-3)$；

（3）$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$；

（4）$(10.1)^{2.03}$；

（5）$(1.04)^{2.02}$；

（6）$\dfrac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{0.98}\sqrt[4]{(1.05)^3}}$。

26. 求当 x、y 的绝对值很小时，下列各式的近似式：

（1）$(1+x)^m(1+y)^n$；　　（2）$\ln\dfrac{1+x}{1+y}$。

27. 测量一三角形，设两边边长的误差为 0.1%，测量夹角为 $45°\pm0.25°$，问用公式 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ 计算三角形面积时有多大的相对误差？

28. 已知边长 $x=6$ 米与 $y=8$ 米的矩形，如果 x 边增加 5 厘米，而 y 边减少 10 厘米，问这个矩形的对角线近似变化怎样？

29. 要用水泥做一开口的长方形水塔，其内形长 5 米，宽 4 米，高 3 米，又它的厚度为 20 厘米，试求所需水泥量的近似值。

30. 扇形中心角 $\alpha=60°$，半径 $R=20$ 米，如果中心角增加 $1°$，为了使扇形面积仍然不变，应把扇形半径减少若干？（近似值）

第三节　复合函数的微分法

复习思考题

1. 叙述复合函数求微商的定理。

2. 什么叫做多元函数一阶微分形式的不变性，一阶微分形式何故有不变性？

3. 利用一阶微分形式的不变性推导（全）微分的四则运算基本法则。

习　题

1. 设 $u=x^2y-xy^2$，而 $x=r\cos s$，$y=r\sin s$，求 $\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial s}$。

2. 设 $u=\operatorname{arctg}(1+xy)$，而 $x=s+t$，$y=s-t$，求 $\frac{\partial u}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t}$。

3. 设 $u=e^{xyz}$，而 $x=rs$，$y=\frac{r}{s}$，$y=r^s$，求 $\frac{\partial u}{\partial r}$，$\frac{\partial u}{\partial s}$。

4. 设 $z=x^2\ln y$，而 $x=\frac{u}{v}$，$y=3u-2v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$。

5. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$。

6. 设 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，而 $x=e^t$，$y=t$，$z=\ln t$，求 $\frac{du}{dt}$。

7. 设 $u=\ln(e^x+e^y)$，而 $y=e^x$，求 $\frac{du}{dx}$。

8. 设 $u=\arcsin\frac{x}{y}$，其中 $z=\sqrt{x^2+1}$，求 $\frac{du}{dx}$。

9. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，其中 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$。

10. 设 $u=\arcsin(x+y+z)$，其中 $z=\sin xy$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$。

11. 设 $u=\rho^2+\varphi^2+\theta^2$，其中 $\rho=\operatorname{tg}(\varphi\theta)$，求 $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$，$\frac{\partial u}{\partial \theta}$。

12. 设 $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=t^3$，$\eta=2t^2$，求 $\frac{du}{dt}$。

13. 设 $u=f(x,y,z)$，其中 $x=\sin t, y=\cos t, z=e^t$，求 $\frac{du}{dt}$。

14. 设 $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

15. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

16. 设 $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

17. 设 $u=f(x,xy,xyz)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

18. 设 $z=f(xy)$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

19. 设 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

20. 试证：方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 经变换 $\xi=x+y$，$\eta=3x-y$ 后变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$。

21. 试证：方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 经变换 $\xi=x-\sin x+y$，$\eta=x+\sin x-y$ 后变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$。

22. 设 $z=xy+xF(\frac{y}{x})$，其中 F 是任意可微分的函数，试

证：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$。

23．设 $u=\sin x+F(\sin y-\sin x)$，其中 F 是任意的可微函数，试证：$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$。

24．设 $z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$，其中 f 是任意的可微函数，试证：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

25．若 $u=\varphi(x+\psi(y))$ 试证：$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

26．设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 为任意的可微函数，试证：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$。

27．证明零次齐次可微函数 $z=F\left(\frac{y}{x}\right)$满足关系式

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

28．设函数 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次可微函数，证明：对任意的 x，y，z，恒有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf.$$

29．设函数 $f(x,y)$ 是 n 次齐次可微函数，试证：$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 是 $(n-1)$ 次齐次函数。

30．若 $f(x,y)$ 满足：$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=nf(x,y)$，证明：$f(x,y)$是 n 次齐次函数。

$\left(\text{提示：作函数 } F(t)=\frac{f(tx,ty)}{t^n}\right)$

31. 若 $u=F(x,y)$，而 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

32. 设 $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，证明 u 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

33. 求方程 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ 满足条件 $z(x,x^2)=1$ 的解 $z=z(x,y)$。

34. 设 $u=f(x,y)$，当 $y=x^2$ 时有 $u=1$，$\frac{\partial u}{\partial x}=x$，求当 $y=x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$。

35. 设 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 以及条件 $u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$。

36. 解下列方程 $(u=u(x,y))$：

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$；　　(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$；

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。

37. 求下列复合函数的一阶全微分 du：

(1) $u=f(t)$，$t=x+y$；

(2) $u=f(t)$，$t=xyz$；

(3) $u=f(t)$，$t=x^2+y^2+z^2$；

(4) $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=ax$，$\eta=by$；

(5) $u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=xy$，$\eta=\frac{x}{y}$；

（6）$u=f(x,y,z)$，其中 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$；

（7）$u=f(\xi,\eta)$，其中 $\xi=x+y+z$，$\eta=x^2+y^2+z^2$；

（8）$u=f(\xi,\eta,\zeta)$，其中 $\xi=x^2+y^2$，$\eta=x^2-y^2$，$\zeta=2xy$。

第四节　隐函数的微分法

1．在下列方程中，求$\dfrac{dy}{dx}$：

（1）$xe^y+ye^x-e^{xy}=0$；

（2）$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$；

（3）$\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$；

（4）$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。

2．在下列方程中，求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$x^2+2xy-y^2=a^2$；（2）$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$；

（3）$xy-\ln y=a$；　　（4）$x^y=y^x$。

3．在下列方程中，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$：

（1）$e^z-xyz=0$；　　（2）$z^3y-xz^5-1=0$；

（3）$x^3+y^3+z^3-3axyz=0$；（4）$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$。

4．证明：当 $1+xy=k(x-y)$（其中 k 为常数）时有等式 $\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{dy}{1+y^2}$。

5．证明：若 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$，则当 $xy>0$ 时有等式 $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0$。

6．设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的隐函数，

试证：$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$。

7．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数，试证：不论 φ 为怎样的可微函数，都有 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$。

8．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 所确定的隐函数，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$。

9．设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，证明：

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1。$$

10．试求由方程 $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$ 所确定的函数 $=z(x,y)$ 的全微分 dz。

11．试求由方程 $xyz=x+y+z$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 dz。

12．试求由方程 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$ 所确定的函数 $u=u(x,y,z)$ 的全微分 du。

13．求出当 $x=2.001$，$y=0.998$ 时，由方程 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 所确定的 $z(x,y)$ 的近似值。

14．设 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

15．设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

16．设 $F(xz,yz)=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

17．求由方程组 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 的微商 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$.

18．求由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 的微商 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

19．设 $x + y + z = 0$，$x^2 + y^2 + z^2 = 1$，求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

20．设 $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1 \\ u + v + x + y = 0 \end{cases}$$

所确定的隐函数组，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

21．设 $xu - yv = 0$，$yu + xv = 1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

22．设 $u + v = x + y$，$\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$，求 du，dv.

23．设 $x = t + t^{-1}$，$y = t^2 + t^{-2}$，$z = t^3 + t^{-3}$，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

24．求由方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 所确定的反函数 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 的偏微商 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

25. 设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=y(x)$ 为由方程

$$x^2-xy+y^2=1$$

所定义的函数，求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$

26. 设 $y=f(x+t)$，而 t 是由方程 $y+g(x,t)=0$ 所确定的 x，y 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$。

27. 设方程组 $\begin{cases} pu+qv-t^2=0 \\ qu+pv-s^2=0 \end{cases}$ $(p^2-q^2\neq 0)$ 确定隐函数 $\begin{cases} u=u(s,t) \\ v=v(s,t) \end{cases}$ 及反函数 $\begin{cases} s=s(u,v) \\ t=t(u,v) \end{cases}$，求证：

$$\frac{\partial t}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{p^2}{p^2-q^2}.$$

28. 函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\qquad g(y,z,t)=0,\qquad h(z,t)=0$$

定义，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$。

29. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x，y 的函数，试证

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

30. 若 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数，证明：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

第五节　多变量函数的泰勒公式与极值

复习思考题

1．写出函数 $f(x,y)$ 在点 $(a,\ b)$ 的泰勒公式。

2．叙述多元函数在一点达到极值的定义。

3．什么是多元函数在一点达到极值的必要条件？

4．什么是条件极值？试叙述求条件极值的拉格朗日乘数法．

习　题

1．在点（1，－2）的邻域内，根据泰勒公式展开函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$。

2．当自变量由 $x=5$，$y=6$ 变至 $x=5+h$，$y=6+k$ 时，求函数 $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+4$ 的增量。

3．当自变量由 $x=1$，$y=-1$ 变到 $x=1+h$，$y=-1+k$ 时，求函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量。

4．按 x 及 y 的乘幂展开函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 至三次项为止。

5．按 $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的乘幂展开函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 至二次项为止，并写出余项 R_2。

6．按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 $f(x,y)=x^y$ 至二次项为止。

7．利用二元函数的泰勒公式，证明当 $|x|$，$|y|$ 充分小时，有下面近似等式成立：

$$（1）\ \frac{\cos x}{\cos y}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2);$$

（2）$\operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}\approx\dfrac{\pi}{4}+x-xy$。

8．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数，当 $x=1$，$y=1$ 时 $z=1$，试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 z 至二次项为止。

9．将函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在原点的邻域内按泰勒公式展开到第 n 项。

10．将 $\sin(x^2+y^2)$ 在 $(0,\ 0)$ 点按泰勒公式展开。

11．根据马克劳林公式展开函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 到四次项为止。

12．根据马克劳林公式展开函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 到 n 次项。

13．求下列函数的极值：

（1）$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$；

（2）$f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$；

（3）$f(x,y)=x^2-(y-1)^2$；

（4）$f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\quad(x>0,\ y>0)$；

（5）$f(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$；

（6）$f(x,y)=e^{2x}(x+2y+y^2)$；

（7）$f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$，

$$\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}\right)；$$

（8）$f(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$。

14．求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值。

15．求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值。

16. 求下列函数在指定条件下的极值：

（1）$z=xy$，若 $x+y=1$；

（2）$u=x^2+y^2$，若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$；

（3）$z=x+y$，若 $x^2+y^2=1$；

（4）$u=x+y+z$，若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，

$x>0$，$y>0$，$z>0$；

（5）$u=\sin x\sin y\sin z$，若 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$，

$x>0$，$y>0$，$z>0$；

（6）$u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，若 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{a^2}$；

（7）$u=xyz$，若 $\begin{cases} x+y+z=5, \\ xy+yz+zx=8; \end{cases}$

（8）$u=xyz$，若 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

17. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,1,1)$ 和 $B(2,3,4)$ 的距离平方和最小。

18. 在平面 Oxy 上求一点，使它到 $x=0$，$y=0$，$x+2y=16$ 三直线的距离平方和为最小。

19. 一帐蓬，下部为圆柱形，上部盖以圆锥形的蓬顶，设帐蓬的容积为一定数 V_0，试证当 $R=\sqrt{5}H$，$h=2H$ 时（其中R，H 各为圆柱形的底半径和高，h 为圆锥形的高）所用蓬布最省。

20. 在斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周界的三角形。

21. 已知平行六面体所有各棱边之和为 $12a$，求其最大体积。

22. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离。

23. 把正数 a 分成 n 个正数之和，使它们的乘积为最大。

24. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上求一点 $M(x, y)$，$(x, y\geqslant 0)$ 使椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积为最小，并求其面积。

25. 求平面上一点 (x_0, y_0)，使其到 n 个定点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，… (x_n, y_n) 的距离平方和最小。

26. 横断面为半圆柱形的张口浴盆，其表面积等于 S，当其尺寸怎样时，此盆有最大的容积？

第六节　空间曲线与曲面

复习思考题

1. 何谓光滑曲线与光滑曲面？

2. 设有空间曲面 $F(x,y,z)=0$，则方程 $F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y+F'_z\mathrm{d}z=0$ 与 $\frac{\mathrm{d}x}{F'_x}=\frac{\mathrm{d}y}{F'_y}=\frac{\mathrm{d}z}{F'_z}$ 各有什么几何意义？

3. 设有空间曲线 L：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ 则方程组

$$\begin{cases} F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y+F'_z\mathrm{d}z=0 \\ G'_x\mathrm{d}x+G'_y\mathrm{d}y+G'_z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$$

有什么几何意义？

习　题

1. 求平面曲线 $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线和法线方程。

2. 求平面曲线 $\cos xy=x+2y$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线和法线方程。

3．设 $\boldsymbol{r}=a\sin t\boldsymbol{i}-a\cos t\boldsymbol{j}+bt^2\boldsymbol{k}$，$a$，$b$ 是常数，求 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 和 $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$。

4．求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$，$y=\frac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在 $t=1$ 处的切线及法平面方程。

5．求圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点（1，1，1）处的切线及法平面方程。

6．求曲线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线及法平面方程。

7．证明曲线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 的切线与 Oz 轴成定角。

8．设 $\boldsymbol{r}^0(t)$ 是单位向量，试证明 $\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}\perp\boldsymbol{r}^0$，并说明它的几何意义。

9．在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 求一点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

10．求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点（2，1，0）的切平面和法线方程。

11．求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ 在点（3，4，－7）处的切平面和法线方程。

12．求曲面 $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面和法线方程。

13．求曲面 $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ 在点（2，3，6）处的切平面和法线方程。

14. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程。

15. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程。

16. 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 $x+y+2z=9$ 最远和最近的点。

17. 求曲线 $\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ 在点（1，3，4）处的切线及法平面方程。

18. 求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$ 在点（-2，1，6）处的切线及法平面方程。

19. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任何点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于 a。

20. 试证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 和 $x^2+y^2+z^2=by$ 互相正交。

21. 证明曲面 $x+2y-\ln z+4=0$ 和 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点（2，-3，1）处相切（即有公共的切平面）。

22. 平面上有半径为 1 的圆及一点 M_0，过 M_0 作该圆切线的垂线，垂足为 M，M 点的轨迹为一封闭曲线 c，求 c 所包围的面积 S。

第七章　多变量函数的积分学

第一节　二　重　积　分

复习思考题

1．叙述二重积分的定义，它有什么几何意义与物理意义？

2．写出二重积分的积分中值公式。

3．叙述二重积分的累次积分法。如何选择方便的积分次序？

4．叙述二重积分的变量代换法，写出极坐标和一般曲线坐标下的面积元素的表达式．

习　　题

1．把下列二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$化成累次积分，确定积分限：

（1）D：由$x=a$，$x=b$，$y=c$，$y=c+x$围成，其中$0<a<b$，$c>0$；

（2）D：$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$x^2+y^2\leqslant1$；

（3）D：$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant1$；

（4）D：$y=2x$，$2y=x$，$xy=2$围成（第一象限部分）．

2．改变下列积分顺序：

（1）$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$；

(2) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$；

(3) $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$；

(4) $\int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$；

(5) $\int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx$；

(6) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$。

3. 改变积分顺序后表成一个累次积分：

(1) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$；

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$；

(3) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy$；

(4) $\int_1^2 dx \int_2^{2x} f(x,y)\,dy + \int_2^4 dx \int_x^4 f(x,y)\,dy$。

4. 利用函数的奇偶性计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D x^3 y^3\,dx\,dy$， D：$x^2+y^2 \leqslant R^2$；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$， D：$-1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1$；

(3) $\iint\limits_D \sin x \sin y\,dx\,dy$，$D$：由 $x^2-y^2=1, x^2+y^2=9$ 围成含原点的部分；

(4) $\iint\limits_D x^2 y\,dx\,dy$， D：$x^2+y^2\leqslant 1$， $y\geqslant 0$。

5. 计算下列积分：

（1）$\iint\limits_D x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$1\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$；

（2）$\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

D：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$；

（3）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；

（4）$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；

（5）$\iint\limits_D \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $y=\pi$，$x=y$，$x=0$ 围成；

（6）$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $y^2=4x$ 和 $x=1$ 围成；

（7）$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $x^2+y^2=a^2$ 围成的在第一象限部分；

（8）$\iint\limits_D (x+y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a$ 围成；

（9）$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $y=x$ 和 $x=y^2$ 围成；

（10）$\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$，$0\leqslant y\leqslant 2$；

（11）$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $x=2$，$y=x$ 及 $xy=1$ 围成；

(12) $\iint\limits_D |xy|\,dxdy$，$D$：$x^2+y^2\leqslant a^2$；

(13) $\iint\limits_D (y-4)\,dxdy$，$D$：由 $y^2=2x$ 和 $y=x-4$ 围成；

(14) $\iint\limits_D \frac{x}{y+1}\,dxdy$，$D$：由 $y=x^2+1$，$y=2x$，$x=0$ 围成；

(15) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,dxdy$，$D$：由 $y=2$，$y=x$ $y=2x$ 围成；

(16) $\iint\limits_D xy\,dxdy$，D：由 $y=x+a$，$y=\frac{x}{2}$，$y=0$，$y=a(a>0)$ 围成。

6．画出下列各二重积分的积分区域，并计算其值：

(1) $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$；

(2) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} xy(x+y)\,dy$；

(3) $\int_0^{2R} dy\int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} (x^2+y^2)\,dx$；

(4) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx\int_0^{Rx}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dy$
$+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dy$；

(5) $\int_0^a dx\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$。

7．利用变量代换法计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$，$D$：$x^2+y^2\leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant a^2\ (0<a\leqslant R)$;

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D: $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$;

(4) $\iint\limits_D \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$;

(5) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant x+y$;

(6) $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$;

(7) $\iint\limits_D y\,dxdy$, D: $\frac{x^2}{4}+\frac{(x-3)^2}{9}\leqslant 1$;

(8) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4, y=0$, $y=x$所围成的第一象限部分;

(9) $\iint\limits_{1\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 4} (x^2+y^2)\,dxdy$;

(10) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdy$.

8. 利用一般曲线坐标代换计算下列积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D: 由 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$ 围成的第一象限部分;

（2）$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $y^2=ax, y^2=bx, x^2=my, x^2=ny$ 围成的区域（$a>b>0, m>n>0$）；

（3）$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：由 $y^2=16-8x$，$y^2=1-2x$，$y^2=81+18x$，$y^2=1+2x$ 所围成的在 $y>0$ 那部分；

（4）$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$xy=a, xy=b, y^2=cx, y^2=\mathrm{d}x$ 围成的在第一象限积分（$0<a<b$，$0<c<d$）；

（5）$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$xy=1, xy=2, x-y+1=0$，$x-y-1=0 (x>0, y>0)$ 所围成的区域；

（6）$\iint\limits_D 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^4+y^4\leqslant 1$，$x\geqslant 0$ $y\geqslant 0$ 围成的区域。

9. 设 $F(t)=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant t^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$t>0$），其中 $f(x,y)$ 是连续函数，求 $F'(t)$。

10. 求：$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)$ 是连续函数。

11. 求下列曲线所围成的平面区域的面积：

（1）$x^2+2y^2=3$ 和 $xy=1$（不含原点部分）；

（2）$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$；

(3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$；

(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 和 $x=0$，$y=0$；

(5) $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$；

(6) $(x^2+y^2)^2=2ax^3$；

(7) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{xy}{c^2}$；

(8) 由直线 $x+y=a$，$x+y=b$，$y=kx$ 和 $y=mx$ $(0<a<b$，$0<k<m)$ 围成的平面区域。

12. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

13. 证明：$\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u$。

14. 证明：$\displaystyle\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ln 2\int_{1}^{2} f(u)\mathrm{d}u$，其中 D 为 $xy=1$，$xy=2$，$y=x$，$y=4x$ $(x>0$，$y>0)$ 围成的区域。

15. 证明：$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\right]^2$。

第二节　三　重　积　分

复习思考题

1. 叙述三重积分的定义，它有什么几何意义与物理意义？

2. 写出三重积分的积分中值公式。

3. 叙述三重积分的累次积分法，如何选择方便的积分次序？

4. 叙述三重积分的变量代换法，写出柱坐标、球坐标和一般曲线坐标下的体积元素的表达式。

习　　题

1. 计算下列三重积分：

（1）$\displaystyle\iiint\limits_V xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

V：$1\leqslant x\leqslant 2$，$-2\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant \dfrac{1}{2}$；

（2）$\displaystyle\iiint\limits_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

V：由 $z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$ 围成；

（3）$\displaystyle\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

V：由 $z=xy, z=0, x=0, x=1, y=2, y=3$ 围成；

（4）$\displaystyle\iiint\limits_V y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

V：由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$，$x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成；

（5）$\displaystyle\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，

V：由 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 围成；

（6）$\displaystyle\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；

（7）$\displaystyle\iiint\limits_V (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

V：由 $z=1-x^2-y^2$ 和 $z=0$ 围成；

（8）$\iiint\limits_V (a-y)\,dxdydz$，

V：由$y=0, z=0, 2x+y=a, x+y=a, y+z=a$ 围成。

2．用变量代换法计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$，

V： 由$x^2+y^2=2z$，$z=2$ 围成；

（2）$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，

V：由 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 围成；

（3）$\iiint\limits_V x\,dxdydz$，

V：由 $x^2+y^2=z^2$，$x^2+y^2=1$ 围成；

（4）$\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$，

V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 的第一卦限部分；

（5）$\iiint\limits_V z\,dxdydz$，

V：由 $x^2+y^2+z^2=4$，$x^2+y^2=3z$ 围成；

（6）$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$；

（7）$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$，

V：$r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$z\geqslant 0$；

（8）$\iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$，

V: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$;

(9) $\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdydz$,

V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ 的第一卦限部分；

(10) $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$,

V: 由曲面 $z=y^2$, $z=4y^2$ $(y>0)$ 及平面 $z=x$, $z=2x$, $z=1$ 所界的区域。

3. 把下列各积分变换成柱面坐标或球面坐标的形式，并计算其值：

(1) $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$;

(2) $\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz$;

(3) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$;

(4) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2\,dz$.

4. 求下列曲面所围成的立体体积：

(1) 平面 $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z=6$;

(2) 圆柱面 $z^2+x^2=1$ 和平面 $x+y+z=3$, $y=0$;

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和锥面 $x^2+y^2=z^2$ (含 z 轴部分);

(4) $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, 和 $x^2+y^2=z^2$ $(b>a)$;

(5) $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$;

（6）椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$（含 z 轴部分）；

（7）椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$（含 z 轴正向部分）；

（8）圆抛物面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$；

（9）球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$与圆柱 $x^2+y^2=Rx$（在圆柱内部）；

（10）柱面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和双曲抛物面 $z=xy$（在第一卦限部分）；

（11）平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=2$，$z=\frac{y}{4}$和抛物面 $x^2+y^2=6-z$；

（12）$x^2+y^2=2x$，$z=x^2+y^2$，$z=0$；

（13）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$y=\frac{b}{a}x$，$y=0$，$z=0$，（$x\geqslant 0$，$a>0$，$b>0$，$c>0$）；

（14）柱面 $2y^2=x$，平面$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ 和 $z=0$。

5. 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在域

$$x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$$

内的平均值。

6. 求函数 $f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$在域

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

内的平均值。

7．设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 f 为可微分函数，求 $F'(t)$。

8．证明：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\,\mathrm{d}V=\pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)\,\mathrm{d}z$。

9．用柱坐标或球坐标代换，计算下列曲面围成的立体积：

（1）$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$；

（2）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$；

（3*）$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$；

（4）$(x^2+y^2+z^2)^2=3xyz$；

（5）$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$；

（6）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和平面 $z+c=0$。

10．求由平面 $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$，$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$，$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$ 围成的平行六面体的体积。

$\left(\text{设}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0\right)$

（**提示**：作变换 $u=a_1x+b_1y+c_1z$，$v=a_2x+b_2y+c_2z$，$W=a_3x+b_3y+c_3z$。）

第三节　重积分的应用

复习思考题

1. 如何计算曲面的面积？写出几种不同情况下曲面面积元素的表达式。

2. 利用二重积分和三重积分，分别写出平面 Oxy 内薄板 D 的重心坐标公式和空间物体的重心坐标公式。

3. 利用二重积分和三重积分，分别写出平面 Oxy 内薄板 D 对于坐标轴及原点的转动惯量和空间物体对于坐标轴及原点的转动惯量。

习　题

1. 求下列曲面在指定部分的面积：

（1）锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分；

（2）柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0$，$x-z=0$，$(x>0,\ y>0)$ 所截的那部分；

（3）双曲抛物面 $z=xy$ $(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$ 被柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截下的那部分；

（4）球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被圆柱 $x^2+y^2=\rho^2$ $(\rho<R)$ 所割下的那部分；

（5）圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被圆柱 $y^2+z^2=a^2$ 所割下的那部分；

（6）椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ 被椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=c^2$ 所截下的那部分；

（7）球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az$（$z\geqslant0$）所围成的物体的全表面；

（8）曲面 $x=\frac{1}{2}(2y^2+z^2)$ 被柱面 $4y^2+z^2=1$ 所截下的那部分；

（9）锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被 Oxy 平面和 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 所截下的那部分；

（10）曲面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内那部分面积。

2. 求螺旋面 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=h\varphi$ 在 $0<r<a$，$0<\varphi<2\pi$ 那部分的面积。

3. 求圆环面 $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$，$y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$，$z=a\sin\psi$（$0<a\leqslant b$）被两条纬线 $\varphi=\varphi_1$，$\varphi=\varphi_2$ 和两条经线 $\psi=\psi_1$，$\psi=\psi_2$ 所界的那部分面积（$\varphi_1<\varphi_2$，$\psi_1<\psi_2$）；又整个环面的表面面积等于多少？

4. 计算曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$ 的面积。

5. 一段圆柱：$x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$，$0\leqslant z\leqslant h$，被圆锥 $x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}z^2$ 所截，求圆锥外面那部分柱体的体积 V 和总表面积 S。

6. 求椭圆薄片 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1$ 的质量，设密度为 $\rho=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

7. 一个平面圆环是由半径为 R 和 r（$R>r$）的两个同心圆所围成的，已知材料各点的密度和到圆心的距离成反比，并在内圆

的圆周上密度为1，求环的质量。

8. 半径为a的圆盘，其各点的密度和到圆心的距离成正比（比例系数设为1），今内切于圆盘截去半径为$\frac{a}{2}$之小圆，求余下的圆盘的重心坐标。

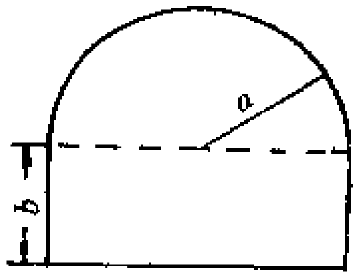


图 7.1

9. 有一个匀质薄板，它是由半径为a的半圆和一个长方形拼接而成，为了使重心正好在圆心上，问长方形的宽b应为多少？（图7.1）

10. 一个物体是由两个半径各为R和r（$R>r$）的同心球所围成，已知材料的密度和到球心的距离成反比，且在距离等于1处的密度等于k，求物体的总质量。

11. 求由曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$和$z=c$所围成的均匀物体的重心坐标。

12. 设球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$内各点密度与各点到原点的距离成反比，求其重心坐标。

13. 在半径为a的圆柱上连接一个半径为a的半球，为了使重心正好在球心上，问圆柱之高如何？

14. 设半径为R的球体内各点密度与各点到球心的距离成正比，已知球的质量为M，求它对直径的转动惯量。

15. 求以下各物体的转动惯量（设$\rho=$常数）：

（1）质量为m，长为l的细棒，对于(a)通过棒的中心并垂直于棒的轴；(b)通过棒的一端并以棒垂直的轴。

（2）质量为m，半径为R的薄圆盘，对于(a)通过圆心并垂直圆盘的轴；(b)直径。

（3）质量为m，半径为R的球体，对于(a)通过球心的轴线；(b)球面的切线。

16．证明物体对任意一轴 k 的转动惯量等于：$I_k=I_c+Md^2$．其中 I_c 是物体对于通过重心 G 并平行于 k 轴的直线的转动惯量，M 是物体的质量，d 是重心 G 到 k 轴的距离。

17．设均质圆盘的半径为 R，密度为 μ，在通过中心并垂直盘面的直线上有一条长为 l 的均匀细棒，其密度为 ρ，棒的近盘一端与圆心距离为 a，试求圆盘对于细棒的引力。

18．求密度为 ρ 的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力，设球的半径为 R，而轴截面的扇形的角等于 2α。

第四节　第一型曲线积分与曲面积分

复习思考题

1．写出空间曲线的弧长公式与弧长微分公式。

2．何谓第一型曲线积分，写出它的计算公式。

3．何谓第一型曲面积分，写出它的计算公式。

4．总结一下到目前为止所遇到的各种积分的概念，它们之间有什么共性？在计算上有些什么联系？

习　题

1．计算下列曲线的弧长：

（1）$\boldsymbol{r}(t)=e^t\cos t\,\boldsymbol{i}+e^t\sin t\,\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（2）$x=3t$，$y=3t^2$，$z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 那一段弧；

（3）$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=a\ln\cos t\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$；

（4）$z^2=2ax$，$9y^2=16xz$ 由点 $O(0,0,0)$ 到点 $A\left(2a,\dfrac{8}{3}a,2a\right)$；

（5）$4ax=(y+z)^2$，$4x^2+3y^2=3z^2$ 由原点到点 $M(x,y,z)$。

2. 计算下列曲线积分：

（1）$\int_L y^2 \mathrm{d}L$，L：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（2）$\int_L (x+y)\mathrm{d}L$，L：顶点为 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 的三角形周界；

（3）$\int_L \frac{\mathrm{d}L}{x-y}$，$L$：联结点 $A(0,-2)$ 到点 $B(4,0)$ 的直线段；

（4）$\int_L \sqrt{2y}\mathrm{d}L$，$L$：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（5）$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}L$，$L$：由曲线 $r=a$，$\varphi=0$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$ 所围成的区域边界；

（6）$\int_L x\mathrm{d}L$，L：对数螺线 $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的那一段；

（7）$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}L$，$L$：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=at$，$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（8）$\int_L (x+y+z)\mathrm{d}L$，$L$：直线段 AB：$A(1,1,0)$ $B(1,0,0)$ 及螺线 BC：$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 组成；

（9）$\int_L z\mathrm{d}L$，L：圆锥螺线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，

$z=t\,(0\leqslant t\leqslant t_0)$;

(10) $\int_L x\sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}L$, L: 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，$(x\geqslant0)$ 的一半;

(11) $\int_L (x^2+y^2+z^2)^n\mathrm{d}L$, L: 圆周 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

(12) $\int_L x^2\mathrm{d}L$, L: 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$。

3. 求曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ 从 $t=0$ 到任意点间那段弧的质量，设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比，且在点 (1, 0, 1) 处的密度为1。

4. 求螺旋线一圈 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 对于各坐标轴的转动惯量（设密度 $\rho=1$）。

5. 求半径为 a 的均匀半圆弧（密度为 ρ）对于处在圆心 O 质量为 M 的质点的引力。

6. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, S: $x^2+y^2+z^2=R^2$;

(2) $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, S: $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant0)$;

(3) $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, S: 立方体 $0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant1$, $0\leqslant z\leqslant1$ 的全表面;

(4) $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S$, S: $x+y+z=1$ 在第一卦限部分;

(5) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, S: 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 所

围成的立体表面；

（6）$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$，$S$：四面体 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，$x+y+z\leqslant 1$ 的全表面；

（7）$\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$，$S$：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ （$a>0$）所割下的那块曲面；

（8）$\iint\limits_S \left(2+z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$，　S：是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

（9）$\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$，$S$：圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的部分，r 是 S 上的点到原点的距离；

（10）$\iint\limits_S (x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)dS$，$S$：圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分．

7．求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$（$0\leqslant z\leqslant 1$）的质量，其各点密度为 $\rho=z$．

8．求半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（$z\geqslant 0$）的重心位置，设球面上各点的密度等于该点到铅垂直径的距离．

9．一个均匀的球壳，密度为 ρ，半径为 R，试求它对于距球心为 a、质量为 m 的质点的引力．并讨论质点在球内和球外两种情况．

10．一个密度为 ρ 的均匀截锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0<a\leqslant z\leqslant b$），求它对于处在锥顶的质量为 m 的质点的引力．

11．一个半径为 R 的均匀球壳（密度为 ρ）绕其直径旋转，求它的转动惯量．

第八章 场 论

第一节 数量场的方向微商与梯度

复习思考题

1．叙述方向微商与梯度的概念．它们有什么密切的关系？

2．写出方向微商与梯度在直角坐标下的计算公式．

3．梯度对于数量场的等值面有什么几何意义？

4．梯度有哪些基本的运算法则？

习 题

1．求场 $u=xyz$ 在点 $(1,2,-1)$ 沿方向 $\boldsymbol{L}=(3,-1,1)$ 的方向微商。

2．设有平面温度场 $T=x^2+y^2$，求它在点 $(1,5)$ 沿着与 x 轴相交成 $\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{7\pi}{6}$ 角两个方向上的温度变化率。

3．试求函数 $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ 在圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上一点

$$P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

处沿该圆周逆时针方向上的方向微商。

4．求场 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,-1)$ 的最大方向微商值及沿方向 $\boldsymbol{L}=(1,1,0)$ 的方向微商。

5．求场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $(1,1-1)$ 的梯度和最大的方向微商。

6．求平面场 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 (1,1) 处的梯度及沿方向 $\boldsymbol{L}=(\cos\alpha,\ \cos\beta)$ 的方向微商，并分别求出在怎样的方向上其方向微商达到最大值，最小值和0。

7．设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{K}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，试求：

（1）$\mathrm{grad}\dfrac{1}{r^2}$；　　$\mathrm{grad}\ln r$。

8．设电位场 $\varphi=\ln\dfrac{1}{r}$（r 同上题），求它在点(1，2，4)的梯度及沿方向 $\boldsymbol{L}=(1,1,1)$ 的电位变化率。

9．设 $u=\dfrac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，试求具有 $|\mathrm{grad}u|=1$ 的那些点。

10．设场 u 的梯度恒等于零向量：$\mathrm{grad}u\equiv 0$，求证 u 必定是一个常数。

11．证明 $\mathrm{grad}u$ 为常向量的充分必要条件是 u 为线性函数，即 $u=ax+by+cz+d$，（a,b,c,d 为常数）。

12．求场 $u(x,y,z)$ 沿着场 $v(x,y,z)$ 梯度方向的方向微商，问什么情况下这个方向微商等于零？

13．设 ω 是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，证明下列各式：

（1）$\mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}$；

（2）$\mathrm{grad}(|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|^2/2)=\omega^2\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}$。

第二节　向量场的通量与散度

复习思考题

1．叙述流量与通量的概念。

2．叙述第二型曲面积分的概念，它与第一型曲面积分有何区别与联系？

3．写出通量及第二型曲面积分的计算公式。

4．叙述向量场的散度概念，它与向量场的通量有何密切关系？

5．写出散度在直角坐标下的计算表达式。

6．何谓高斯公式，写出它的坐标形式与向量形式。高斯公式描述向量场的什么性质？用高斯公式时应注意什么条件？

7．散度运算有些什么基本法则？

习　题

1．计算曲面积分

（1）$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（2）$\iint\limits_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x$；

（3）$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（4）$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分，远离原点的一侧。

2．计算曲面积分

（1）$\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（2）$\iint\limits_S (x+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（3）$\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　（4）$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

3．计算曲面积分 $\iint\limits_S xy^2z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的 $x\leqslant 0$ 的一半，远离球心的一侧。

4．计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是柱面 $x^2+z^2=R^2$ 在 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 两卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下部分的外侧。

5. 计算曲面积分

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧。

6. 计算曲面积分

$$\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $f(x)$，$g(y)$，$h(z)$ 为连续函数，S 为直角平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant c$ 的外侧。

7. 求场 $\boldsymbol{v}=(x^3-yz)\boldsymbol{i}-2x^2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过长方体 $(0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant c)$ 的外侧表面 S 的通量。

8. 求场 $\boldsymbol{v}=xz^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}+y^2z\boldsymbol{k}$ 通过上半球面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

的上侧的通量。

9. 求下列向量场在指定点的散度：

（1）$\boldsymbol{v}=x^2yz\boldsymbol{i}+y^2xz\boldsymbol{j}+z^2xy\boldsymbol{k}$ 在 $M(1,1,1)$ 处；

（2）$\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$ 在 $M(0,1,2)$ 处；

（3）$\boldsymbol{E}=(3x^2-2yz,\ y^3+yz^2,\ xyz-3xz^2)$ 在 $M(1,-2,2)$ 处；

（4）$\boldsymbol{v}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin(xz)\boldsymbol{j}+xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$ 在 $M(x,y,z)$ 处。

10. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

（1）$\mathrm{div}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}]$；　（2）$\mathrm{div}[(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]$；

（3）$\mathrm{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$；　（4）$\mathrm{div}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$；

（5）$\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{\omega})$　（6）$\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$。

11. 求下列数量场的梯度场的散度：

（1）$\varphi=x^3y^4z^2$； （2）$u=xyze^{x+y+z}$。

12. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

（1）$\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧；

（2）$\oiint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S：由 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体的外侧表面；

（3）$\oiint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧；

（4）$\iint\limits_S (x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

S：旋转抛物面 $z=x^2+y^2$（$0\leqslant z\leqslant 1$）的下侧；

（5）$\oiint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S：球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧；

（6）$\oiint\limits_S (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xy+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S：以 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ 为顶点的四面体的外表面；

（7）$\oiint\limits_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

S：是球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的外侧；

（8）$\iint\limits_{S}(y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$+(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

S：上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（$z\geqslant 0$）的上侧。

13．求引力场 $\boldsymbol{F}=-km\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过下列闭曲面外侧的通量：

（1）空间中任一包围质量 m（在原点）的闭曲面；

（2）空间中任一不包围质量 m 的闭曲面；

（3）质量 m 在光滑闭曲面上。

14．计算 $\oiint\limits_{S}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$，$S$：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

15．设场 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\varphi(r)}{r^3}\boldsymbol{r}$，其中 $\varphi(r)$ 有一阶连续微商，求：

（1）$\boldsymbol{v}$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的通量；（2）若 $\varphi(1)=1$，确定 $\varphi(r)$，使 $\boldsymbol{v}$ 是除了原点以外的无源场。（$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$）

16．求场 $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{z}\right)$ 通过椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 外侧的通量。

17．求向径 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 通过圆锥面

$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$（$0\leqslant z\leqslant 1$）上侧的通量。

18．求场 $\boldsymbol{A}=\left(\cos x,\cos y,(x^2+y^2)z+\dfrac{z^3}{3}\right)$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧的通量。

19．求场 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+(e^z-2yz)\boldsymbol{k}$ 通过椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 外侧的通量。

20．证明任意光滑闭曲面 S 围成的立体体积可以表成

$$V=\frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中积分沿 S 的外侧进行。

21. 设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量，S 是任意的光滑闭曲面，证明：

$$\oiint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}s=0,$$

其中 $(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}})$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 与曲面法向 $\boldsymbol{n}$ 的夹角。

22. 证明：

$$\frac{1}{2}\oiint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\mathrm{d}s=\iiint_V\frac{\mathrm{d}v}{r},$$

其中 S 是包围区域 V 的光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 是它的外侧法向，$\boldsymbol{r}$ 是从点 (x_0,y_0,z_0) 指向点 (x,y,z) 的向径，$r=|\boldsymbol{r}|$。

第三节　向量场的环量与旋度

复习思考题

1. 何谓第二型曲线积分，它有什么力学意义？它与第一型曲线积分有何区别和联系？

2. 写出第二型曲线积分的计算公式。

3. 何谓环量？何谓涡量？它们描述向量场的什么性质？

4. 叙述旋度的概念，它与环量和涡量具有什么密切关系？

5. 写出格林公式与斯托克斯公式，用这两公式时应注意什么条件？

6. 写出直角坐标下旋度的计算表达式。

7. 旋度有些什么基本运算法则？

习　题

1. 求曲线积分 $I=\int_L(x^2+2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，$L$ 是一

段抛物线：$y=x^2$（$-1\leqslant x\leqslant 1$）沿 x 增加方向。

2．设一质点处于弹性力场中，弹力方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比，比例系数为 k，若质点沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 从点 $(a,0)$ 移到点 $(0,b)$，求弹性力所作的功。

3．计算曲线积分 $I=\oint_L x\mathrm{d}y$，L 是由直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 和坐标轴所构成的三角形廻路，沿反时针方向。

4．计算曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，$L$ 是曲线 $y=1-|1-x|$ 从点（0，0）到点（2，0）。

5．求曲线积分 $\int_L\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 L 是沿正方形 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 逆时针一周的路径。

6．求向量场 $\boldsymbol{v}=(y^2-z^2)\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$ 沿曲线 L：$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$（$0\leqslant t\leqslant 1$）参数增加方向的曲线积分。

7．求向量场 $\boldsymbol{v}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 L：$x=a\sin^2t$，$y=2a\sin t\cos t$，$z=a\cos^2t$（$0\leqslant t\leqslant\pi$）参数增加方向的曲线积分。

8．计算曲线积分 $\int_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$，其中 L 是从 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,0,0)$ 再到 $B(1,1,0)$ 最后到 $C(1,1,1)$ 的折线段。

9．计算曲线积分 $\int_{L_{AB}}e^{x+y+z}\mathrm{d}x+e^{x+y+z}\mathrm{d}y+e^{x+y+z}\mathrm{d}z$，其中 L_{AB}：$x=\cos\varphi$，$y=\sin\varphi$，$z=\frac{\varphi}{\pi}$ 从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$。

10．求曲线积分 $\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$ 之值，其中 C：（1）是

$x+y=2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 的交线，从原点看去是顺时针方向；（2）是 $z=xy$ 与 $x^2+y^2=1$ 的交线，在 z 轴上方来看是逆时针方向。

11. 利用 Green 公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L (x+y)^2 dx+(x^2-y^2)dy$，$L$ 是顶点为 $A(1,1)$ $B(3,3)$，$C(3,5)$ 的三角形的周界，沿反时针方向；

（2）$\oint_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$，$L$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 沿顺时针方向；

（3）$\oint_L xy^2 dy-x^2 y dx$，L 是 $x^2+y^2=R^2$ 沿反时针方向；

（4）$\oint_L (yx^3+e^y)dx+(xy^3+xe^y-2y)dy$，$L$ 是对称于两坐标轴的闭曲线；

（5）$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$，$L$ 是 $y^2=x-1$ 与 $x=2$ 围成的封闭曲线沿逆时针方向；

（6）$\int_{AMB} (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy$，$L$ 是从点 $A(0,-1)$ 沿直线 $y=x-1$ 到点 $M(1,0)$，再从 M 沿圆周 $x^2+y^2=1$ 到点 $B(0,1)$。

（7）$\int_{AMO} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 AMO 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$；

（8）$\int_{\widehat{AB}} [f(y)e^x-my]dx+[f'(y)e^x-m]dy$，其中

$f(y)$有连续一阶微商，L_{AB}是连接点$A(0,y_1)$，$B(0,y_2)$的任何路径，且L_{AB}与直线段AB所围成区域的面积为定值S。

12. 利用 Stokes 公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$L$是顶点为$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$的三角形边界，从原点看去，$L$沿顺时针方向；

(2) $\oint_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，$L$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+y+z=a$的交线，从原点看去，$L$沿反时针方向；

(3) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$L$是圆柱面$x^2+y^2=a^2$和平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$的交线，从x轴的正方向看来，L沿反时针方向；

(4) $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$L$是平面$x+y+z=\frac{3}{2}a$与立方体$0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$表面的交线，从$z$轴正向看来，$L$沿反时针方向；

(5) $\oint_L y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$，$L$是圆柱面$x^2+y^2=2y$与平面$y=z$的交线；

(6) $\oint_L (y^2-y)\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}y+(x^2-x)\mathrm{d}z$，$L$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+y+z=0$的交线，$L$的方向与$z$轴正向成右手系。

13. 在积分$\oint_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$中，路径$L$是$Oxy$平面上正向的圆$x^2+y^2=R^2$，$z=0$；利用 Stokes 公式化曲线积分为以$L$为边界所围区域$S$上的曲面积分，（1）$S$取$Oxy$平面上的圆面$x^2+y^2\leqslant R^2$；（2）$S$取半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；结果相同吗？

14求下列向量场的旋度：

（1）$\boldsymbol{v}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$；

（2）$\boldsymbol{v}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$；

（3）$\boldsymbol{A}=(\sin y+z)\boldsymbol{i}+(x\cos y+z)\boldsymbol{j}$；

（4）$\boldsymbol{E}=(xe^y+v)\boldsymbol{i}+(z+e^y)\boldsymbol{j}+(y+2ze^y)\boldsymbol{k}$

15. 求向量场$\boldsymbol{v}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$在点$(1,1,1)$处的最大涡量及绕方向$(1,1,0)$的涡量。

16. 求向量场$\boldsymbol{v}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$(0,1,1)$的最大涡量值及绕方向$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$的涡量值。

17. 求向量场$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$在点$(1,1,1)$处的涡量的最大值和最小值。

18. 设$\boldsymbol{\omega}$是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

（1）$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$；　　（2）$\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$；

（3）$\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{\omega}]$；　　（4）$\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times f(r)\boldsymbol{\omega}]$；

其中$f(r)$是r的任意可微函数。

19. 证明常向量场$\boldsymbol{c}$沿任意光滑闭曲线的环量都等于0。

20. 求向量场$\boldsymbol{v}=(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}$沿曲线$L$的环量。$L$是圆柱面$x^2+y^2=a^2$与平面$y+z=0$的交线，从$z$轴正向看来，$L$沿反时针方向。

21. 求向量场$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$沿曲线$L$：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\x+y+z=0\end{cases}$

的环量，从z轴正向看来，L沿反时针方向。其中$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$均为常向量，并且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,1,1)$。

22．不变电流 I 通过无穷长的直导线（作 Oz 轴）所产生的磁场为 $\boldsymbol{B}=\dfrac{2I}{x^2+y^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\quad(x^2+y^2\neq0)$，试讨论 $\boldsymbol{B}$ 沿 Oxy 平面上任意光滑闭曲线的环量 Γ。

23．利用曲线积分计算下列区域的面积：

（1）星形线 $x=a\cos^3t,\quad y=a\sin^3t\quad(0\leqslant t\leqslant2\pi)$ 围成的区域；

（2）旋轮线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant2\pi)$ 与 Ox 轴所围成的区域。

24．求向量场 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ 沿曲线 L 的环量。（1）L 为 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant0)$ 与 $x^2+y^2=Rx$ 的交线，从 Ox 轴正向看来，L 沿反时针方向；（2）L 为

$$x^2+y^2+z^2=2Rx\ (z\geqslant0)\ 与\ x^2+y^2=2rx\ (r<R)$$

的交线，从 Oz 轴正向看来，L 沿反时针方向。

第四节　保守场与无源场

复习思考题

1．何谓无旋场，保守场，有势场？它们之间有什么关系？

2．曲线积分与路径无关的条件是什么？

3．全微分与线积分有何密切关系？

4．在讨论无旋场的问题中，线单连通区域的条件具有什么作用？

5．何谓无源场，管型场？无源场与向量势有何关系？

6．在讨论无源场的问题中，面单连通区域的条件具有什么作用？

习　题

1．求下列平面力场 $\boldsymbol{F}$ 沿四条不同路径（图8.1）所作的功，

并说明它们的值为什么会相等或不相等。

（1）$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$；

（2）$\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}$。

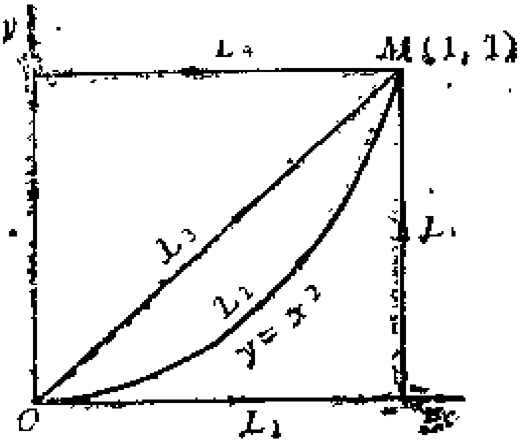


图 8.1

2．证明下列向量场是有势场，并求出它们的势函数：

（1）$\boldsymbol{v}=(2x\cos y-y^2\sin x)\boldsymbol{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\boldsymbol{j}$；

（2）$\boldsymbol{v}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(2y+z+x)\boldsymbol{j}+xy(2z+x+y)\boldsymbol{k}$；

（3）$\boldsymbol{v}=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\ (\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ r=|\boldsymbol{r}|)$；

（4）$\boldsymbol{v}=r^2\boldsymbol{r}\ \ (\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ \ r=|\boldsymbol{r}|)$；

（5）$\boldsymbol{A}=2xyz^2\boldsymbol{i}+(x^2z^2+z\cos yz)\boldsymbol{j}+(2x^2yz+y\cos yz)\boldsymbol{k}$。

3．求下列曲线积分：

（1）$\int_L(2x+y)\mathrm{d}x+(x+4y+2z)\mathrm{d}y+(2y-6z)\mathrm{d}z$，其中$L$由点$P_1(a,0,0)$沿曲线$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\z=0\end{cases}$到$P_2(0,a,0)$再由$P_2$沿直线$\begin{cases}y+z=a\\x=0\end{cases}$到点$P_3(0,0,a)$。

（2）$\int_{A\widehat{m}B}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中$A\widehat{m}B$是柱面螺线 $x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$，

$z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ 从点 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 这一段。

4. 当 α 取何值时，向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5\alpha y+3yz)\boldsymbol{i}+(5x+3\alpha xz-2)\boldsymbol{j}+[(\alpha+2)xy-4z]\boldsymbol{k}$ 是有势场，并求出这时的势函数。

5. 设可微向量场 $\boldsymbol{v}=f(y,z)\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，问 f 是 y，z 的什么样的函数时，$\boldsymbol{v}$ 为保守场，又当 $f(0,0)=0$ 时，试求出保守场的全体势函数。

6. 证明有心力场 $\boldsymbol{F}=f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 是有势场，并求它的势函数。

其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$f(r)$是 r 的任意可微函数。

7. 求位于点 M_i，质量为 m_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 个质点所产生的引力场的势函数。

8. 验证下列积分中的被积表达式是个全微分，并求积分的值：

(1) $\int_{(-2,1)}^{(2,8)} x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\int_{(0,0,2)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y-z^3\mathrm{d}z$；

(4) $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$
$-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$。

9. 求下列全微分的原函数 u：

(1) $\mathrm{d}u=(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y-4y^3)\mathrm{d}y$；

(2) $\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$。

10. 设 $f(u)$ 是个连续函数，但不一定可微，L 是分段光滑的任意闭曲线，证明：

（1）$\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$；

（2）$\oint_L f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=0$。

11. 验证积分

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)}\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$$

与路径无关，并求其值。

12. 证明下列向量场是无源场：

（1）$\boldsymbol{v}=xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$；

（2）$\boldsymbol{v}=(2x+y)\boldsymbol{i}+(x+4y+2z)\boldsymbol{j}+(2y-6z)\boldsymbol{k}$；

（3）$\boldsymbol{v}=r^3(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{c}$ 为常向量；

（4）$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为常向量。

13. 设有心力场为 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$，$f(r)$具有连续微商，问在什么情况下 $\boldsymbol{F}$ 是无源场？

14. 证明向量场 $\boldsymbol{v}=(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}$ 是无源场，并求出它的一个向量势。

15. 已知 $\boldsymbol{F}=(axz+x^2,\ by+xy^2,\ z-z^2+cxz-2xyz)$，试确定常数 a,b,c，使得 $\boldsymbol{F}$ 是一无源场；并求出这时它的一个向量势。

16. 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个无旋场，证明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是无源场。

17. 证明常向量 $\boldsymbol{c}$ 必有数量势 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}$ 与向量势 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$。

第五节　哈密顿算符及运算公式

1．设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$f(r)$是 r 的可微函数，试通过∇运算求：

（1）$\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot f(r)\boldsymbol{r})$；

（2）$\nabla\cdot(\boldsymbol{\omega}\times f(r)\boldsymbol{r})$；

（3）$\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times f(r)\boldsymbol{r})$。

2．设函数 $u(x,y,z)$ 在光滑曲面 S 所围成的闭区域 V 上具有直至二阶的连续偏微商，而且满足拉普拉斯方程：

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

试证明：

（1）$\displaystyle\oiint_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$；

（2）$\displaystyle\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iiint_V(\nabla u)^2\mathrm{d}V$；其中$\dfrac{\partial u}{\partial n}$是 u 沿 S 外侧法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向微商；

（3）利用（2）式证明 u 在 V 中的值由它在曲面 S 上的值唯一确定。

3．已知真空中自由电磁场的麦克斯韦尔方程组为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\ \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\ \dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{B}$ 磁感应强度，C是光速，t 是时间，试导出电磁波的运动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2 \triangle \boldsymbol{E}, \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = c^2 \triangle \boldsymbol{B}. \end{cases}$$

4．证明$\oiint_S u\boldsymbol{n}\mathrm{d}s = \iiint_V \nabla u \mathrm{d}V$，其中$u$在包含$V$的区域上有连续一阶偏微商，$S$是$V$的外侧光滑表面。

5．设S是以光滑曲线L为边界的光滑曲面，场φ在包含S的区域上有连续一阶偏微商，ψ有连续的二阶偏微商，证明：

$$\oint_L \varphi \mathrm{d}\psi = \iint_S (\nabla\varphi \times \nabla\psi) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

其中$\boldsymbol{n}$是曲面S的单位法向量，并且L的行进方向与$\boldsymbol{n}$构成右手系。

第六节　外微分形式

1．计算下列外乘积：

（1）$(x\mathrm{d}x + 7z^2\mathrm{d}y) \wedge (y\mathrm{d}x - \sin 3x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$；

（2）$(5\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y) \wedge (3\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y)$；

（3）$(6\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 27\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$。

2．计算下列外微分：

（1）$\mathrm{d}(\cos y\mathrm{d}x - \sin x\mathrm{d}y)$；

（2）$\mathrm{d}(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$；

（3）$\mathrm{d}(6z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)$。

3．设$\omega = f$是零次外微分形式，且f具有连续的二阶偏微商，证明：

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

4．设$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$是一次外微分形式且系数$P$，$Q$，$R$具有连续的二阶偏微商，证明：

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

第七节　梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系下的表达式

1. 设有正交坐标变换

$$x = a\,\mathrm{ch}\eta\cos\varphi,\quad 0 \leqslant \eta < +\infty;$$
$$y = a\,\mathrm{sh}\eta\sin\varphi,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$
$$z = z,\quad -\infty < z < +\infty;$$

其中曲线坐标 (η, φ, z) 称椭圆柱坐标，试求它的坐标曲面，拉梅系数及梯度、散度、旋度的表达式。

2. 设有正交坐标变换

$$x = a\,\mathrm{sh}\eta\sin\theta\cos\varphi,\quad 0 \leqslant \eta < +\infty;$$
$$y = a\,\mathrm{sh}\eta\sin\theta\sin\varphi,\quad 0 \leqslant \theta < \pi;$$
$$z = a\,\mathrm{ch}\eta\cos\theta,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$

其中曲线坐标 (η, θ, φ) 称旋转椭球坐标，试求它的坐标曲面，拉梅系数及梯度、散度、旋度的表达式。

第九章 无 穷 级 数

第一节 数项级数

复习思考题：

1．数项级数与数列之间有什么关系？

2．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的必要条件是什么？如果有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，能否推出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛？

3．对变号级数能否使用比较判别法？对负项级数呢？

4．柯西根值判别法和达朗倍尔比值判别法是根据什么判别法推导出来的？试写出推导的过程。它对一般级数能否适用？

5．不绝对收敛的级数是否一定发散？

6．试述级数收敛的柯西准则，并由此导出级数收敛的必要条件。

7．试用柯西准则说明，绝对收敛的级数自身必收敛。

8．为什么说级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$对任意$x$都收敛？

9．总结一下，正项级数与变号级数都有哪些收敛判别法。正项级数的收敛判别法对负项级数适用吗？

习 题

1．证明下列等式：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{4}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+2^n}{6^n}=\dfrac{3}{2}$；

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$。

2．设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$也收敛；试举例说明，逆命题不成立；但若$a_n>0$，则逆命题成立。

3．证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（$a_n\geqslant 0$）收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛；反之不成立，试举例说明。

4．证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$也收敛。

5．设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一收敛的正项级数，试证：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$收敛；

（2）对任何 $\delta>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^{\frac{1+\delta}{2}}}$ 收敛。

6．证明：若 $\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

7．设数列 na_n 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

8．设 $a_n>0$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛。

9．研究下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$；（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}\right)$；

（5）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$；（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$；（8）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；

（9）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4n}$；

（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$；（12）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$；

（13）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$，（14）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；　　(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$；

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$；　　(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$；

(19) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^k}$；　　(20) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$；

(21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$；　　(22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ $(a>0)$。

10．把下列数列作为级数的通项，证明以下各等式：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=0$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$。

11．研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$；　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$；（6）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$；

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$；　（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$；

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$；　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^{2n}}$．

12．研究下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[10]{n}}$。

第二节　函数项级数

复习思考题

1．函数项级数与函数序列之间有什么关系？

2．函数项级数与数项级数二者有什么关系？

3．函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上一致收敛的必要条件是什么？若有通项 $u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一致趋于零，能否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛？

4．连续函数项级数的和是否一定连续？举例说明。

5．函数项级数在闭区间上收敛是否一定一致收敛？

6．哪一个函数项级数，不管你逐项微分多少次，它的形式总是一样的？能不能根据这一点确定它的和函数？

习　题

1．确定下列级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^{n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n^2}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n-3^n}$;　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$.

2. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$,　　$-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n[1+(nx)^2]}$,　　$-\infty<x<+\infty$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}$,　　$-2\leqslant x\leqslant -1$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$,　　a) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,

b) $-1<x<1$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$,　　$0\leqslant x<+\infty$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$, a) $0<\delta\leqslant x<+\infty$, b) $0<x<+\infty$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$,　　$0<x<+\infty$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$,　　$1<x<+\infty$;

（9） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$，　$0<\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta$；

（10） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$，　$0\leqslant x<+\infty$。

3．证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 中一致收敛。

4．证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 中一致收敛。

5．证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内绝对并一致收敛，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}\right|$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内并不一致收敛。

6．设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，又设 $F_0(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，$F_1(x)=\int_a^x F_0(x)\mathrm{d}x$，$\cdots F_n(x)=\int_a^x F_{n-1}(x)\mathrm{d}x\cdots$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。

（1）证明级数 $F_0(x)+F_1(x)+\cdots+F_n(x)+\cdots$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛；

（2）若级数 $F_0(x)+F_1(x)+\cdots+F_n(x)+\cdots$ 在 $[a,\ b]$ 上的和函数为 $S(x)$，求证 $S(x)$ 满足方程

$$S'(x)-S(x)=f(x).$$

7．证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 当 $x>0$ 时，是 x 的连续函数。

8．证明：$\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 当 $x>1$ 时，是 x 的连续函数，

并且在此域内有各阶连续导函数。

9. 证明：$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\cos nx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛，但是连续的。

10. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$，求 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 及 $\lim_{x\to1}f(x)$。

11. 证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 当 $|x|<+\infty$ 时，具有连续的二阶微商。

12. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$。

第三节　幂级数与泰勒展开式

复习思考题

1. 幂级数的收敛区域与一般函数项级数的收敛区域有何不同？

2. 为什么说幂级数可以逐项微分任意多次？其收敛半径是否相同？一般函数项级数有没有这个性质？举例说明。

3. 幂级数在收敛区域内部不一定一致收敛，为什么其和函数在收敛区域内部一定连续，而且还可以逐项求微商？

4. 泰勒公式，泰勒级数和泰勒展开是不是等同语？

习　题

1. 求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$；

（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{10^{2n}x^n}{(2n+1)!!}$； （4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$； （6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$；

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$； （8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$；

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$； （10）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,$ $b>0)$.

2．将下列函数在指定点附近展成幂级数，并求收敛区域：

（1）x^3-2x^2+5x-7 $(x=1)$；

（2）$\ln(1+e^x)$ $(x=0)$（展开四次项）；

（3）$e^{\frac{x}{a}}$ $(x=a)$； （4）$\ln x$ $(x=1)$；

（5）$\frac{1}{x+10}$ $(x=0)$； （6）$\cos x$ $\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$；

（7）$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x=0)$； （8）$\arcsin x$ $(x=0)$；

（9）$\ln(1+x-2x^2)$ $(x=0)$；

（10）$\frac{1}{x^2+3x+2}$ $(x=-4)$。

3．用两种不同方法将下列函数展成幂级数：

（1）$\operatorname{ch}x$； （2）$\sin^2 x$；

（3）$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$； （4）$(1+x)\ln(1+x)$。

4．求下列级数的和函数：

（1）$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$；

(2) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;

(3) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$;

(4) $1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$;

(5) $1-3x^2+5x^4-\cdots+(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}+\cdots$;

(6) $1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+\cdots+n(n+1)x^{n-1}+\cdots$;

(7) $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot4}+\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots$;

(8) $1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots$.

5. 将下列积分表成级数形式：

(1) $\int\frac{e^x}{x}dx$;　　(2) $\int\frac{\sin x}{x}dx$;

(3) $\int_0^x\cos x^2dx$;　　(4) $\int_0^x e^{-x^2}dx$.

6. 方程 $y+\lambda\sin y=x$ ($\lambda\neq-1$) 在 $x=0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$，试求它的幂级数展开式中的前四项。

7. 怎样选择 a, b 的值，使两支曲线

$$y_1=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\qquad y_2=a(e^{bx}-1)$$

在原点附近最为密切，即使 y_1-y_2 的展开式尽可能从高次幂开始。问 y_1-y_2 第一个不为零的项是什么？

第四节　级数的应用

1. 取被积函数所展开的幂级数的前三项计算积分 $\int_0^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$，并估计误差。

2. 计算下列定积分的近似值：

（1）$\int_0^{0.5}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\mathrm{d}x$（精确到 0.001）；

（2）$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$（精确到 0.001）.

3. 利用 Stirling 公式求极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

4. 研究下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

5. 证明：当 $n\to\infty$ 时，$\ln n!\sim\ln n^n$.

第十章　含参变量的积分

第一节　广义积分收敛性的判别

复习思考题

1. 写出无穷区间上的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性的比较判别法及一般收敛性准则。

2. 叙述无穷区间上的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛的定义，并举例说明。

3. 两类广义积分有何联系？当 b 为段点时，试由此建立广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的相应理论。

4. 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，是否断言 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$？

5. 如果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中是非负的连续函数，从 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛能否断言 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$？

6. 从 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛能否断言 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛？从 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛能否断言 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛？举例说明。

习　题

1. 判断下列广义积分的收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln\ln x}$; (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$;

(9) $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$;

(10) $\displaystyle\int_a^b\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$;

(11) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (12) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

(13) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$; (14) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}$;

(15) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}$; (16) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\cos x}$;

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (18) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x$;

(19) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)}$; (20) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$;

(21) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$; (22) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^\mu}\mathrm{d}x$;

(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x\cos x}}$; (24) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. 证明对于无穷限积分，分部积分公式成立（当公式中各部分都有意义时）

$$\int_a^{+\infty}f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}g(x)f'(x)\mathrm{d}x,$$

并证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$。

3. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中非负、连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b\neq 0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=+\infty$。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中是正的单调非增的函数，那么 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 xdx$ 同敛散，由此证明积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx,\qquad \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}dx$$

发散。

5. 下列积分是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$；　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$；

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$；　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}dx$。

第二节　含参变量的常义积分

1. 试由复合函数的微商规则导出积分 $\psi(u, a(u), b(u))=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$ 对参变量 u 的微商公式。

2. 试用两种方法计算以下极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$；

(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$。

3. 求 $F'(\alpha)$：

(1) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$；

（2） $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$；

（3） $F(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$；

（4） $F(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$。

4．应用对参数的微分法，计算下列积分：

（1） $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$；

（2） $\int_{0}^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$；

（3） $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\mathrm{d}x$；

（4） $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\quad(|a|<1)$。

5．设 $f(x)$ 在 $[a,\ A]$ 上连续，证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{a}^{x}[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a),\quad(a<x<A).$$

6．设 $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，证明

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1f(x,y)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1f(x,y)\mathrm{d}y,$$

并说明等式不成立的原因。

7．设 φ，ψ 分别是可以微分两次和一次的函数，证明 $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$ 满足弦振动方程 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$。

第三节　含参变量的广义积分

1．确定下列广义参变量积分的收敛域：

（1）$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$ $(b>a)$； （2）$\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{d}x$；

（3）$\int_1^{+\infty} x^\alpha \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x$； （4）$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln x}$；

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$； （6）$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x}$；

（7）$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\mathrm{d}x$； （8）$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$。

2. 设 $a>0$，$b>0$，指出以下推理的错误：

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{ax}\mathrm{d}(ax)-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{bx}\mathrm{d}(bx)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t=0.$$

3. 叙述含参变量的广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 u 变化的区间 $[a, +\infty)$ 上一致收敛的定义。在什么条件下，这个积分所确定的函数 $\varphi(u)$ 是可微的。

4. 写出积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}u$ 可交换次序的条件。

5. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$， $(-\infty<u<+\infty)$；

（2）$\int_0^{+\infty} e^{-u^2(1+x^2)}\sin x\mathrm{d}x$， $(0<u_0\leqslant u<+\infty)$；

（3）$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$， a) $0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$，

b) $0<\alpha<+\infty$；

（4）$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$， $(0\leqslant\alpha<+\infty)$；

(5) $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$, a) $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$;

b) $0\leqslant\alpha\leqslant b$.

(6) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$, $(1<\alpha<+\infty)$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$, $(0\leqslant\alpha<+\infty)$;

(8) $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx$, $(0\leqslant\alpha<+\infty)$;

(9) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin bx}{a^2+x^2} dx$, $(0<b_0\leqslant b<+\infty)$;

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx$, $(0\leqslant p<+\infty)$.

6. 试用化成级数的方法，证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛。

7. 设 $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上连续，又对于 $[\alpha, \beta]$ 上每一 u，积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 收敛，而当 $u=\beta$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$ 发散，试证积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上必不一致收敛。

8. 证明 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 是连续且可微的函数。

9. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx$, $(\alpha>-1, \beta>-1)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx$, $(a>0, b>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}dx$, $(a>-1)$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx$, $(a>0)$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$, $(\alpha>0,\ \beta>0)$;

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax}{x(1+x^2)}dx$;

(7) $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(提示：\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\frac{du}{1+x^2u^2}\right)$;

(8) $\int_0^{+\infty}\left[e^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-e^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right]dx$, $(0<a<b)$;

(9) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-ax}}{x}\right)^2dx$, $(a>0)$;

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx$, $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

10. 利用$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$及$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$计算：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx$ $(a>0)$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}dx$, $(\sigma>0)$;

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}dx$, $(\sigma<0)$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}dx$ $(a>0,\ b>0)$;

（6）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$（$n$ 是正整数）；

（8）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x$。

第四节　欧　拉　积　分

1．何谓 Γ 函数，B 函数？写出 Γ 函数，B 函数的递推公式和它们之间的关系式。

2．利用欧拉积分计算：

（1）$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$，$(n,m,q>0)$；

（5）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{d}t$，$(a>0)$；

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}^n x\mathrm{d}x$，$(|n|<1)$；

（7）$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$；

（8）$\int_0^{+\infty}x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，（$n$ —正整数）；

（9）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$，（$n$ —正整数，$a>0$）；

（10）$\int_0^{+\infty}\frac{x^a\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$．$(-1<a<1)$；

(11) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}\,dx$;

(12) $\int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p dx \quad (p>0)$.

3. 试求曲线 $x^n+y^n=a^n$ 当 $x>0$, $y>0$, $n>0$ 时所围成平面图形的面积。

第十一章　富里叶分析

第一节　周期函数的富里叶级数

复习思考题

1. 是不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

都是某一个周期函数 $f(x)$ 的富里叶级数？它成为富里叶级数的必要条件是什么？

2. 周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的富里叶级数是否一定收敛？如果收敛，是否一定收敛于 $f(x)$ 自己？

3. 写出周期为 $2L$ 的周期函数的富里叶级数，在什么条件下这级数一致收敛于 $f(x)$？

4. 若 $f(x)$ 只在区间 $[0,L]$ 上定义，为什么能把它展成正弦级数，余弦级数，或一般的富里叶级数？并写出相应的展开式。

5. 在所有 n 次三角多项式中哪一个多项式与 $f(x)$ 的平方平均偏差最小？

6. 在区间 $[-L,L]$ 上写出函数 $f(x)$ 的巴塞瓦尔等式。

7. 何谓平方平均收敛，它与通常的逐点收敛有何不同？

习　题

1. 作出下列周期函数的图形，并把它们展开成富里叶级数（要求说明收敛情况）。

（1）$f(x)=|\sin x|$；

（2）在$[-\pi,\pi)$这个周期内，$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<\pi;\end{cases}$

（3）在$[-\pi,\pi)$这个周期内，$f(x)=x^2$；

（4）在$[-\pi,\pi)$这个周期内，$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$；

（5）在$[-\pi,\pi)$这个周期内，$f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

2. 把下列函数在指定的区间内展开成富里叶级数，并说明收敛情况。

（1）$f(x)=1-\sin\dfrac{x}{2}\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$；

（2）$f(x)=\dfrac{x}{3}\ (0\leqslant x\leqslant T)$；

（3）$f(x)=e^{ax}\ (-L\leqslant x\leqslant L)$；

（4）$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ -1, & 1\leqslant|x|\leqslant 2;\end{cases}$

（5）$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

3. 把下列函数展开成正弦级数和余弦级数：

（1）$f(x)=x\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$；

（2）$f(x)=2x^2\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$；

（3）$f(x)=\begin{cases}A, & 0\leqslant x<\dfrac{L}{2},\\ 0, & \dfrac{L}{2}\leqslant x\leqslant L;\end{cases}$

（4）$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h}, & 0\leqslant x\leqslant 2h,\\ 0, & 2h<x\leqslant\pi.\end{cases}$

4. 设$|a|<1$，利用恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a^n\cos nx + i a^n \sin nx)$$

证明：（1）$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx = \dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}$；

（3）$1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$.

5. 设$f(x)$是一个以2π为周期的函数，

（1）如果$f(x\pm\pi)=-f(x)$，试证明$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内的富里叶展开只含有奇次谐波，即$a_{2n}=0\,(n=0,1,2\cdots)$，$b_{2n}=0\,(n=1,2,\cdots)$；

（2）如果$f(x\pm\pi)=f(x)$，试证明$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内的富里叶展开只含有偶次谐波，即$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ $(n=1,2,\cdots)$.

6. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，它在四分之一周期内的波形如图 11.1 所示。试就下列几种情况画出它在一个周期（x从 0 到 2π）内的整个波形。

（1）$f(x)$是x的偶函数，且只含有偶次谐项；

（2）$f(x)$的富里叶展开中只含有奇次余弦项；

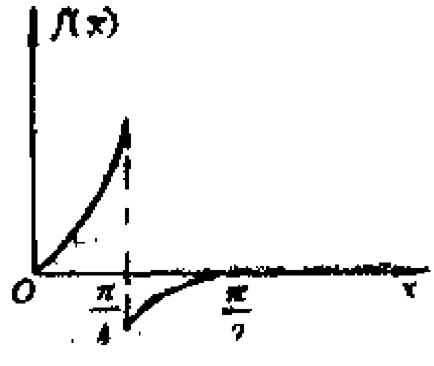


图 11.1

（3）$f(x)$是x的奇函数，且只含有奇次谐波；

（4）$f(x)$的富里叶展开中只含有偶次正弦项。

7. 已知周期为2π的函数$f(x)$的富里叶系数是a_n和b_n，试证明"平移"了的函数$f(x+h)$（$h=$常数）的富里叶系数为

$$\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh \quad n = 1, 2, \cdots.$$

8. 将 $y = 1 - x^2$ 在$[-\pi, \pi]$上展开成富里叶级数，并利用其结果求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$。

9. 将函数 $f(x) = \mathrm{sgn}\,x\ (-\pi < x < \pi)$ 展为富里叶级数，并利用其结果求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$的和。

10. 将函数 $y = |x|\ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开成富里叶级数，并利用其结果求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$。

11. 设 $f(x)$ 在$\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$这个周期上可表为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leqslant x < -\frac{\tau}{2}, \\ H, & -\frac{\tau}{2} \leqslant x < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leqslant x < \frac{T}{2}, \end{cases}$$

试把它展开成复形式的富里叶级数。

12. 将 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & a \leqslant |x| < \pi \end{cases}$ 展开成富里叶级数，然后利用巴塞瓦尔等式求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}$。

13. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，$a_n(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n(n=1,2,\cdots)$ 为其富里叶系数.求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的富里叶系数 A_n, B_n，利用所得结果，推出巴塞瓦尔等式。

第二节　广义富里叶级数

1. 何谓完备的么正系，何谓函数 $f(x)$ 的广义富里叶级数？

2. 验证下列函数系组成正交系，并求其对应的么正系：

（1）1，$\cos x$，$\cos 2x$，$\cdots$，$\cos nx$，$\cdots$在$[0,\pi]$上；

（2）$\sin\frac{\pi}{L}x$，$\sin\frac{2\pi}{L}x$，$\cdots$，$\sin\frac{n\pi}{L}x$，$\cdots$在$[0,L]$上；

（3）$\sin x$，$\sin 3x$，$\cdots$，$\sin(2n+1)x$，$\cdots$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上；

（4）$\cos\frac{\pi}{2L}x$，$\cos\frac{3\pi}{2L}x$，$\cdots$，$\cos\frac{2n+1}{2L}\pi x$，$\cdots$在$[0,L]$上。

3. 将 $f(x)=a\left(1-\frac{x}{L}\right)(0\leqslant x\leqslant L)$ 按第二题（2）的函数系展开成富里叶级数。

4. 将 $f(x)=x$ $(0\leqslant x\leqslant L)$ 按第二题（4）的函数系展开成富里叶级数。

第三节　富里叶变换

1. 写出函数 $f(x)$ 的富里叶变换及其反演公式。

2. 用富里叶积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ kx, & 0\leqslant x<T,\\ 0, & x\geqslant T;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-T,\\ -h, & -T\leqslant x<0,\\ k, & 0\leqslant x<T,\\ 0, & T\leqslant x;\end{cases}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

3. 求下列函数的富里叶变换：

(1) $f(x)=xe^{-a|x|}$ $(a>0)$；

(2) $f(x)=e^{-a|x|}\cos bx$ $(a>0)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4. 按指定的要求把函数 $f(x)=e^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 表示成 富里叶积分：

(1) 用偶性开拓； (2) 用奇性开拓。

5. 利用富里叶变换证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|<1;\\ \dfrac{\pi}{4}, & |x|=1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

提示：对 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 作富里叶变换。

第十二章　线性微分方程

第一节　微分方程解的存在唯一性定理

1．应用逐次逼近法求下列方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y' = y + x$，　$y(0) = 0$；

（2）$y' + y = e^x$，　$y(0) = \frac{1}{2}$．

2．用幂级数解法求下列方程的通解：

（1）$y'' + xy' + y = 0$；

（2）$y'' - e^x y = 0$；

（3）$xy'' - (1+x)y' + y = 0$　$(x \neq 0)$．

3．求方程 $y' = x + y^2$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解，近似到5次方．

4．解初值问题：

（1）$y'' + (y')^2 = 0$，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$；

（2）$y'' - xy' + y - 1 = 0$，$y(0) = y'(0) = 0$．

第二节　二阶线性微分方程的一般理论

1．研究下列函数组的线性相关、无关性：

（1）x，e^x；　　（2）$\cos x$，$\sin x$；

（3）$\cos x$，$\cos^3 x$，$\cos 3x$；　　（4）x，x^3，e^x．

2．函数 $\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 在开区间 $(0, \pi/2)$ 之内满足一个二阶齐次线性方程．

（1）证明它们是一组基本解；

（2）作出这个方程；

（3）证明1和$\cos 2x$是这个方程的另一组基本解。

3. 已知下列方程的一个特解，试求其通解：

（1）$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$，已知$y_1=\frac{\sin x}{x}$；

（2）$y''\sin^2 x=2y$，已知$y_1=\operatorname{ctg}x$；

（3）$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$，已知$y_1=x$；

（4）$(1-x^2)y''-xy'+9y=0$，已知y_1为三次多项式。

4. 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解，然后求通解：

（1）$x^2y''-2xy'+2y=0$，$x\neq 0$；

（2）$xy''-(1+x)y'+y=0$，$x\neq 0$；

（3）$(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$；

（4）$y''-y'\operatorname{tg}x+2y=0$。

（5）求方程

$$(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0\quad(x\neq 0,2)$$

满足初始条件$y|_{x=1}=0$及$y'|_{x=1}=1$的特解。

6. 已知特解$y_1=x$，$y_2=x^2$，试求方程$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$的通解。

7. 求下列非齐次方程的通解：

（1）$x^2y''-xy'=3x^3$ $(x\neq 0)$；

（2）$(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ $(x\neq 1)$；

（3）$y''+k^2y=f(x)$；

（4）$y''+4xy'+(4x^2+2)y=e^{-x^2}$；

（5）$y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{Sec}x$。

8. 方程$(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$有一特解$y=x^2$，试求这个方程满足初始条件$y|_{x=-1}=y'|_{x=-1}=0$的特解。

第三节　二阶常系数线性微分方程

第四节　质点的振动

1．求下列常系数齐次方程的通解：

（1）$y''-2y'-y=0$；（2）$4y''-8y'+5y=0$；

（3）$y''+y'+y=0$；（4）$y''-2y'+y=0$；

（5）$y'+2y=0$，（6）$y'-y=0$，

（7）$y''+y'-6y=0$；（8）$y''+\lambda y'+y=0$（λ 为实常数）．

2．解下列初值问题：

（1）$\begin{cases} s''(t)+2s'(t)+5s(t)=0, \\ s(0)=1,\ s'(0)=1; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} s''(t)-4s'(t)+3s(t)=0, \\ s(0)=6,\ s'(0)=10; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} y''+4y'+29y=0, \\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=15; \end{cases}$

（4）$\begin{cases} 4y''+4y'+y=0, \\ y|_{x=0}=2,\ y'|_{x=0}=0. \end{cases}$

3．求下列常系数非齐次方程的一个特解：

（1）$y''+y=3\sin\dfrac{x}{2}$；（2）$y'+2y=4x$；

（3）$y''-6y'+9y=(x+1)e^{2x}$；

（4）$y''-3y'+2y=e^{x}(3-4x)$；

（5）$y''-3y'+2y=2e^{x}\cos\dfrac{x}{2}$；

（6）$y''+y=\cos x$；（7）$y''-2y'+y=2e^{-x}+3e^{x}$；

（8）$y''+4y=x\sin x$；（9）$y''+y'-12y=x^2e^{x}$；

(10) $y''+2y'+y=x^2\cos x$; (11) $2y''+5y'=\cos^2 x$;

(12) $y''+y=xe^x\cos x$; (13) $y'-3y=e^{4x}$;

(14) $y''+y=\cos x\cos 2x$.

4. 解下列齐次欧拉方程（设 $x\neq 0$）：

(1) $x^2y''+3xy+5y=0$;

(2) $x^2y''-xy'+y=0$;

(3) $x^2y''-9xy'+21y=0$;

(4) $\dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dR}{dr}-\dfrac{n(n+1)}{r^2}R=0\ (r>0)$.

5. 解下列非齐次欧拉方程（设 $x\neq 0$）：

(1) $x^2y''-xy'=3x^3$;

(2) $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$;

(3) $x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$;

(4) $(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=4\cos\ln(1+x)$.

6. 在光滑的水平面上有一单位质量的质点与一水平弹簧（弹性系数 $k=9$）的一端相联，弹簧的另一端固定。设质点在周期性外力 $f(t)=3\sin 3t$ 的作用下由静止开始沿水平轴运动，运动开始时弹簧没有伸缩。如果所有阻力忽略不计，

（i）写出质点运动的微分方程；（ii）求质点的运动规律；（iii）讨论质点的运动状态。

7. 一长为 l 米，质量为 m 的单摆作简谐振动，假定其摆动偏角很小（即 $\sin\theta\approx\theta$），试求其运动方程。

8. 一质点开始在距地球中心为 a 的地方，并以初速 v_0 向地心运动，问此质点在重力作用下而移动距离 s 时其速度如何？（假定在真空中进行）

第五节　n 阶线性微分方程

第六节　线性微分方程组

1．求下列常系数齐次方程的通解：

（1）$y'''+9y'=0$；　　（2）$y'''-3y''+3y'-y=0$；

（3）$y^{(4)}-13y''+36y=0$；　（4）$y^{(4)}=16y$；

（5）$y^{(4)}+2y'''+y''=0$；　（6）$y^{(4)}+y=0$。

2．求下列常系数非齐次方程的一个特解：

（1）$y'''+y''+y'+3y=2\cos x$；

（2）$y'''+y''+4y'+4y=\cos 2x$；

（3）$y'''-2y'+4y=e^{x}\cos x$；

（4）$y^{(4)}-2y'''+y''=x$；

（5）$y'''-2y''-4y'+8y=16(e^{-2x}+e^{2x})$。

3．解下列欧拉方程：

（1）$x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$；

（2）$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$。

4．用消元升阶法或代数求解法求下列方程组的通解：

（1）$\begin{cases}\dot{x}+\dot{y}=-x+y+3,\\ \dot{x}-\dot{y}=x+y-3;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}\dot{x}+y=\cos t,\\ \dot{y}+x=\sin t;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}\dot{x}=-x+y+z,\\ \dot{y}=x-y+z,\\ \dot{z}=x+y-z.\end{cases}$

5．用消元升阶法或代数求解法求下列方程组满足所指定的初始条件的解：

（1）$\begin{cases} \dot{x} - 2\dot{y} = \sin t \\ \dot{x} + \dot{y} = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + y = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = 0; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{x}_2 = x_1, \quad x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 2. \end{cases}$

6. 质量为m的物体从水平速度为v_0的飞机中抛出，设空气阻力与速度成正比（比例系数为k），求该物体的运动方程及运动轨道。

7. 放射性同位素A衰变为放射性同位素B，B又衰变成C，C不再衰变。设A,B,C三种元素在时刻t的原子个数分别为$N_1(t)$，$N_2(t)$，$N_3(t)$，则衰变规律满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \\[2ex] \dfrac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\[2ex] \dfrac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2. \end{cases}$$

设$t=0$时只有同位素A，其原子个数为k，而B,C均没有，求此问题的解（λ_1,λ_2分别是A、B的衰变常数）。

答　案

第一章　函数的极限

第一节　数列极限

2．（1）$\frac{1}{4}<x<\frac{9}{4}$；　　（2）$x>1$ 或 $x<-3$；

（3）$-1<x<0$；　　（4）$x>0$；

（5）$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$；

（6）$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$。

3．（1）$\frac{n+1}{n^2}$；　　（2）$\frac{n}{n+1}$；　（3）$\frac{2n+1}{2n+3}$；

（4）$1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$；（5）$\frac{1}{2^n}$；　（6）$\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$。

10．（1）0；（2）$\frac{4}{3}$；（3）0；　（4）$\frac{1}{3}$；

（5）0；（6）4；（7）$-\frac{1}{2}$；（8）$\frac{1-b}{1-a}$。

11．（1）0；（2）$\frac{a+b}{2}$；（3）0；（4）$\frac{1}{2}$；

（5）0；（6）$\frac{1}{5}$；　（7）$\frac{1}{2}$；（8）$-\frac{1}{4}$。

12．（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{3}$；　（3）$\frac{4}{3}$；（4）1；

（5）$\frac{1}{2}$；（6）$\frac{1}{4}$；（7）3；（8）$\frac{1}{2}$；

（9）$\frac{1}{3}$；（10）$\frac{1}{1-q}$。

13. （1）1；（2）0；（3）0；（4）2；
（5）0。

14. （1）1；（2）1；（3）1；（4）1；
（5）1。

19. 1。

27. （1）2；（2）0；（3）0；（4）0；
（5）$1-\sqrt{1-c}$；（6）1；（7）$\sqrt{a}$；
（8）$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

30. $\frac{1}{2}$。

34. （1）e；（2）e；（3）e^{-1}；（4）e；
（5）e^{-1}；（6）e^{5}；（7）e^{-1}；（8）e^{x}。

35. （1）收敛；（2）收敛；（3）收敛；（4）收敛；
（5）发散；（6）发散；（7）发散。

36. （1）0；1。（2）-1，$1\frac{1}{2}$。
（3）-4；6。（4）-5，1.25。

第二节 函数极限

6. （1）-1；（2）6；（3）10；
（4）$\frac{1}{2}mn(n-m)$；（5）$\frac{m}{n}$；（6）$\frac{n(n+1)}{2}$；
（7）1；（8）$\frac{n}{m}$；（9）$\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

(10) -1; (11) $\dfrac{\sin 2}{2}$; (12) 0; (13) 0;

(14) 0; (15) 0; (16) $\dfrac{1}{2}(a+b)$;

(17) $\dfrac{1}{2}$; (18) 1; (19) $\dfrac{3}{2}$; (20) $-\dfrac{1}{2}$.

8. (1) $\dfrac{\alpha}{m}-\dfrac{\beta}{n}$; (2) $\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$.

10. $f(0+0)=1$; $f(0-0)=-1$.

12. (1) 5; (2) $\dfrac{2}{5}$; (3) $\dfrac{1}{2}$; (4) 4;

(5) 1; (6) 1; (7) $(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$;

(8) $-\sin\alpha$; (9) $\dfrac{1}{p}$; (10) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

(11) $-\cos^2\alpha$; (12) $\dfrac{2}{\pi}$; (13) e^{-1}; (14) 0;

(15) e^{-1}; (16) e^{8}; (17) e^{-2}; (18) e^{2};

(19) e^{5}.

15. $a=1$, $b=-1$.

16. $a=1$, $b=-\dfrac{1}{2}$.

20. (1) $+\infty$; (2) $+\infty$.

23. (1) 10.16; (2) 20.12; (3) 1.05; (4) 4.044.

24. (1) 1.015; (2) 7.976; (3) 16.322;

(4) 15.370.

27. (1) 1级; (2) 2级; (3) $\dfrac{1}{2}$级; (4) 1级;

(5) 3级; (6) $\dfrac{1}{3}$级; (7) $\dfrac{1}{5}$级; (8) 2级.

29. (1) a; (2) $\frac{m}{n}$; (3) 1; (4) $\frac{1}{3}$;

(5) $\frac{1}{n}$; (6) $\frac{1}{4n}$; (7) $\frac{1}{4}$; (8) 1;

(9) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; (10) $\frac{1}{8}$.

第三节 函数的连续性

5. (1) $x=2$ 是无穷间断点。

(2) $x=1$ 是无穷间断点；$x=2$ 是第一类可去间断点；定义 $y_{(2)}=4$。

(3) $x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=3$。

(4) $x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=0$。

(5) $x=k\pi$，$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，无穷间断点；
$x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=1$。

(6) $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，无穷间断点；
$x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=2$。

(7) $x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=e$。

(8) $x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=0$。

(9) $x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=\frac{3}{2}$。

(10) $x=\pm1$，无穷间断点；$x=0$，可去间断点；定义 $y(0)=0$。

(11) $x=a$，第一类不可去间断点。

(12) $x=0$，第一类不可去间断点。

(13) $x=1$，第二类间断点。

(14) $x=0$，第二类间断点。

6. (1) 连续； (2) 在 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$处间断；

（3）在 $x=-1$ 处间断；（4）连续；

（5）当 $A=4$ 时连续，当 $A\neq 4$ 时，在 $x=2$ 处间断；

（6）连续；（7）连续；（3）在 $x=-1$ 处间断；

（9）在 $x=1$ 处间断；

（10）当 $a\neq 0$，在 $x=0$ 处间断，当 $a=0$，连续；

（11）连续；（12）当 $a\neq 1$，在 $x=0$ 处间断；

当 $a=1$，连续。

7. （1）在 $x=1$ 处间断；（2）在 $x=\pm 1$ 处间断；

（3）在 $x=k\pi$ 处间断，$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

（4）在 $x=0$ 处间断。

8. $a=1$。

12. （1）e^{a}；（2）e^{2}；（3）e^{2}；（4）3；

（5）-1；（6）$\frac{1}{e}$；（7）$\ln a$；（8）2；

（9）e^{β}；（10）$\alpha-\beta$；（11）e^{2}；（12）e^{-1}；

（13）1；（14）1；（15）1；（16）$\frac{\pi}{2}$；

（17）$e-1$。

3. （1）1 级；（2）$\frac{3}{2}$级；（3）1 级；

（4）$\frac{1}{2}$级；（5）1 级；（6）1 级。

第二章　单变量函数的微分学

第一节　函数的微商

1. （1）25；20.5；20.05；20.005。

（2）20。（3）20。

2. （1）4。（2）40。（3）$4x$。

3. （1）95 克/厘米；（2）35 克/厘米；

（3）185 克/厘米。

4. 3；0；12；6.

5. （1）-2，1；（2）-1，0；（3）-4，3；

6. $\frac{4}{\pi}$，1，0；

7. 13.5；　　　　　　　　8. pe.

9. （1）$3ax^2+2bx+c$；（2）$\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-\frac{a}{3\sqrt[3]{x^4}}$，

（3）$\frac{16}{5}x^2\cdot\sqrt[5]{x}$；（4）$\frac{1}{(x+2)^2}$；

（5）$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$；　（6）$\frac{15x^2+48x+82}{(5x+8)^2}$；

（7）$\cos^2x-\sin x\sin 2x$；

（8）$\sin x+\sin x\sec^2x-\mathrm{cse}^2x$；

（9）$(\sin 2x\cos x-\sin^3x)/(x^3+\mathrm{tg}x)$

$-\sin^2x\cos x(3x^2+\sec^2x)/(x^3+\mathrm{tg}x)^2$；

（10）$\frac{x^4(1.5\cos x+0.3x\sin x)+a}{(a+b)\cos^2x}$；

（11）$\frac{1-\ln x^n}{x^{n+1}}$；（12）$a^x\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$，

（13）$\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sin\sqrt{1-x^2}}-\frac{(x+\arcsin x)\cos x}{\sin^2x}$，

（14）$t^2e^{-t}\left[(3-t)\,\mathrm{arctg}\,t+\frac{t}{1+t^2}\right]$，

（15）$(a^2+b^2)x^{a-1}e^x\left[(x+a)\,\mathrm{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}\right]$；

（16）$\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$；　（17）$2x\log_3x+\frac{x}{\ln 3}$；

(18) $-\frac{10^x \ln 100}{(1+10^x)^2}$;　　(19) $\frac{7}{8}x^{-1/8}$;

(20) $\frac{2}{(1+x)^2}$.

10. 交点 (1, 0) 及 (−1, 0) 的切线方程分别为

$2x-y-2=0$ 及 $2x-y+2=0$.

11. 点 (2,4) .

12. 点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ 及 (−1,1) .

15. $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx 70°30'$.

16. (1) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4}}$;

(2) $\sin^{\alpha-1}x\ln^{\beta-1}x\left(\alpha\cos x\ln x+\frac{\beta}{x}\sin x\right)$;

(3) $\frac{2\ln x}{3x\cdot\sqrt[3]{(1+\ln^2x)^2}}$;

(4) $\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\left[\operatorname{arctg}\varphi^2+3\varphi(1+\varphi^2)\frac{1}{1+\varphi^4}\right]$;

(5) $-\frac{x\arcsin x}{(1+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{1}{1-x^2}$;

(6) 0; (7) $\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

(8) $5^x(1+\ln 5^x)$;

(9) $[27\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot$

$\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}]^{-1}$;

(10) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$;

(11) $\cos x\cos(\sin x)\cos[\sin(\sin x)]$;

(12) $-\frac{15x^2}{1+x^6}\sin(\mathrm{arctg}x^3)\cos^4(\mathrm{arctg}x^3)$

$\cos[\cos^5(\mathrm{arctg}x^3)]$;

(13) $2\left[\frac{1}{a^2}\sec^2\frac{x}{a^2}\mathrm{tg}\frac{x}{a^2}\right.$

$\left.+\frac{1}{b^2}\sec^2\frac{x}{b^2}\mathrm{tg}\frac{x}{b^2}\right]$;

(14) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}$;

(15) $a^x e^{\sin \mathrm{tg} x}(\ln a+\sec^2 x\cos \mathrm{tg} x)$;

(16) $\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}e^{\cos\frac{1}{x^2}}\left(1+\cos\frac{1}{x^2}\right)$;

(17) $\frac{x+1}{8\sqrt{x^2+2x}\sqrt{1-2x-x^2}\sqrt[4]{(\arcsin\sqrt{x^2+2x})^3}}$;

(18) $-\frac{2}{1+x^2}\mathrm{sgn}x\ (x\neq 0)$; (19) $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$;

(20) $\frac{1}{\cos x}$; (21) $-\frac{1}{\cos x}$; (22) $\frac{1}{1+x^2}$;

(23) $\frac{\mathrm{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}\ (x\neq 0)$; (24) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;

(25) $x^{x^x+x-1}[x\ln x(\ln x+1)+1]$

$+x^x(\ln x+1)+x^{a^x}\cdot a^x\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$;

(26) $(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x)$;

(27) $(\mathrm{tg}\,ax)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{b}}\left(-\frac{1}{b}\csc^2\frac{x}{b}\ln\mathrm{tg}\,ax\right.$

$\left.+\frac{2a}{\sin 2ax}\mathrm{ctg}\frac{x}{b}\right)$;

(28) $(\ln x)^{x-1}x^{\ln x-1}(x+2\ln^2 x+x\ln x\ln\ln x)$;

(29) $2x\operatorname{sgn}(\cos x^2)$;　(30) $-\dfrac{2x(\sin x^2+\cos x^2)}{\sqrt{\sin 2x^2}}$;

(31) $\dfrac{4x}{\arccos^2(x^2)\cdot\sqrt{1-x^4}}$;

(32) $\dfrac{1}{a+b\cos\varphi}$;　(33) $\sqrt{a^2-x^2}$;

(34) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$;　(35) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

(36) $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$;　(37) $\dfrac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi-1}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}}$;

(38) $\dfrac{12t^5}{(1+t^{12})^2}$;　(39) $\dfrac{e^{-2x}-e^{2x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$;

(40) $\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2+x^4}{1+x^2+x^4}}\cdot\dfrac{4x(x^4-1)}{3(1-x^2+x^4)(1+x^2+x^4)}$.

17. (1) $\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$;

(2) $\dfrac{\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}}{\varphi^2(x)\cdot\psi(x)}\cdot[\varphi(x)\psi'(x)$

$-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)]$;

(3) $2\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}\ln\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

$\cdot\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi(x)\cdot\psi(x)}$;

(4) $\dfrac{\varphi'(x)+\varphi(x)^{\psi(x)-1}[\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x)+\varphi'(x)\psi(x)]}{1+[1+\varphi(x)+\varphi(x)^{\psi(x)}]^2}$.

18. (1) $3x^2f'(x^3)$;

(2) $\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)]$;

(3) $f'(e^x+x^e)(e^x+ex^{e-1})$;

(4) $\cos[f(\sin f(x))]f'(\sin f(x))\cos f(x)f'(x)$;

(5) $f'\{f[f(\sin x+\cos x)]\}f'[f(\sin x+\cos x)]$
$f'(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)$;

(6) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f(e^x)f'(x)]$.

25. $P_n=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$,

$$Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

26. (1) $x'(y)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$, (2) $x'(y)=-(1+x^2)$,

(3) $x'(y)=\dfrac{-1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$; (4) $x'(y)=\dfrac{1}{1-y^2}$.

29. 0，4，8秒。 30. 8度/分。

31. (1) -0.875 米/秒， (2) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$秒。

32. 50公里/小时。 33. 0.64 厘米/分。 34. 4π 米^2/秒。

35. (1) 切线：$y=2a$，法线：$x=a\pi$。

(2) 切线：$4x+2y-3=0$，法线：$2x-4y+1=0$。

(3) 切线：$4x+3y-12a=0$，法线：$3x-4y+6a=0$。

38. (1) 连续但在 $x=0$ 不可微。

(2) 连续但在 $x=1$ 不可微。

(3) 连续但在 $x=0$ 不可微。

(4) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可微。

39. (1) $f'(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

(2) $f'(x)=\begin{cases}1+2\sin x\sin\dfrac{1}{x}\left(\cos x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\sin x\cos\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 1 & x=0.\end{cases}$

40. $a=2$, $b=-1$.

41. $a=e^{x_0}$, $b=e^{x_0}(1-x_0)$.

42. (1) $n>0$; (2) $n>1$; (3) $n>2$.

第二节 函数的微分

1. $\Delta y=0.0404$; $dy=0.04$.

2. $\Delta y=130$, 4; 0.31; 0.0301;
   $dy=30$, 3; 0.3; .003; $\Delta y-dy\to 0$ $(\Delta x\to 0)$.

3. (1) $\Delta y=17$厘米^2, $dy=16$ 厘米^2;
   (2) $\Delta y=8.25$厘米^2, $dy=8$ 厘米^2;
   (3) $\Delta y=1.61$ 厘米^2, $dy=1.6$ 厘米^2.

4. (1) $\dfrac{dx}{x-2\pi}$; (2) $\dfrac{x\ln 5}{(1+x^4)\sqrt{\operatorname{arctg}x^2}}5^{\sqrt{\operatorname{arctg}x^2}}dx$;

   (3) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; (4) $x\sin x dx$;

   (5) $\dfrac{dx}{x^2-a^2}$; (6) $8x\operatorname{tg}(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$.

5. $\dfrac{\pi}{360}$.

10. (1) 1.002; (2) 1.99534; (3) 0.4849;
    (4) 0.03; (5) 1.0023; (6) 2.7455.

11. (1) $ds=\dfrac{4f}{3l}df$; (2) $df=\dfrac{3l}{4f}ds$.

12. (1) $dy=e^x dx$; $d^2y=e^x(dx)^2$.
    (2) $dy=e^x dx$; $d^2y=e^x[(dx)^2+d^2x]$.

13. (1) $ud^2v+2dudv+vd^2u$;
    (2) $\dfrac{v(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^3}$.

14. $d^3y=e^u[(u')^3+3u'u''+u''']dx^3$.

15. (1) $d^2y=\cos x d^2x-\sin x dx^2$;

(2) $d^2y=e^t(\cos e^t-e^t\sin e^t)dt^2$.

17. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2+\varphi^2}{a(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^3}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{tg}\varphi$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a\cos^4\varphi\sin\varphi}$.

第三节 高阶微商与高阶微分

1. (1) $2(2x^2-1)e^{-x^2}$;

(2) $\frac{1}{(1-x^2)^2}\left[3x+\frac{1+2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right]$;

(3) $a^x(2+4x\ln a+x^2\ln^2 a)$;

(4) $\frac{2a\cos x}{a^2+x^2}-\frac{2ax\sin x}{(a^2+x^2)^2}-\sin x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$;

(5) $2\operatorname{arctg}x+\frac{2x}{1+x^2}$; (6) $-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$.

2. $f(0)=1$, $f'(0)=1$; $f''(0)=0$.

3. (1) $\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$;

(2) $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$.

4. (1) $y''=2[f'(x^2)+2x^2f''(x^2)]$;

$y'''=4x[3f''(x^2)+2x^2f'''(x^2)]$.

（2） $y''=(e^x+1)^2f''(e^x+x)+e^xf'(e^x+x)$；

$$y'''=(e^x+1)^3f'''(e^x+x)$$
$$+3e^x(e^x+1)f''(e^x+x)+e^xf'(e^x+x).$$

（3） $y''=\dfrac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$

$$y'''=\frac{1}{f^3(x)}\Big\{f^2(x)f'''(x)-3f(x)f'(x)f''(x)$$
$$+2[f'(x)]^3\Big\}$$

（4） $y''=a^2e^{f(ax+b)}[f'^2(ax+b)+f''(ax+b)]$

$$y'''=a^3e^{f(ax+b)}[f'^3(ax+b)$$
$$+3f'(ax+b)f''(ax+b)+f'''(ax+b)]$$

9. （1） $e^x(x^2+100x+2450)$； （2） $\dfrac{28!(x+30)}{(1+x)^{30}}$；

（3） $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$；

（4） $\dfrac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$；

（5） $(-1)^n\cdot n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$；

（6） $e^x\left[\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right]$；

（7） $\dfrac{2(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$；

（8） $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{当 } n=2m; \\ (-1)^m(2m)!, & \text{当 } n=2m+1.\end{cases}$

第五节　泰勒公式

1. $-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

2. $1+6(x-1)+15(x-1)^2+20(x-1)^3+15(x-)^4$

$+6(x-1)^5+(x-1)^6$.

3. $f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$.

4. $x+\frac{x^3}{3}\ \frac{1+2\sin^2\theta x}{\cos^4\theta x}$, $0<\theta<1$.

5. $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ \frac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$, $0<\theta<1$.

6. $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}$

$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(n+1+\theta x)e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

7. $-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]$

$$+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}},\quad 0<\theta<1.$$

8. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\cdots+(-1)^n(x-2)^n$

$$+(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{[1+\theta(x-2)]^{n+2}},\quad 0<\theta<1.$$

9. $2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}-\frac{5(x-4)^4}{128[4+\theta(x-4)]^{7/2}}$,

$0<\theta<1$

10. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$+\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2(2n+1)!}x^{2n+1},\quad 0<\theta<1.$$

11. $\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$

$$+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\sin(2\theta x)\cdot x^{2n+1},\quad 0<\theta<1.$$

12. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

16. 0.8209. 17. 1.36425.

18. （1）0.3090；10^{-4}。（2）3.1072；10^{-4}。
（3）3.0171；10^{-7}。（4）0.1826；10^{-8}。

19. 0.342020。　20. 1.64869。　21. 0.985。

第六节　未定式的极限

1. （1）2；（2）2；（3）$\frac{\alpha}{\beta}$；（4）$-\frac{1}{2}$；

（5）2；（6）$-\frac{1}{3}$；（7）$\frac{1}{6}$；（8）$\frac{1}{2}$；

（9）1；（10）3；（11）2；（12）$\frac{a}{\sqrt{b}}$；

（13）1；（14）$\frac{1}{a}$；（15）$\frac{1}{3}$；（16）$-\frac{e}{2}$；

（17）1；（18）$\frac{1}{2}$；（19）1；（20）e^{-1}；

（21）1；（22）1；（23）$e^{-\frac{1}{6}}$；（24）k；

（25）1；（26）$-\frac{1}{3}$；（27）$e^{-\frac{2}{\pi}}$；（28）0；

（29）0；（30）$e^{-\frac{1}{2}}$；（31）$\frac{1}{2}$；（32）-2。

2. （1）0，不能用洛必达法则，不是未定式。
（2）0，不能用洛必达法则。
（3）1，不能用洛必达法则。
（4）1，不能直接用洛必达法则。

3. （1）x^{α}（$\alpha>0$）比（$\ln x)^{k}$（$k>0$）更高级的无穷大，
（$x\to+\infty$）
（2）$e^{\sqrt{x}}$ 比 x^{α}（$\alpha>0$）更高级的无穷大，（$x\to+\infty$）
（3）x^{x} 比 e^{x} 更高级的无穷大，（$x\to+\infty$）
（4）$\ln\sin\frac{a}{x}$ 与 $\ln\sin\frac{b}{x}$ 是 $x\to+\infty$ 的同阶无穷大。

第七节　函数的增减性与极值

1. （1）极大 $y(0)=0$；极小 $y(1)=-1.33$。

（2）极大 $y(0)=4$；极小 $y(-2)=\frac{8}{3}$。

（3）极大 $y(0)=\sqrt[3]{a^4}$；极小 $y(\pm a)=0$。

（4）极小 $y(0)=0$。

（5）极大$y(\pm 1)=e^{-1}$；极小$y(0)=0$。

（6）极小$y(-\ln\sqrt{2})=2\sqrt{2}$。

（7）极大$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$。

（8）极大 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$。　（9）无极值。

（10）极大$y(0)=0$，极小$y\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{108}{3152}$。

（11）极小$y(3)=0$。　（12）无极值。

（13）极大$y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$，

极小$y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}$.

（14）极小 $y(e)=e$。

（15）极大 $y(1)=1$；极小 $y(0)=y(2)=0$。

（16）没有极值。

（17）极大 $y(-\sqrt{2})=\frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$，

极小 $y(\sqrt{2})=\frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$。

2. （1）最大值 $y=13$，最小值 $y=4$。

（2）最大值 $y=2$，最小值 $y=-12$。

（3）最大值 $y=10$，最小值 $y=6$。

（4）最大值 $y=\frac{\pi}{2}$；最小值 $y=-\frac{\pi}{2}$。

（5）最大值 $y=\frac{3}{5}$；最小值 $y=-1$。

（6）最小值 $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$；无最大值。

（7）最大值 $y(0)=\frac{\pi}{4}$，最小值 $y(1)=0$。

（8）最小值 $y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，无最大值。

4．（1）有一实根，范围（4，5）．

（2）当 $-5<k<27$，有三个实根，

分别在 $x<-1$，$-1<x<3$，$x>3$。

当 $k>27$ 或 $k<-5$，有一实根，

在 $x<-1$ 或 $x>3$。

当 $k=27$ 或 $k=-5$，有三实根。

（3）$a>\frac{1}{e}$时，没有实根；

$0<a<\frac{1}{e}$时，有二个实根，

分别在$\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$，$\left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$，

$a=\frac{1}{e}$时只有 $x=e$ 一个实根。

5．边长为 1 厘米。6．高为$\frac{20}{\sqrt{3}}$厘米。

8．$\frac{a}{\sqrt{2}}$。　　9．$1\frac{27}{43}$小时。　　10．$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$。

11．桶底半径为 1 米，高为 1.5 米。

12. 离甲城 $50-\frac{100}{\sqrt{6}}$公里处。

13. 离乙城1.5公里处。

14. 2.4米。　　15. $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$。

第八节　函数图形的描绘

第九节　平面曲线的曲率

1. (1) 在$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$内下降，在$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$内上升；

$x=\frac{1}{2}$是极小值点。

(2) 在$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{18}, +\infty\right)$内上升，

在$\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right)$内下降；$x=-\frac{1}{2}$是极大值点，

$x=\frac{11}{18}$是极小值点。

(3) 在$(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$内下降，在$(0, 2)$内上升；$x=0$是极小值点，$x=2$是极大值点。

(4) 在$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$内下降，在$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$内上升；$x=\frac{\pi}{3}$是极小值点，$x=\frac{5\pi}{3}$是极大值点。

(5) 在$\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$, $(a, +\infty)$内上升，在$\left(\frac{2}{3}a, a\right)$内下降；$x=\frac{2}{3}a$是极大值点，$x=a$是极小值点。

(6) 在$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$内上升，

在$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$内下降，$x=\frac{\pi}{6}$, $x=$

$\frac{5\pi}{6}$是极大值点，$x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$是极小值点。

(7) 在$(-\infty, +\infty)$内上升，无极值点。

(8) 在$(-1,0)$内下降，在$(0,+\infty)$内上升；$x=0$是极小值点。

(9) 在$(-\infty, +\infty)$内上升，无极值点。

(10) 在$(-\infty, -1)$, $(1,+\infty)$内下降，在$(-1,1)$内上升，$x=-1$是极小值点，$x=1$是极大值点。

2. (1) 在$(-\infty, 0)$内呈凸形，在$(0, +\infty)$内呈凹形；$x=0$是扭转点。

(2) 在$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$内呈凹形，在$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$内呈凸形；$x=\frac{1}{2}$是扭转点。

(3) 在$(-\infty, 1)$内呈凸形，在$(1,+\infty)$内呈凹形；$x=1$是扭时点。

(4) 处处呈凹形，无扭转点。

(5) 在$(0,1)$内呈凸形，在$(1, +\infty)$内呈凹形，$x=1$是扭转点。

(6) 在$(-\infty, -3)$和$(-1, +\infty)$内呈凹形，在$(-3, -1)$内呈凸形；$x=-3$和$x=-1$是扭转点。

(7) 在$(2k\pi, (2k+1)\pi)$内呈凸形，在$((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$内呈凹形；$x=k\pi$ $(k=0, \pm 1,$

$\pm 2\cdots$）是扭转点。

（8）在 $(-1,\ 1)$ 内呈凹形，在 $(-\infty,\ -1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内呈凸形；$x=1$ 和 $x=-1$ 是扭转点。

（9）在 $(-\infty,\ -3a)$ 和 $(0,3a)$ 内呈凹形，在 $(-3a,0)$ 和 $(3a,\ +\infty)$ 内呈凸形；$x=-3a$，$x=0$，$x=3a$ 是扭转点。

(10) 在 $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$ 内呈凹形，在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 内呈凸形；$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是扭转点。

(11) 在 $(0,ae^{\frac{3}{2}})$ 内是凸形，在 $(ae^{\frac{3}{2}},\ +\infty)$ 内呈凹形；$x=ae^{\frac{3}{2}}$ 是扭转点。

(12) 在 $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ 内呈凹形，在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内呈凸形；$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是扭转点。

3．$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$。

4．$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$。

5．$\alpha=-\frac{20}{3}$，$\beta=\frac{4}{3}$。

还有扭转点为：$(-2,\ -2.5)$，$(0,\ 0)$。

8．（1）扭转点为：$(1,\ 4)$ 和 $(1,\ -4)$。

（2）扭转点为：当 $t=k\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 时。

9. (1) $y=0$, $x=1$, $x=2$.

(2) $x=0$, $y=x+3$.

(3) $x=0$.　　　　(4) $y=0$.

(5) $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$.

(6) $y=2x\pm\frac{\pi}{2}$.

(7) $x+y=0$.　　　　(8) $y=\pm\frac{b}{a}x$.

(9) $x=1$, $y=3x+1$.

(10) $y=-1$, $2x+y+1=0$.

(11) $y=x$.

10. (1) $x=-1$, $y=0$.

(2) $y=\frac{1}{2}x+e$.

(3) $x+y+a=0$.

(4) $x=2$, $2x+8y+1=0$, $6x-40y+9=0$.

13. (1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$,　(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$,　(3) $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$;

(4) $\frac{16\sqrt{5}}{25}$;　(5) 0;　(6) 1;

(7) $\frac{5\sqrt{2}}{6a}$;　(8) $\frac{1}{6}$;　(9) $\frac{2}{3a}$;

(10) $\frac{2}{\pi a}$.

16. $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

17. $y=-x^5-0.6x^4+45x^3+0.1x^2$.

第三章　单变量函数的积分学

第一节　不定积分

1. （1）$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$;　（2）$\frac{2}{5}x^{5/2}+x+c$;

　（3）$\sqrt{\frac{2h}{g}}+c$;

　（4）$-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}-e^x+\ln|x|+c$;

　（5）$\frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}+c$;

　（6）$x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+c$;

　（7）$\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+c$;

　（8）$\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c$;

　（9）$\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+c$;

　(10) $x-\mathrm{arctg}\,x+c$;

　(11) $-\frac{2}{5\ln 5}+\frac{1}{5\cdot 2^x\ln 2}+c$;

　(12) $\mathrm{tg}x-x+c$;　(13) $x-\sin x+c$;

　(14) $-(\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x)+c$;　(15) $\sin x-\cos x+c$;

　(16) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+\frac{x}{2}+c$.

2. （1）$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$;　（2）$\ln|x^2-3x+8|+c$;

(3) $-\ln|\cos x|+c$; (4) $-\ln(1+\cos x)+c$;

(5) $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+c$;

(6) $\ln(3+\sin x+\cos x)+c$.

3. (1) $\int|x|dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+c, & x\geqslant 0,\\ -\frac{x^2}{2}+c, & x<0;\end{cases}$

(2) $\int e^{-|x|}dx=f(x)+c$,其中$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ -e^{-x}+2, & x>0;\end{cases}$

(3) $\int\max(1, x^2)dx=f(x)+c$, 其中 $f(x)$

$$=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}, & x<-1,\\ x, & -1\leqslant x<1,\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

4. (1) $\frac{1}{202}(2x-3)^{101}+c$;

(2) $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)+c$;

(3) $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+c$;

(4) $-\sin\frac{1}{x}+c$; (5) $-2\cos\sqrt{x}+c$;

(6) $2\mathrm{arctg}\sqrt{x}+c$; (7) $e^{\sin x}+c$;

(8) $\sec x+c$; (9) $\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2+c$;

(10) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+c$.

5. (1) $-\sqrt{1-x^2}+c$; (2) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+c$;

(3) $\frac{1}{4}\ln(x^4+\sqrt{x^8-4})+c$; (4) $\sqrt{3x^2-5x+6}+c$;

(5) $\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+c$; (6) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+c$;

(7) $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+c$; (8) $\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2+c$;

(9) $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2}+c$; (10) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2+c$;

(11) $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|+c$;

(12) $\ln|\ln(\ln x)|+c$;

(13) $e^{e^x}+c$; (14) $\frac{1}{4}e^{2x^2}+c$;

(15) $\frac{1}{4}(e^x+1)^4+c$;

(16) $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}+c$;

(17) $\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$;

(18) $\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+c$; (19) $\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$;

(20) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+c$.

6. (1) $\operatorname{tg}x-x+c$; (2) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c$;

(3) $-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+c$; (4) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c$;

(5) $\frac{1}{2(n-m)}\sin(n-m)x-\frac{1}{2(n+m)}\sin(m+n)x+c$;

(6) $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}+c$;

(7) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+c$;

(8) $x-\operatorname{arctg}x+c$; (9) $x-\ln(e^x+1)+c$;

(10) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+c$;

(11) $-\frac{1}{3}\sqrt{2-x^2}(x^2+4)+c$;

(12) $-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}+c$.

7. (1) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$;

(2) $-e^{-x}(x+1)+c$;

(3) $\frac{1}{5}\left(x^2\sin 5x+x\cos 5x-\frac{2}{25}\sin 5x\right)+c$;

(4) $\frac{a^x}{\ln a}\left(x^2-\frac{2x}{\ln a}+\frac{2x}{\ln^2 a}\right)+c$;

(5) $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+c$;

(6) $\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg}x-x+\operatorname{arctg}x)+c$;

(7) $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+c$;

(8) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$;

(9) $\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+c$;

(10) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+c$;

(11) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+c$;

(12) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+c$;

(13) $\frac{1}{3}\sqrt{1+2x}(x-1)+c$;

(14) $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+c$;

(15) $-\cos x\ln(\operatorname{tg}x)+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$;

(16) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}+x+c$;

(17) $\frac{1}{a^2+b^2}(a\operatorname{ch}ax\sin bx-b\operatorname{sh}ax\cos bx)+c$;

(18) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+c$;

(19) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x-\frac{x}{1+x^2}\right)+c$;

(20) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+c$;

(21) $\frac{x-2}{x+2}e^x+c$; (22) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)+c$.

8. (1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c$;

(2) $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$;

(3) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|1+x|+c$;

(4) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+c$;

(5) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c$;

(6) $\frac{4}{2-x}-\frac{11}{2(x-2)^2}+c$;

(7) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+c$;

(8) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^6}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$;

(9) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+c$;

(10) $\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{|(x+1)(x+3)^3|}+c$;

(11) $\frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+c$;

(12) $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+c$.

9. (1) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right|+c$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$

$+c$;

(3) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|+c$, 其中

$$\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

(4) $\operatorname{tg}x-\sec x+c$ 或 $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+c$;

(5) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$;

(6) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+c$;

(7) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$;

(8) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]+c$;

(9) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+c$;

(10) $\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$.

10. (1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}+c$;

(2) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+c$;

(3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x+c$;

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+c$;

(5) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+c$;

(6) $-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x-8\operatorname{ctg}2x+c$.

11. (1) $F(x)=\begin{cases}\operatorname{arcsec}x+c, & x>1,\\ -\operatorname{arcsec}x+c, & x<-1;\end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases}-\operatorname{arccsec}x+c, & x>1,\\ \operatorname{arccsec}x+c, & x<-1;\end{cases}$

(3) $F(x)=\begin{cases}-\arcsin\dfrac{1}{x}+c, & x>1,\\ \arcsin\dfrac{1}{x}+c, & x<-1;\end{cases}$

(4) $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+c$.

12. (1) $2[\sqrt{1+x}-\ln(1+\sqrt{1+x})]+c$;

(2) $\dfrac{\sqrt{2+4x}}{6}(x-1)+c$;

(3) $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+c$;

(4) $x+\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}$

$+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+c$;

(5) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$;

(6) $\dfrac{6}{5}t^5-4t^3+18t-21\operatorname{arctg}t+\dfrac{3t}{1+t^2}+c$,

其中$t=\sqrt[6]{x}$;

(7) $\sqrt{t^2+1}\left[\dfrac{3}{5}(t^2+1)^2-2(t^2+1)+3\right]+c$,

其中 $t=\sqrt[3]{x}$;

(8) $\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+c$;

(9) $\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+c$;

(10) $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3+4x-4x^2}+\arcsin\frac{2x-1}{2}+c$;

(11) $\sqrt{4x^2+2x-3}+2\ln|(4x+1)-\sqrt{(4x+1)^2-13}|$
$+c$;

(12) $\frac{3}{2(2t+1)}+\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+c$,

其中 $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$。

13. (1) $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+c$;

(2) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+c$;

(3) $\mathrm{tg}x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3x+c$;

(4) $\ln|\cos x+\sin x|+c$;

(5) $\ln(e^x+e^{-x})+c$;

(6) $(-1)^{n+1}\cos x+2n,\ n\pi<x\leqslant(n+1)\pi$,
$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$;

(7) $\sqrt{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{4}\right|\mathrm{sgn}\left(\cos\frac{x}{2}\right)+c$;

(8) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$;

(9) $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}\\ +\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+c,x\geqslant0,\\ -\frac{1}{3}(x+x^2)^{3/2}+\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}\\ -\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+c,x\leqslant-1;\end{cases}$$

(10) $\frac{2}{3}[(x-1)^{3/2}+(x-2)^{3/2}]+c$;

(11) $\frac{1}{3}[x^3+(x^2-1)^{3/2}]+c$;

(12) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+c$;

(13) $-e^{1/x}+c$; (14) $\operatorname{arctg}(\ln x)+c$;

(15) $\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+c$;

(16) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+c$;

(17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$;

(18) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+c$;

(19) $\ln|1+\operatorname{ctg}x|-\operatorname{ctg}x+c$;

(20) $\ln|\operatorname{tg}x+2+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg}x+1}|+c$;

(21) $\frac{1}{4}\ln\operatorname{ch}2x+c$;

(22) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch}x+c$;

(23) $-x\operatorname{cth}x+\ln|\operatorname{sh}x|+c$;

(24) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x+c$;

(25) $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c$;

(26) $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|+c$;

(27) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$;

(28) $2\sqrt{x+1}[\ln(x+1)-2]+c$;

(29) $x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg}x+c$;

(30) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$;

(31) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+c$;

(32) $-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}+c$;

(33) $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+c$;

(34) $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})+c$;

(35) $a\left[x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\pi(x^2+1)\right]$

$$-\frac{1}{2}(a-b)(\operatorname{arctg}x)^2+c;$$

(36) $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+c$;

(37) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+c$;

(38) $F(x)+c$,

$$\text{其中 } F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}} & x>0,\end{cases}$$

或$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$+c;$

(39) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+c;$

(40) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|$

$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right.$

$\left.\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+c;$

(41) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+c;$

(42) $\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+c;$

(43) $\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+c;$

(44) $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)+c.$

第二节　定积分的概念

1. a) $m\approx\frac{T_1-T_0}{n}\sum_{k=1}^{n}v\left(T_0+K\frac{T_1-T_0}{n}\right);$

b) $m=\int_{T_0}^{T_1}v(t)\mathrm{d}t.$

2. 内接 $20-\frac{4}{n}$，外接$20+\frac{4}{n}$，绝对误差$\frac{4}{n}$.

3. 140 厘米.

4. （1）$e-1;$　　（2）$\frac{1}{2};$　　（3）$1;$

（4）156；　（5）ln2；　（6）2ln2－1。

5. （1）$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$或$\int_1^2 \frac{dx}{x}$；　（2）$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$；

（3）$\int_0^1 x^p dx$；　（4）$\int_0^1 \ln(1+x)dx$；

（5）$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

第三节　定积分的性质及其计算

第四节　定积分的近似计算

1. （1）$\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$；

（3）$\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$；

（4）$\int_3^4 \ln x dx < \int_3^4 (\ln x)^2 dx$；

（5）$\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$；

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$。

2. （1）负；（2）正；　（3）负；　（4）正。

5. （1）$3<I<5$；　（2）$\frac{\pi}{9}<I<\frac{2\pi}{3}$；

（3）$\frac{4\pi}{3}<I<4\pi$；（4）$\ln 2\cdot e^{-100}<I<\ln 2$。

6. （1）0；　（2）0；　（3）0。

9. （1）$2x\sqrt{1+x^4}$；

(2) $-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$;

(3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$;

(4) $e^{-x^2}-\frac{1}{2x^2\sqrt{\ln x}}$.

10. (1) $\frac{dy}{dx}=\mathrm{ctg}\,t$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=-t^2$.

11. 当 $x=0$ 时为极小，$f(0)=0$.

12. 当 $x=1$ 时为极小，$\left(y=-\frac{17}{12}\right)$，

扭转点：$\left(2,\ -\frac{4}{3}\right)$和$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{112}{81}\right)$.

14. (1) 1;　　(2) $\frac{1}{4}$;　　(3) $\frac{\pi^2}{4}$;

(4) 0;　　(5) $\frac{1}{2}$;　　(6) e.

15. (1) 2;　　(2) $e-1$;　　(3) $\frac{\pi}{3}$;

(4) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$;　(5) 1;　　(6) 1;

(7) 1;　(8) 2;　　(9) $|x|$;　　(10) 2;

(11) $F(x)=\begin{cases}-L, & \text{当 } x<-L,\\ x, & \text{当 } |x|\leqslant L,\\ L, & \text{当 } x>L.\end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases}-x-1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x-1, & 0<x\leqslant 1;\end{cases}$

$$\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ \text{不存在}, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

18. (1) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; (2) π; (3) $\frac{1}{5}(2e^{\pi}+1)$;

(4) $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$;

(5) $x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-a\ln(1+\sqrt{2})a$

$-\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{2}a$;

(6) $\frac{1}{2}a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$;

(7) $6-2e$; (8) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

20. (1) $\frac{8}{15}$; (2) $\frac{35}{128}\pi$; (3) $\frac{256}{693}$;

(4) $\frac{8}{35}$ (5) $\frac{5}{16}\pi$; (6) $\frac{3}{16}\pi$;

(7) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; (8) $\frac{1}{16}\pi a^4$.

26. (1) 0; (2) $1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$; (3) 0;

(4) $\frac{3\pi}{2}$;

(5) $\int_{-1}^{1}x^n\sqrt{1-x^2}dx=\begin{cases}0; & n\text{为奇数},\\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\pi, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

27. $\frac{\pi}{4}$.

29. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;

(3) $\frac{\pi}{4}$； (4) $\frac{1}{6}$；

(5) $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$； (6) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$；

(7) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$； (8) π；

(9) 0； (10) $\frac{\pi}{4}$； (11) $\frac{1}{6}$； (12) 0。

30. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$。

33. 3.1416。

34. 0.9573。

第五节 定积分的应用

1. (1) 4.5； (2) πab； (3) $\frac{4}{3}a^3$； (4) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$；

(5) $\ln 2$； (6) $e+e^{-1}-2$； (7) $\frac{16}{3}$；

(8) $3\pi a^2$； (9) $\frac{5}{8}\pi a^2$； (10) $\frac{8}{15}$； (11) $\frac{3}{2}\pi a^2$；

(12) a^2。

2. (1) $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$； (2) $\frac{a}{2}(e^{b/a}-e^{-b/a})$；

(3) $6a$； (4) $a\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right]$；

(5) $\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})]$；

(6) $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$。

4. (1) $\frac{4}{3}\pi abc$； (2) $\frac{16}{3}a^3$。

6. （1）$\frac{\pi^2}{2}$, $2\pi^2$;　　（2）$\frac{8\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$;

（3）$5\pi^2a^3$;　　（4）$2\pi^2a^2b$.

7. （1）2π;　（2）$\pi(e-1)$;　（3）$2\pi\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}\right)$;

（4）$\pi(\ln 2)^2$.

8. （1）$4\pi R^2$;

（2）$2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$,

（3）$\frac{\pi}{4}a^2(e^2-e^{-2}+4)$,

（4）$\frac{12}{5}\pi a^2$;　　（5）$\frac{32}{5}\pi a^2$.

9. （1）$1-3e^{-2}$;　　（2）$\frac{1}{2}$.

10. $\frac{500}{3}$克·厘米.　　11. $6\times10^4\pi$ 吨·米.

12. $708\frac{1}{3}$吨.　　13. $\frac{a^2b}{6}$, 2倍.

14. (m_0-9)克.　　15. 156.25米.

16. （1）≈55.28秒;　　（2）≈107.75秒.

第六节　广　义　积　分

1. （1）发散;（2）发散;

（3）当 $k>1$ 收敛, $k\leqslant$ 发散.

（4）发散;（5）收敛;

（6）当 $k>0$ 时收敛于$\frac{k}{k^2+b^2}$, 当 $k\leqslant0$ 时发散.

（7）收敛于$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$;（8）$\pi$;（9）收敛;

(10) 发散； (11) 发散； (12) 发散；

(13) 发散； (14) 收敛于1。

2. (1) $\frac{1}{3}$； (2) $\frac{1}{a}$； (3) π； (4) $\frac{1}{2}$；

(5) $\frac{1}{2}$； (6) $\ln\frac{1+\sqrt{a^4+1}}{a^2}$； (7) $n!$；

(8) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$； (9) $\frac{\pi}{2}$；

(10) $7\frac{2}{7}$； (11) $\frac{8}{3}$； (12) π； (13) $-\ln 2$；

(14) $\frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}$，当$m$为偶数，

$\frac{(m-1)!!}{m!!}$，当m为奇数；

(15) $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$； (16) $(-1)^n n!$

第四章 可积微分方程

第二节 一阶微分方程

1. (1) $y=\operatorname{tg}\ln|cx|$，$x=0$；

(2) $y=\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)$；

(3) $y=c|x|^{1-a}e^{-\frac{a}{2}x^2}$，$y=0$；

(4) $y=\pm\sqrt{\ln(cx^2)-x^2}$；

(5) $y=\operatorname{arcctg}(\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2x+c})$；

(6) $y=\pm\sqrt{c(x^2-1)-1}$，$x=\pm 1$；

(7) $y=\sqrt[3]{3(x-x^{2})+c}$;　　(8) $y=\dfrac{1}{1-cx}$.

2. (1) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$;　　(2) $y=1$;

(3) $y=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$;

(4) $y=6-\dfrac{35x}{1+6x}$.

3. $xy=6$.　　4. $y^{2}=cx$.

5. $\ln\left|\dfrac{\theta-\theta_{1}}{\theta_{0}-\theta_{1}}\right|=k_{0}\left(t+\dfrac{\alpha}{2}t^{2}\right)$.　　6. $x=a(1-e^{-kt})$.

7. $50\sqrt{29}\approx 269.3$ 厘米／秒.

8. (1) ≈ 0.467 公里／小时；　　(2) 85.2 米.

9. (1) $y=\dfrac{x(2+cx^{3})}{1-cx^{3}}$;　　(2) $y^{2}-x^{2}=cy^{3}$;

(3) $y^{2}=2x^{2}\ln cx$;　　(4) $y+\sqrt{x^{2}+y^{2}}=cx^{2}$;

(5) $y=ce^{y/x}$;　　(6) $y=xe^{cx+1}$;

(7) $y=-x\ln\ln\dfrac{1}{cx}$;　　(8) $y=xe^{cx}$;

(9) $3x+y+2\ln|1-x-y|=c$;

(10) $x^{2}-xy+y^{2}+x-y=c$;

(11) $(x+y-1)^{3}=y-x-3$;

(12) $x^{2}+y^{2}-2xy+4y+10x=c$;

(13) $y(y-2x)^{3}=c(y-x)^{2}$;

(14) $x^{2}+2xy-y^{2}-4x+8y=c$;

(15) $x^{2}-y^{2}=cy^{3}$;

(16) $x-2y+\ln|x+y|=c$.

10. $x^{2}=2cy+c^{2}$ 或 $y+\sqrt{x^{2}+y^{2}}=cx^{2}$.

11. (1) $y=(1+x^2)(x+\mathrm{c})$;

(2) $\dfrac{1}{m+a}e^{mx}+\mathrm{c}e^{-ax}$，当 $m+a\neq 0$;

$e^{-ax}(x+\mathrm{c})$，当 $m+a=0$;

(3) $y=x^2(\mathrm{c}e^{\frac{2}{x}}+1)$;　　(4) $x=\mathrm{c}y^3+\dfrac{1}{2}y^2$;

(5) $x=\mathrm{c}e^{2y}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{4}$;

(6) $x=y\ln y+\dfrac{\mathrm{c}}{y}$;　(7) $x=\mathrm{c}e^{\sin y}-2(1+\sin y)$;

(8) $y=(\mathrm{c}+e^x)(1+x)^n$;

(9) $3\sqrt{y}=\mathrm{c}\sqrt[4]{|x^2-1|}+x^2-1$;

(10) $(1+x^2)(1+y^2)=\mathrm{c}x^2$;

(11) $y=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{c}e^{x^2}+1}}$;　(12) $y=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{c}e^{2x^2}+x^2+\dfrac{1}{2}}}$;

(13) $x=\dfrac{1}{\mathrm{c}e^{-1/2x^2}-y^2+2}$;

(14) $y^2=\mathrm{c}e^{ax}-\dfrac{1}{a}(x+1)-\dfrac{1}{a^2}$.

12. $y=\mathrm{c}x\pm\dfrac{a^2}{2x}$.

13. $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$，$a=\dfrac{k_2}{2m}$，$b=\dfrac{2mk_1}{k_2^2}$.

14. $I=\dfrac{E(R\sin at-aL\cos at)}{R^2+a^2L^2}+\mathrm{c}e^{-\frac{R}{L}t}$.

15. 对数螺线$\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{c}e^{\pm\arctan\frac{y}{x}}$，

16. (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$;　　(2) $y=xe^{1-x}$;

(3) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=\dfrac{\pi}{4}+\ln 2$;

(4) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=1$;

(5) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\left[2+x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right]$;

(6) $y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$;

(7) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$ $(x>0)$;

(8) $y=\sin x-1+2e^{-\sin x}$.

17. (1) $4(x^2+y^2)^3=(2x^3+3xy+c)^2$

(提示：令$u=\sqrt{x^2+y}$)；

(2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a}+c$;

(3) $x^2-y^4=cy^6$ (提示：令 $x=u^2$)；

(4) $y^2=x\ln(cy^2)$ (提示：令 $x=u^2$)；

(5) $4x+8\sin y+9\ln|4x+3-8\sin y|=c$

(提示：令 $z=\sin y$)；

(6) $y=\ln[1+ce^{(-e^x)}]$ (提示：令 $u=e^y$)；

(7) $y=\arcsin(x-1+ce^{-x})$ (提示：令 $u=\sin y$)；

(8) $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=ce^{-x}-x+1$ (提示：令$u=\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$)；

(9) $(x+c)\cos y=\ln x$ (提示：令 $u=\cos y$)；

(10) $x+\operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2}=c$ (提示：$x-y=u$)。

18. (1) $y=\dfrac{1}{x^2}$ 及 $y=\dfrac{4x^2}{c-x^4}+\dfrac{1}{x^2}$;

（2）$y=e^x$ 及 $y=\dfrac{xe^x}{ce^x+1}+e^x$。

第三节　可降阶的二阶微分方程

1. （1）$y=\dfrac{1}{6}x^3-\sin x+c_1x+c_2$；

（2）$y=c_1\dfrac{x^2}{2}+c_2$；

（3）$y=c_1e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x+c_2$；

（4）$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}c_1x^2+c_2$；

（5）$y=(1+c_1^2)\ln|x+c_1|-c_1x+c_2$；

（6）$y=(c_1x-c_1^2)e^{\frac{x}{c_1}+1}+c_2$；

（7）$y=\pm\dfrac{2}{3c_1}\sqrt{(c_1x-1)^3}+c_2$；

（8）$y=\dfrac{c_1}{4}(x+c_2)^2+\dfrac{1}{c_1}$；

（9）$y=c_1(x+c_2)^{2/3}$；

(10) $y=c_1e^{x/a}+c_2e^{-x/a}$；

(11) $y=\dfrac{x+c_1}{x+c_2}$；

(12) $y^2+c_1=(x+c_2)^2$；

(13) $e^y+c_1=(x+c_2)^2$；

(14) $e^y(x+c)^2=2$；

(15) $y=c_1\sqrt{x^2+c_2}$；

(16) $x=c_1y^2+c_2y+c_3$。

2. （1）$y=2+\ln\dfrac{x^2}{4}$；　　（2）$y=\dfrac{4}{(x+4)^2}$；

(3) $y=\sqrt{2x-x^2}$；　　　　(4) $y=-\ln(1-x)$.

(5) $y=\pm(2x-2)^{3/2}\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{15}\right)+1$.

3. $v\approx 11.2$ 千米／秒.

4. 0.00082 秒.

5. (1) 若取向上的方向为 y 轴的正向，则上抛和下落运动方程分别为：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv^2,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+kv^2;$$

(2) $V=\sqrt{\dfrac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$.

第五章　空间解析几何

第一节　空间直角坐标系

3. (1) $(a,b,-c)$；　　(2) $(-a,b,c)$；
   (3) $(a,-b,c)$.
4. (1) $(a,-b,-c)$；　　(2) $(-a,b,-c)$；
   (3) $(-a,-b,c)$；　　(4) $(-a,-b,-c)$.
5. $5\sqrt{2}$，$\sqrt{34}$，$\sqrt{41}$，5.
6. $|AB|=3$，$|BC|=\sqrt{21}$，$|CA|=\sqrt{14}$.
7. $\left(0,0,1\dfrac{5}{9}\right)$.　　　　8. $(0,1,-2)$.
9. $(-3,7,0)$.

第二节　向量代数

2. $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

5．(1,8,5)， (16,0,−23)．

6．14； $\cos\alpha=\frac{2}{7}$， $\cos\beta=-\frac{3}{7}$， $\cos\gamma=\frac{6}{7}$．

7．$\boldsymbol{a}^{\circ}=\left(-\frac{3}{13},\ \frac{4}{13},\ -\frac{12}{13}\right)$．

8．$(1,-1,\pm\sqrt{2})$．　　9．$\alpha=4$，$\beta=-1$．

10．（1）−6；　（2）−61．

11．（1）38；　（2）7；　（3）−184；　（4）9．

12．$\cos\theta=\frac{5}{21}$．　　13．6．

16．（1）24；　（2）60．

17．（1）3；　（2）300．

18．（1）(5,1,7)；　（2）(20,4,28)．

19．$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{\lambda^2\boldsymbol{a}^2+\mu^2\boldsymbol{b}^2+\gamma^2\boldsymbol{c}^2}$．

20．14．　　21．3．

22．（1）共面；（2）不共面．

23．四点共面．　　24．共线．

25．$-\frac{3}{2}$．　　29．$\frac{\pi}{3}$．　　30．$V=25$．

31．$V=0$．　　32．$M(3\sqrt{2},\ 3,\ -3)$．

33．$\overrightarrow{CA}=(-7,1,-7)$，$\angle A\approx 25°56'49''$．

35．$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．

第三节　平面与直线

2．$2x-y-z-6=0$．　　3．$x-y-z=0$．

4. $x+y+z-2=0$.　　5. $x+2y+2z-2=0$.

6. (1) $3x+3y+z-8=0$.

(2) $3x+2y+6z-12=0$.

(3) $x-3y-2z=0$.

7. (1) 平行; (2) 相交; (3) 重合;

(4) 垂直; (5) 垂直; (6) 相交.

8. $x+2z-5=0$.　　9. $x+5=0$.

10. $x-z-1=0$.

11. (1) $\pi/3$;　(2) $82°20'$;　(3) $40°22'$.

12. (1) 1;　(2) 0;　(3) 3.

13. (1) 3;　(2) 6.5.

14. (1) 同侧; (2) 异侧.

15. $x+y-2z+1=0$.

16. $x-2y-z+4=0$ 及 $x+z-6=0$.

17. $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ \frac{3-\sqrt{3}}{6},\ \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

18. $M_1(0,7,0)$ 和 $M_2(0,-5,0)$.

19. $M_1\left(0,\frac{73}{12},0\right)$ 和 $M_2\left(0,-\frac{73}{282},0\right)$.

20. (1) $2x-6y+2z-7=0$;

(2) $6x+3y+2z+7=0$ 及 $6x+3y+2z-7=0$;

(3) $6x+3y+2z-20=0$;

(4) $35y+12z=0$ 及 $3y-4z=0$.

21. (1) $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$;

(2) $x+3y=0$ 及 $3x-y=0$.

22. $d=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

23. $\left(\frac{19}{11},-\frac{31}{11},\frac{41}{11}\right)$, $r=3$.

24. （1）$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+8}{5}$；

（2）$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$；

（3）$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$；

（4）$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$；

（5）$\begin{cases}\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}\\ z=4\end{cases}$.

25. （1）$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$；

（2）$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{3}$.

26. $\frac{x+1}{-12}=\frac{y+4}{-46}=\frac{z-3}{1}$.

27. $x=t+1$，$y=-7t$，$z=-19t-2$.

28. （1）$(2,-3,6)$；（2）直线躺在平面内；

（3）$(0,0,-2)$；（4）直线与平面平行.

29. （1）$\varphi=79°1'$；（2）$\varphi=68°58'$；

（3）$\varphi=\frac{\pi}{2}$；（4）$\frac{2\pi}{3}$.

30. （1）$d=\sqrt{5}$；（2）$d=25$；(3) $d=\frac{20}{13}$.

31. （1）交点 $(1,0,-1)$；（2）交点$(-2,-1,5)$.

32. （1）$\varphi=\arcsin\frac{3}{133}$；（2）$\varphi=0$；（3）$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

33. （1）$P=\sqrt{3}$；（2）$P=\frac{\sqrt{6}}{2}$；（3）$P=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

34. （1）$P=7$；（2）$P=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$，（3）$P=1$.

35. $x+2y+3z=0$.　　36. $2x+15y+7z+7=0$.

37. $x-8y+5z+5=0$.

38. $x+20y+7z-12=0$ 和 $x-z+4=0$.

39. $9x+11y+5z-16=0$.

40. $13x-14y+11z+51=0$.

41. $x+4y-z+1=0$，$13x-16y-51z+31=0$.

42. $\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$.　　43. $(-5,2,4)$.

44. $(-12,-4,18)$.　　45. $(0,3,1)$.

46. $\lambda=2$，交点 $(3,1,0)$，$x-y-z=2$.

47. $3x-4y-5=0$ 和 $387x-164y-24z-421=0$.

48. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$.

49. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-5}{22}=\dfrac{z+9}{2}$.

50. $\begin{cases}x+y+z=0\\ y-z-1=0.\end{cases}$

51. $x=3-t$，$y=-1+2t$，$z=0$；
$y=-1+2t$，$z=5+8t$，$x=0$；
$x=3-t$，$z=5+8t$，$y=0$.

52. $15x-3y-26z-6=0$.

53. $2x+y+2z\pm2\sqrt[3]{3}=0$.

54. $\begin{cases}3x-14y-5z+16=0,\\ 5x-5y+17z-17=0.\end{cases}$

55. $\begin{cases}4x+3y-2z=0,\\ x-6y-7z=0.\end{cases}$

56. $x+2y+1=0$.

57. $\dfrac{x+1}{48}=\dfrac{y}{37}=\dfrac{z-4}{4}$.

第四节 常见曲面

2. （1）在坐标面 Oxy 上表示直线，
在空间表示垂直于 x 轴的平面；
（2）在坐标面 Oxy 上表示直线，
在空间表示平面；
（3）在坐标面 Oxy 上表示圆，
在空间表示平行于 z 轴的圆柱面；
（4）在坐标面 Oxy 上表示双曲线，
在空间表示平行于 z 轴的双曲柱面；
（5）在坐标面 Oxy 上表示抛物线，
在空间表示平行于 z 轴的抛物柱面；
（6）在坐标面 Oxy 上表示一点，
在空间表示平行于 z 轴的一条直线；
（7）在坐标面 Oxy 上表示两点，$\left(\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{5},\ 2\right)$，
在空间表示分别通过这两点且平行于 z 轴的两条直线；
（8）在坐标面 Oxy 上表示两点 $(4,\pm3\sqrt{3})$，
在空间表示分别通过这两点且平行于 z 轴的两条直线。

3. （1）$x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$，旋转单叶双曲面；
（2）$\sqrt{y^2+z^2}=\sin x$，
（3）$4x^2+9y^2+9z^2=36$，旋转椭球面；

（4）$y^2+z^2=5x$，旋转抛物面；

（5）$x^2+y^2+z^2=9$，球面；

（6）$k^2x^2-y^2-z^2=0$，锥面。

7．$x^2+y^2=-8z+16$，旋转抛物面。

8．$3x^2+4y^2+4z^2=12$，旋转椭球面。

9．$5x^2-3y^2=1$，双曲柱面，

10．$x^2+y^2+(z+3)^2=25$。

11．$x^2+20y^2-24x-116=0$，椭圆柱面。

第五节　空间的坐标变换

1．$A(-5,0,2)$，$B(0,-7,-4)$，$C(4,3,-2)$。

2．（1）$3x'-5y'+6z'+10=0$；

（2）$\dfrac{x'}{3}=\dfrac{y'}{4}=\dfrac{z'}{2}$；

（3）$x'^2+y'^2+z'^2-25=0$；

（4）$x'^2+y'^2+z'^2+x'y'+y'z'+z'x'-6=0$。

3．$A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$B(1,1,0)$；

$$(5+\sqrt{2})x'+(5-\sqrt{2})y'+\sqrt{2}z'+2=0.$$

4．$2x'^2-4z'^2+4x'+\sqrt{2}y'-\sqrt{2}z'-16=0$。

5．（1）$24x''^2+4y''^2+4z''^2=1$，椭球面；

（2）$2(\sqrt{5}+2)x''^2-(\sqrt{5}-2)y''^2+2z''^2=-1$，

双叶双曲面；

（3）$x''^2+y''^2-z''^2=1$，单叶双曲面。

第六章　多变量函数的微分学

第一节　多变量函数的极限与连续

1. 0，$\dfrac{2}{2+\pi}$，$\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi^2}{4}$.

2. 1，$f(x,y)$，$f(x,y)$，$\dfrac{2ts}{t^2+s^2}$.

3. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

4. $f(x,y)=\dfrac{(1-y)x^2}{1+y}$.

5. （1）$|x|\leqslant 1,\ |y|\geqslant 1$；
（2）$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,\quad (k=0,1,2\cdots)$；
（3）$x\leqslant x^2+y^2<2x$；
（4）$z^2\leqslant x^2+y^2$；
（5）$x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$；
（6）$x^2+y^2+z^2<1$.

7. $F(t)=\operatorname{tg}2t$.

8. $$F(t)=\begin{cases}1, & 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & (2k-1)\pi+\dfrac{\pi}{4}<t<2k\pi+\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$
$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

9. $z=r^2+\operatorname{tg}\theta$.

10. $(x+y)^{x-y}$，x^y+x-y，$x+y-x^y$.

13. （1）0，1；（2）$\dfrac{1}{2}$，1；
（3）0，1；（4）0，1.

14. （1） 0； （2） a； （3） 0； （4） e；
（5） 0； （6） 0； （7） 0； （8） ln2；
（9） 2； （10） 不存在； （11） 不存在；
（12） 不存在。

15. （1） $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$；

（2） $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$。

16. （1） 原点（0，0）； （2） $x=y$；
（3） $y^2=2x$； （4） 所有具整数坐标的点；
（5） 原点（0，0）； （6） $x\neq0$，$y=0$ 的点上。

17. （1） 全平面上点点连续。
（2） 当 $x+y\neq0$，连续； 当 $x+y=0$，间断。

第二节 多变量函数的微商与微分

1. （1） $\frac{2}{5}$； （2） $\frac{1}{2}$； （3） $\frac{1}{3}$； （4） -2π。

2. （1） $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^y}{y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^y\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y^3}\right)$；

（2） $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$；

（3） $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}\ln3$；

（4） $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{w}{v^2+w^2}$，$\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{v}{v^2+w^2}$；

（5） $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)；$$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{x}{y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$;

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

(8) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\ln y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$;

(9) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\dfrac{xy}{x+y}$;

(10) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$;

(11) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

(12) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=y+x$;

(13) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(14) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^{z}x^{y^{z}-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^{z}}\ln x$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=y^{z}x^{y^{z}}\ln x\ln y$;

(15) $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=e^{t\varphi}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\rho\varphi e^{t\varphi}+1$,

$\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=\rho t e^{t\varphi}-e^{-\varphi}$;

(16) $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=e^{-t}+\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial t}=-xe^{-t}+1$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{1}{y}$.

3. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,1)}=-\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^{2}}}$;

$z'_{y}(x,1)=-\dfrac{x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^{2}}}$.

4. $f'_{x}(1,y)=\dfrac{y^{2}+2y}{\sqrt{1+(y^{2}+y)^{2}}}$;

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,y)}=\dfrac{1+2y}{\sqrt{1+(y^{2}+y)^{2}}}$.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2\sin x^{2}y}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\sin x^{2}y}{y}$.

6. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{z=b\\ t=a}}=\dfrac{3b}{z}\sqrt{\dfrac{ab}{b^{2}-a^{2}}}$;

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{z=b\\ t=a}}=-\dfrac{3a}{z}\sqrt{\dfrac{ab}{b^{2}-a^{2}}}$.

7. $\dfrac{\pi}{4}$. 　　8. 3 .

9. $\dfrac{\pi}{6}$. 　　10. $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{7}$, $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{7}\right)$.

11. (1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\sin xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos xy-xy\sin xy$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\sin xy$;

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$;

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4y}{(x+y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4x}{(x+y)^3}$;

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^3+(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$;

(5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

(6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$;

(7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}\,e^{\ln x\ln y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\ln x\ln y+1}{xy}\,e^{\ln x\ln y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}\,e^{\ln x\ln y}$;

(8) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$.

12. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$.

13. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(x^2y^2z^2+3xyz+1)e^{xyz}$.

19. (1) $\dfrac{2}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$;

(2) $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$;

(3) $\dfrac{2}{(s-t)^2}(s\mathrm{d}t-t\mathrm{d}s)$;

(4) $\dfrac{1}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$;

(5) $(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)\cos(xy)$;

(6) $x^{yz-1}(yz\mathrm{d}x+zx\ln x\mathrm{d}y+xy\ln x\mathrm{d}z)$;

(7) $(y+z)\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}y+(y+x)\mathrm{d}z$;

(8) $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}[-2xz\mathrm{d}x-2yz\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z]$.

20. $\Delta z\approx -0.20404$, $\quad dz=-0.2$.

21. $\Delta z=22.75$, $\quad dz=22.4$, $\quad$ 相对误差 $=1.5\%$.

22. $\Delta z=0.0714$, $\quad dz=0.075$.

23. $dz=0.25e$. $\qquad$ 24. $dz=0.04$.

25. (1) 2.95; (2) 0.0117; (3) 0.005;
(4) 108.908; (5) 1.08; (6) 1.054.

26. (1) $(1+x)^n(1+y)^m\approx 1+nx+my$;

(2) $\ln\dfrac{1+x}{1+y}\approx x-y$.

27. 0.006. $\qquad$ 28. -5 厘米.

29. 14.8 立方米. $\qquad$ 30. -0.167 米.

第三节 复合函数的微分法

1. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=3r^2\sin s\cos s(\cos s-\sin s)$;

$$\frac{\partial u}{\partial s}=-2r^3\sin s\cos s(\sin s+\cos s)+r^3(\sin^3 s+\cos^3 s).$$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{2s}{1+(1+s^2-t^2)^2}$; $\quad\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{-2t}{1+(1+s^2-t^2)^2}$.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial r}=e^{r^{s+2}}r^{s+1}(s+2)$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}=e^{r^{s+2}}r^{s+2}\ln r$.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{2u}{v^2}\ln(3u-2v)+\dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}.$$

5. $\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

6. $\dfrac{2\left(e^{2t}+t+\dfrac{1}{t}\ln t\right)}{e^{2t}+t^2+\ln^2 t}$.

7. $\dfrac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}-x}$.　　　　8. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

9. $e^{2x}\sin x$.

10. $\dfrac{\partial n}{\partial x}=\dfrac{1+y\cos xy}{\sqrt{1-(x+y+\sin xy)^2}}$;

$$\frac{\partial n}{\partial y}=\frac{1+x\cos xy}{\sqrt{1-(x+y+\sin xy)^2}}.$$

11. $\dfrac{\partial n}{\partial \varphi}=2(\varphi+\theta\,\mathrm{tg}(\varphi\theta)\sec^2(\varphi\theta))$;

$$\frac{\partial n}{\partial \theta}=2(\theta+\varphi\,\mathrm{tg}(\varphi\theta)\sec^2(\varphi\theta)).$$

12. $3t^2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+4t\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$.

13. $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos t-\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin t-\dfrac{\partial f}{\partial z}e^t$.

14. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2xf'_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_1+2yf'_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=f'_1+2zf'_2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''_{11}+4zf''_{12}+4z^2f''_{22}+2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{11}+2(x+y)f''_{12}+4xyf''_{22}.$$

15. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}f'_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f'_1+\dfrac{1}{z}f'_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}f'_2$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^3}f''_{11}+\frac{1}{yz}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_1.$$

16. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_2+xe^{xy}f'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf''_{11}+2e^{xy}(x^2-y^2)f''_{12}+xye^{2xy}f''_{22}$$

$$+e^{xy}(1+xy)f'_2.$$

17. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+y^2f''_{22}+2y^2zf''_{23}$$

$$+y^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'_2+zf'_3+xf''_{12}+xzf''_{13}+xyf''_{22}+2xyzf''_{23}$$

$$+xyz^2f''_{33}.$$

33. $u=1+x^2y+y^2-2x^4$.

34. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$.

35. $u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x$, $u''_{xy}(x,2x)=\dfrac{5}{3}x$.

36. (1) $u=x\varphi(y)+\psi(y)$; (2) $u=\varphi(x)+\psi(y)$

(3) $u=y\varphi(x)+\psi(x)$.

37. (1) $du=f'(t)(dx+dy)$;

(2) $du=f'(t)(yzdx+zxdy+xydz)$;

(3) $du=2f'(t)(xdx+ydy+zdz)$;

(4) $du=af'_1dx+bf'_2dy$;

(5) $du=f'_1\cdot(ydx+xdy)+f'_2\cdot\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$,

(6) $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)dt$;

(7) $du=f'_1\cdot(dx+dy+dz)+2f'_2\cdot(xdx+ydy+zdz)$;

(8) $du=2f'_1\cdot(xdx+ydy)+2f'_2\cdot(xdx-ydy)+2f'_3\cdot(ydx+xdy)$.

第四节　隐函数的微分法

1. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^{xy}-ye^{x}-e^{y}}{xe^{y}-e^{x}-xe^{xy}}$;

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}$;

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$;

(4) $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

2. (1) $y'=-\dfrac{x+y}{x-y}$,　$y''=\dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$;

(2) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$,　$y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$;

(3) $y'=\dfrac{y^2}{1-xy}$,　$y''=\dfrac{y^3(3-2xy)}{(1-xy)^3}$;

(4) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}\cdot\dfrac{\ln x-1}{\ln y-1}$,

$$y''=\frac{y^2[x(\ln y-1)^2+2(x-y)(\ln x-1)(\ln y-1)-y(\ln x-1)^2]}{x^4(\ln y-1)^3}.$$

3. (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{e^z-xy}$,　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{e^z-xy}$,

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{x}{y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z(z^2-2z+2)}{x^2(z-1)^3};$$

（2） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2}{2y-3xz},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{2y-3xz},$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{1}{z},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2z^3(5y-6xz)}{(2y-3xz)^3};$$

（3） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ayz-x^2}{z^2-axy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{axz-y^2}{z^2-axy},$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{axz-y^2}{x^2-ayz},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy^3z(1-a^3)}{(z^2-axy)^3};$$

（4） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)},\quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{z}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z^2}{(x+z)^3}.$$

10. $\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{\sin 2z}(\sin 2x\,\mathrm{d}x+\sin 2y\,\mathrm{d}y)$.

11. $\mathrm{d}z=-\dfrac{(1-yz)\mathrm{d}x+(1-xz)\mathrm{d}y}{1-xy}$.

12. $\mathrm{d}u=-\dfrac{u^2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-z^2\mathrm{d}z}{u[2(x+y)-u]}$.

13. 0.49875.

14. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1'+2zF_2')^3}[(F_2')^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_1')^2F_{22}'']-\frac{2(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')F_2''}{(F_1'+2zF_2')^2}.$$

15. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$.

16. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(xF_1'+yF_2')^{-3}[y^2z^2(F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''$

$$+F_1^2F_{22}'') - 2z(xF_1 + yF_2)F_1'^2].$$

17. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{(6z+1)x}{(6z+2)y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{3z+1}$.

18. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{D(F,G)}{D(z,x)} \Big/ \frac{D(F,G)}{D(y,z)}$,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{D(F,G)}{D(x,y)} \Big/ \frac{D(F,G)}{D(y,z)}.$$

19. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{y-z}{x-y}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{z-x}{x-y}$.

20. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v-x}{u-v}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-u}{u-v}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v-y}{u-v}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-u}{u-v}.$$

21. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}, \quad (x^2+y^2>0).$$

22. $\mathrm{d}u = \frac{(\sin v + x\cos v)\mathrm{d}x - (\sin u - x\cos v)\mathrm{d}y}{x\cos v + y\cos u}$,

$$\mathrm{d}v = \frac{-(\sin v - y\cos u)\mathrm{d}x + (\sin u + y\cos u)\mathrm{d}y}{x\cos v + y\cos u}.$$

23. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right)$.

24. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v} \Big/ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial u} \Big/ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial v} \Big/ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u} \Big/ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

25. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$, $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{4x-2y}{x-2y} + \frac{6x}{(x-2y)^3}$.

26. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{df}{du}\left(\dfrac{\partial g}{\partial t}-\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{df}{du}}$，其中 $u=x+t$。

28. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial y}$

$\cdot\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}\Big/\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$。

第五节 多变量函数的泰勒公式与极值

1. $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$。
2. $\Delta f=15h^2-6hk+k^2+h^3$。
3. $\Delta f=h-3k+(-h^2-2hk+k^2)+(h^2k+hk^2)$。
4. $f(x,y)=y+\dfrac{1}{2!}(2xy-y^2)+\dfrac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$

$+R_3$。

5. $f(x,y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-\dfrac{1}{4}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)+\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2$。

其中 $R_2=-\dfrac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\right.\right.$

$\left.\dfrac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$

$\left.+\sin\xi\cos\eta\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)^3\right]$。

6. $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2$。
8. $z=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)$

$-3(y-1)^2+R_2$。

9. $e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+y^2+2xy)+\cdots+$

$$+\frac{1}{n!}[x^n+C_n^1x^{n-1}y+\cdots+y^n]+R_n,$$

其中 $R_n=\frac{e^{\theta(x+y)}}{(n+1)!}[x^{n+1}+C_{n+1}^1x^ny+\cdots+y^{n+1}]$，$0<\theta<1$。

10. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x^2+y^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2n+2}$。

11. $1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2))^2+R_3$。

12. $1+(x+y)+\cdots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+R_n$。

13. （1）极大 $f(2,-2)=8$；（2）极小 $f(-1,1)=0$；

（3）无极值；（4）极小 $f(5,2)=30$；

（5）极大 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$，极小 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$；

（6）极小 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$；

（7）极大 $f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$；（8）无极值。

14. 极大 $z(1,-1)=6$，极小 $z(1,-1)=-2$。

15. 极大 $z\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{8}{7}$，极小 $z(-2,0)=1$

16. （1）极大 $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$；

（2）极小 $u\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$；

（3）极小 $z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$，

极大 $z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$；

（4）极小 $u(3,3,3)=9$；

（5）极大 $u\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{8}$；

（6）极大 $u(\sqrt{3}a,\sqrt{3}a,\sqrt{3}a)=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$，

极小 $u(-\sqrt{3}a,-\sqrt{3}a,-\sqrt{3}a)=-\dfrac{\sqrt{3}}{a}$；

（7）有二个变量都等于2，第三个等于1时有极小值4；

有二个变量都等于$\dfrac{4}{3}$，第三个等于$\dfrac{7}{3}$时有极大值

$\dfrac{112}{27}$；

（8）有二个变量都等于$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，第三个等于$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$时，

有极小值$-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$；

有二个变量都等于$-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$第三个等于$\dfrac{2}{\sqrt{6}}$时，有

极大值$\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$。

17．$\left(\dfrac{21}{13},\ 2,\dfrac{63}{26}\right)$．　　18．$\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$

20．两直角边都是$\dfrac{l}{\sqrt{2}}$．

21. a^3.　　　　22. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

23. 当 n 个正数各等于 $\frac{a}{n}$ 时，乘积最大.

24. $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, $\min A = ab$.

25. $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$.

26. $H = 2R = 2\sqrt{\frac{s}{3\pi}}$.

第六节　空间曲线与曲面

1. $x + y - 2 = 0$, $y = x$.

2. $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$.

3. $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin\boldsymbol{j} + 2bt\boldsymbol{k}$,

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j} + 2b\boldsymbol{k}$$

4. $\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}$,

$2x - 8y + 16z = 1$.

5. $\frac{x - 1}{16} = \frac{y - 1}{9} = \frac{z - 1}{-1}$,

$16x + 9y - z = 24$.

6. $\frac{\sqrt{2}x - a}{-a} = \frac{\sqrt{2}y - a}{a} = \frac{4z - b\pi}{4b}$,

$2\sqrt{2}a(x - y) - b(4z - b\pi) = 0$.

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

(8) $\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{m-k}{(m+1)(k+1)}$.

第二节　三重积分

1. (1) $-\frac{9}{8}$;　　(2) $\frac{1}{364}$;

(3) $\frac{19}{18}$;　　(4) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$;

(5) $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$;　　(6) 0;

(7) 0;　　(8) $\frac{1}{8}a^4$.

2. (1) $\frac{16\pi}{3}$　　(2) $\frac{\pi}{6}$;

(3) 0;　　(4) $\frac{1}{48}$;

(5) $\frac{13}{4}\pi$;　　(6) $\frac{\pi}{10}$;

(7) $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$;　　(8) $\frac{\pi^2}{4}abc$;

(9) $\frac{\pi}{3}$;　　(10) $\frac{7}{216}$.

3. (1) $\frac{8}{9}a^2$;　　(2) $\frac{4}{15}\pi R^5$;

(3) $\frac{\pi}{8}$;　　(4) $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

4. (1) 12;　　(2) 3π;

(3) πa^3;

(4) $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$；

(5) $\frac{3}{35}$； (6) $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})\pi abc$；

(7) $\frac{5}{12}\pi abc(3-\sqrt{5})$； (8) $\frac{88}{105}$；

(9) $\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)R^3$； (10) $4\frac{1}{2}$；

(11) $8\frac{1}{6}$； (12) $\frac{3\pi}{2}$；

(13) $\frac{2}{3}abc$； (14) $16\frac{1}{5}$.

5. $\bar{f}=\frac{6}{5}$. 6. $\bar{f}=3(e-2)$.

7. $F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$.

9. (1) $\frac{1}{3}\pi a^3$； (2) $\frac{8}{5}\pi abc$；

(3) $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3$； (4) $\frac{1}{2}$；

(5) $\frac{\pi^2}{4}abc$； (6) $2\pi abc$.

10. $\frac{8}{|\Delta|}h_1h_2h_3$，其中$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$

第三节 重积分的应用

1. (1) $\sqrt{2}\pi$； (2) $2a^2$；

(3) $\dfrac{\pi}{6}\left[(1+R^2)^{3/2}-1\right]$;

(4) $4\pi R\left(R-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)$;

(5) $8a^2$;

(6) $\dfrac{2}{3}\pi ab\left[(1+c^2)^{3/2}-1\right]$;

(7) $\dfrac{16}{3}\pi a^2$; (8) $\dfrac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

(9) 8π; (10) $\dfrac{\pi a^2}{2}$.

2. $\pi\left[a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right]$.

3. $a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$; $4\pi^2ab$.

4. $\dfrac{\pi^2a^2}{2}$.

5. $V=\dfrac{4}{9}a^2h$, $S=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+2ah+\dfrac{\pi}{4}a^2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{a^2}}$.

6. $\dfrac{\pi}{2}ab$. 7. $2\pi r(R-r)$.

8. 取圆盘中心为坐标原点，x 轴正向通过小圆中心，则

$$x_c=\frac{-6a}{5(3\pi-2)},\quad y_c=0.$$

9. $b=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

10. $2h\pi(R^2-r^2)$.

11. $x_c=y_c=0$, $z_c=\dfrac{3}{4}c$.

12. $x_C = y_C = 0$, $z_C = \frac{4}{5}a$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 14. $\frac{4}{9}MR^2$.

15. (1) $\frac{1}{12}ml^2$, $\frac{1}{3}ml^2$;

(2) $\frac{1}{2}mR^2$, $\frac{1}{4}mR^2$;

(3) $\frac{2}{5}mR^2$, $\frac{7}{5}mR^2$.

17. 取圆心为坐标原点，细棒在 z 轴正方向上，则

$F_x = F_y = 0$;

$F_z = -2\pi k\rho\mu[l + \sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{R^2 + (a+l)^2}]$.

18. 取锥体顶点为坐标原点，z 轴正向为锥体轴线，则

$F_x = F_y = 0$, $F_z = k\pi\rho R\sin^2\alpha$.

第四节 第一型曲线积分与曲面积分

1. (1) $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$; (2) 5;

(3) $a\ln(1 + \sqrt{2}) = a\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$;

(4) $4a$; (5) $\pi\sqrt{2}$

2. (1) $\frac{256}{15}a^3$; (2) $1 + \sqrt{2}$;

(3) $\sqrt{5}\ln 2$; (4) $4\pi a\sqrt{a}$;

(5) $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4}ae^a$; (6) $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$.

(7) $\frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$;　　(8) $2\sqrt{2}\pi^2+\frac{3}{2}$;

(9) $\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{3/2}-2^{3/2}]$;

(10) $\frac{2\sqrt{2}a^4}{3}$;

(11) $2\pi a^{2n+1}$;　　(12) $\frac{2\pi a^3}{3}$.

3. $\sqrt{3}(1-e^{-1})$.

4. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$,

$I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

5. $F_x=0$,　　$F_y=\frac{2k\rho m}{a}$.

6. (1) $\frac{8}{3}\pi R^4$;　　(2) πa^3;

(3) 9;　　(4) $\frac{\sqrt{3}}{120}$;

(5) $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$;

(6) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$;

(7) $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$;　　(8) $6\sqrt{61}$;

(9) $2\pi\,\mathrm{arctg}\frac{H}{R}$;　　(10) $\sqrt{2}\pi$.

7. $\frac{2}{15}(1+6\sqrt{3})\pi$.　　8. 重心$G\left(0, 0, \frac{4}{3\pi}R\right)$.

9. 当质点在球壳内部，引力等于零；

当质点在球壳外部，则引力象把球壳质量集中于球心时一样。

10. $F_x = F_y = 0$，　　$F_z = k\rho m\pi\ln\dfrac{b}{a}$.

11. $\dfrac{8}{3}\pi\rho R^4$.

第八章　场　论

第一节　数量场的方向微商与梯度

1. $-\dfrac{3}{\sqrt{11}}$　　2. $\sqrt{3}+5$ 及 $-\sqrt{3}-5$.

3. $\dfrac{1}{2}$.

4. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = 2\sqrt{14}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,-1)} = 3\sqrt{2}$.

5. $\text{grad}u|_{(1,1,-1)} = 6i+3j-12k$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = 3\sqrt{21}$.

6. $\text{grad}u|_{(1,1)} = (1,1)$,　$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1)} = \cos\alpha+\cos\beta$,

沿方向 $L=\pm(1,1)$ 分别达到最大（小）值 $\pm\sqrt{2}$，沿方向 $L=\pm(1,-1)$ 等于 0 .

7. （1）$-\dfrac{2}{r^4}r$；　　（2）$\dfrac{1}{r^2}r$.

8. $\text{grad}\varphi|_{(1,2,4)} = \left(-\dfrac{1}{21}, -\dfrac{2}{21}, -\dfrac{4}{21}\right)$,

$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial L}\right|_{(1,2,4)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

9. 球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$上的所有点。

12. $\dfrac{\partial u}{\partial L}=\dfrac{\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v}{|\mathrm{grad}v|}$，当$\mathrm{grad}u\perp\mathrm{grad}v$时$\dfrac{\partial u}{\partial L}=0$。

第二节 向量场的通量与散度

1. （1）$\frac{1}{12}$；（2）$\frac{1}{12}$；（3）$\frac{1}{12}$；（4）$\frac{1}{4}$。

2. （1）0；（2）0；（3）$\frac{4}{3}\pi abc$；（4）0。

3. $\frac{2}{105}\pi R^7$。　4. $\frac{1}{3}R^4h^2$。　5. 0。

6. $abc\left[\dfrac{f(a)-f(0)}{a}+\dfrac{g(b)-g(0)}{b}+\dfrac{h(c)-h(0)}{c}\right]$。

7. $\frac{1}{3}abc(a^2+3)$。　8. $\frac{2}{5}\pi a^5$。

9 （1）6；（2）1；（3）8；

（4）$2x\sin y+2y\sin(xz)-xy\sin z\cos(\cos z)$。

10. （1）$\boldsymbol{\omega}^2=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$；（2）$4\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}$；

（3）$\frac{2}{r}$；（4）0；

（5）$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}$；（6）$3f(r)+f'(r)r$。

11. （1）$2xy^2(3y^2z^2+6x^2z^2+x^2y^2)$；

（2）$e^{x+y+z}(3xyz+2xy+2zx+2yz)$。

12. （1）$\frac{12}{5}\pi R^5$；（2）$\frac{1}{8}$；

（3）$4\pi abc$；（4）$\frac{\pi}{2}$；

（5）$\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$；（6）$\frac{1}{2}$；

（7）$\frac{\pi}{15}$；（8）$\frac{\pi}{2}a^4$。

13. (1) $-4\pi km$; (2) 0; (3) $-2\pi km$.

14. $4\pi a$.

15. (1) $4\pi\varphi(1)$; (2) $\varphi(r)\equiv 1$.

16. $\dfrac{4\pi}{abc}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.

17. π. 18. $\dfrac{4}{5}\pi R^5$.

19. πab.

第三节 向量场的环量与旋度

1. $-\dfrac{14}{15}$. 2. $\dfrac{1}{2}k(a^2-b^2)$.

3. 3. 4. $\dfrac{4}{3}$.

5. 0. 6. $\dfrac{1}{35}$.

7. 0. 8. 1.

9. $e(\sqrt{e}-1)$. 10. (1) $-2\sqrt{2}\pi$; (2) $-\pi$.

11. (1) -12; (2) 0; (3) $\dfrac{1}{2}\pi R^4$; (4) 0;

(5) $\dfrac{4}{15}$; (6) $\dfrac{2}{3}$; (7) $\dfrac{\pi m a^2}{8}$;

(8) $mS+[f(y_2)-f(y_1)]+m(y_1-y_2)$.

12. (1) $-\dfrac{3}{2}$; (2) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^2$; (3) $-2\pi a(a+h)$;

(4) $-\dfrac{9a^2}{2}$; (5) 0; (6) $\sqrt{3}\pi a^2$.

13. $-\dfrac{\pi R^4}{8}$.

14. (1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=-2(z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k})$;

（2） $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=x(z-y)\boldsymbol{i}+y(x-z)\boldsymbol{j}+z(y-x)\boldsymbol{k}$；

（3） $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$；

（4） $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=2ze^{y}\boldsymbol{j}-(1+xe^{y})\boldsymbol{k}$。

15. 最大涡量 $=2\sqrt{3}$；

绕方向（1，1，0）的涡量 $=-2\sqrt{2}$。

16. 最大涡量 $=\sqrt{2}$；

绕方向（1，0，1）的涡量 $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

17. 最大涡量 $=\sqrt{3}$；最小涡量 $=-\sqrt{3}$。

18. （1）$2\boldsymbol{\omega}$；（2）0；（3）$\dfrac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})$；

（4）0。

20. $-4\pi a^2$。　　21. $\sqrt{3}\pi R^2$。

22. 当闭曲线不围绕原点时，$\Gamma=0$；

当沿围绕原点的闭曲线反时针方向时，$\Gamma=4\pi I$；当原点在光滑闭曲线上，$\Gamma=2\pi I$。

23. （1）$\dfrac{3\pi}{8}a^2$；　　（2）$3\pi a^2$。

24. （1）0；　　（2）$2\pi Rr^n$。

第四节　保守场与无源场

1. （1）$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\neq0$，曲线积分与路径有关，

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad 0,\quad -1.$$

（2）$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=0$，曲线积分与路径无关，都等于1。

2. （1）$\varphi=x^2\cos y+y^2\cos x$；

（2）$\varphi=x^2yz+y^2zx+z^2xy$；

（3）$\varphi=\dfrac{1}{r}$；

(4) $\varphi=\dfrac{1}{4}r^4$;

(5) $\varphi=x^2yz^2+\sin yz$.

3. (1) $-4a^2$; (2) $\dfrac{h^3}{3}$.

4. $a=1$, $\varphi=\dfrac{1}{3}x^3+5xy+3xyz-2y-2z^2$.

5. $f(y,z)=yz+c$, $\varphi=xyz+c$.

6. $\varphi=\int_{r_0}^{r}f(r)dr$, r_0可以任意取定。

7. $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{m_i}{r_i}$, $r_i=|\boldsymbol{r}_i|$, $\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{M_iM}$, M是空间中异于M_i的任意点。

8. (1) 8; (2) 9; (3) -49; (4) 2.

9. (1) $u=x^3+3x^2y^2-y^4+c$;

(2) $u=\dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+c$.

11. $\dfrac{3}{2}$.

13. 当 $f(r)=\dfrac{c}{r^3}$时 $(r\neq0)$, $\boldsymbol{F}$是无源场, c是任意常数。

14. $\left(\dfrac{1}{2}z^2-zx\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}z^2-xy-yz\right)\boldsymbol{j}$

15. $a=2$, $b=-1$, $c=-2$,

$(-yz+xy^2z)\boldsymbol{i}-(xz^2+x^2z)\boldsymbol{j}$

第五节 哈密顿算符及运算公式

1. (1) $f(r)\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$;

(2) 0;

(3) $(2f(r)+rf'(r))\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})f'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

第六节 外微分形式

1. (1) $7z^2dy\wedge dz - xdz\wedge dx - (x\sin 3x + 7yz^2)\, dx\wedge dy$;

   (2) $dx\wedge dy$;

   (3) $-21dx\wedge dy\wedge dz$.

2. (1) $(-\cos x + \sin y)dx\wedge dy$;

   (2) 0;

   (3) $(x+6)dx\wedge dy\wedge dz$.

第七节 梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系下的表达式

1. $\eta =$ 常数，椭圆柱面；

   $\varphi =$ 常数，抛物柱面；

   $z =$ 常数，平面。

若 $q_1 = \eta$，$q_2 = \varphi$，$q_3 = z$，则：

$$H_1^2 = H_2^2 = a^2(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi),\quad H_3 = 1;$$

$$\mathrm{grad}u = \frac{1}{a(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}e_\eta + \frac{\partial u}{\partial \varphi}e_\varphi\right\} + \frac{\partial u}{\partial z}e_z;$$

$$\mathrm{div}v = \frac{1}{a(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\cdot v_\eta\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\cdot v_\varphi\right]\right\} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$\mathrm{rot}v = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi}\cdot$$

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}e_\eta & (\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}e_\varphi & \frac{1}{a}e_z \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\cdot v_\eta & (\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\cdot v_\varphi & \frac{1}{a}v_z \end{vmatrix}.$$

2. $\eta=$常数，旋转椭球面；

$\theta=$常数，双叶曲面；

$\varphi=$常数，半平面。

当 $q_1=\eta$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$，则：

$$H_1^2=H_2^2=a^2(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta),\quad H_3^2=a^2\mathrm{sh}^2\eta\sin^2\theta;$$

$$\mathrm{grad}u=\frac{1}{a(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_\eta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right]+\frac{1}{a\mathrm{sh}\eta\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi;$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{a(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)}\left\{\frac{1}{\mathrm{sh}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sh}\eta\cdot v_\eta\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cdot v_\theta\right]\right\}+\frac{1}{a\mathrm{sh}\eta\cdot\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\frac{1}{a(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)\mathrm{sh}\eta\cdot\sin\theta}\cdot$$

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_\eta & (\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_\theta & \mathrm{sh}\eta\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ (\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot v_\eta & (\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot v_\theta & \mathrm{sh}\eta\sin\theta\cdot v_\varphi\end{vmatrix}.$$

第九章 无 穷 级 数

第一节 数项级数

9. （1）散；（2）散；（3）散；（4）敛；
（5）敛；（6）散；（7）散；（8）敛；
（9）散；（10）散；（11）散；（12）敛；
（13）敛；（14）敛；（15）敛；（16）敛；
（17）敛；（18）敛；（19）$k>1$，敛，$k\leqslant1$，散；
（20）散；（21）散；（22）$a<1$，敛，$a\geqslant1$，散。

11. （1）散；（2）绝对收敛；（3）绝对收敛；

（4）条件收敛；（5）条件收敛；（6）条件收敛；（7）条件收敛；（8）条件收敛；

（9）$p>1$，绝对收敛；$0<p\leqslant 1$，条件收敛；$p\leqslant 0$，发散。

（10）$|a|>1$，绝对收敛；$|a|=1$，条件收敛；$|a|<1$，发散。

12. （1）对任意 x 都收敛；（2）收敛；（3）收敛；（4）条件收敛。

第二节　函数项级数

1. （1）$x>0$；（2）$|x|<e$；（3）$|x|>1$；

（4）$x\geqslant 0$；（5）$|x|\leqslant 1$；（6）$|x|>\frac{1}{2}$；

（7）$|x|<2$；（8）$x>0$；（9）$0<x<6$；

（10）$|x|<1$。

2. （1）一致收敛；（2）一致收敛；

（3）一致收敛；

（4）a）一致收敛，b）非一致收敛；

（5）一致收敛；

（6）a）一致收敛，b）非一致收敛；

（7）一致收敛；（8）非一致收敛；

（9）一致收敛；（10）一致收敛。

10. 1 及 $-\frac{1}{4}$。

12. $\frac{1}{2}$。

第三节　幂级数与泰勒展展式

1. （1）2；（2）1；（3）$+\infty$；（4）1；

（5） $+\infty$； （6） e； （7） 4； （8） $\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（9） $\frac{1}{3}$； （10）$\max(a,b)$。

2。（1）$-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$， $|x|<+\infty$；

（2） $\ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{192}x^4+\cdots$；

（3） $e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!a^n}$， $|x|<+\infty$；

（4） $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$， $0<x\leqslant 2$；

（5） $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{10^{n+1}}$， $|x|<10$；

（6） $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$， $|x|<+\infty$；

（7） $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$， $|x|<1$；

（8） $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$， $|x|\leqslant 1$；

（9） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n$， $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$；

（10） $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$， $-6<x<-2$。

3。 （1） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$， $|x|<+\infty$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $|x|<+\infty$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$;

(4) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $|x|\leqslant 1$.

4. (1) $-\ln(1-x)$, $-1\leqslant x<1$;

(2) $\operatorname{arctg} x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $\frac{\pi}{4}$;

(4) $\frac{1}{(1-x)^2}$, $-1<x<1$;

(5) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x|<1$;

(6) $\frac{2}{(1-x)^3}$, $|x|<1$;

(7) $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x|\leqslant 1$;

(8) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$.

5. (1) $c+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!n}$, $x\neq 0$;

(2) $c+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $|x|<+\infty$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$, $|x|<+\infty$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $|x|<+\infty$.

6. $y(x)\approx\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{\lambda}{3!(1+\lambda)^4}x^3$.

7. $y_1-y_2=-\frac{1}{6}x^3+\cdots$.

第四节　级数的应用

1. ≈ 0.24488, 10^{-5}.

2. (1) 0.487; (2) 0.494.

3. (1) 1; (2) e.

4. (1) 发散;

(2) $p>\frac{3}{2}$, 收敛; $p\leqslant\frac{3}{2}$, 发散.

第十章　含参变量的积分

第一节　广义积分收敛性的判别

1. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 发散; (7) 发散; (8) 收敛; (9) 收敛; (10) 收敛; (11) 收敛; (12) 发散; (13) 收敛; (14) 收敛; (15) 收敛; (16) 发散; (17) 收敛; (18) 收敛; (19) 收敛; (20) $p>1$ 收敛, $p\leqslant 1$ 发散; (21) $0<\alpha<1$ 时收敛; (22) $1<u<2$ 时收敛; (23) 发散; (24) 收敛.

5. (1) 绝对收敛; (2) 条件收敛; (3) 条件收敛; (4) 绝对收敛.

第二节 含参变量的常义积分

2. （1）1； （2）$\frac{\pi}{4}$.

3. （1）$\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx-(\sin\alpha e^{\alpha\sin\alpha}$

$+\cos\alpha e^{\alpha\cos\alpha})$；

（2）$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\left[\alpha(b+\alpha)\right]-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)$

$\cdot\sin\left[\alpha(a+\alpha)\right]$；

（3）$\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$；

（4）$\int_0^{\alpha}(f'_u(u,v)-f'_v(u,v))dx+f(2\alpha,0)$，

其中 $u=x+\alpha$，$v=x-\alpha$.

4. （1）$x\ln\frac{|a|+|b|}{2}$；

（2）当 $|a|\leqslant 1$，为0；当 $|a|>1$，为 $\pi\ln a^2$；

（3）$\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|)$；

（4）$\pi\arcsin a$.

第三节 含参变量的广义积分

1. （1）$u<1$； （2）处处发散； （3）$u<-1$；
（4）$u>1$； （5）$u<3$； （6）$u<1$；
（7）$0<\alpha<3$； （8）$1<\alpha<3$.

5. （1）一致收敛； （2）一致收敛；
（3）a）一致收敛，b）非一致收敛；

(4) 非一致收敛；

(5) a) 一致收敛，b) 非一致收敛；

(6) 非一致收敛； (7) 一致收敛；

(8) 一致收敛； (9) 一致收敛；

(10) 一致收敛。

9. (1) $\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$； (2) $\ln\frac{b}{a}$； (3) $\ln(a+1)$；

(4) $\sqrt{\pi a}$； (5) $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$；

(6) $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$，当 $a\geqslant 0$； $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$，当 $a<0$；

(7) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$； (8) $\sqrt{\pi}(b-a)$；

(9) $2a\ln 2$； (10) $\frac{1}{2}\ln\frac{m^2+\beta^2}{m^2+\alpha^2}$。

10. (1) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$； (2) $\sqrt{\pi}$； (3) a； (4) $-\sigma^2$；

(5) $\frac{\pi}{2}$，当 $a>b$； $\frac{\pi}{4}$，当 $a=b$； 0，当 $a<b$；

(6) $\frac{\pi}{2}$； (7) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$； (8) $\frac{\pi}{4}$。

第四节 欧拉积分

2. (1) $\frac{\pi}{8}$； (2) $\frac{a^4}{16}\pi$； (3) $\frac{3}{512}\pi$；

(4) $\frac{1}{m}B\left(\frac{n}{m},q\right)$； (5) $\frac{1}{\sqrt{a}}$； (6) $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$；

(7) $\frac{\pi}{4}$;　　(8) $\frac{n!}{2}$;　(9) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$;

(10) $\frac{\pi^2}{4}\frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\cos^2\frac{\pi a}{2}}$,　　　(11) $\sqrt{2\pi}$,

(12) $(b-a)p\cdot\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

3. $\frac{a^2}{2n}\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$.

第十一章　富里叶分析

第一节　周期函数的富里叶级数

1. (1) $|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\ (-\infty<x<+\infty)$;

(2) $$-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right]$$

$$=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\\ -\pi/2, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases};$$

(3) $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ \ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

(4) $\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx\ \ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

(5) $f(x)=\dfrac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1-(-1)^{n}e^{-\pi}}{1+n^{2}}\cos nx\right.$

$$\left.+\left[\frac{-n+(-1)^{n}ne^{-\pi}}{1+n^{2}}+\frac{1}{n}(1-(-1)^{n})\right]\sin nx\right\}$$

$(-\pi<x<\pi)$.

2. (1) $1-\sin\dfrac{x}{2}=1-\dfrac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\pi\left(4n^{2}-\dfrac{1}{4}\right)}\cos 2nx\right.$

$$\left.+\frac{4n}{\pi\left(4n^{2}-\dfrac{1}{4}\right)}\sin 2nx\right](0<x<\pi);$$

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{T}{6}-\dfrac{T}{3\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2n\pi x}{T}$ $(0<x<T)$;

(3) $e^{ax}=2\operatorname{sh}(aL)\left[\dfrac{1}{2aL}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n^{2}\pi^{2}+a^{2}L^{2}}\cdot\right.$

$$\left.\left(aL\cos\frac{n\pi x}{L}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\right],\ (-L<x<L);$$

在端点 $x=\pm L$，级数收敛于 $\operatorname{ch}(aL)$.

(4) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2}x,$

$(|x|<1,\ 1<|x|\leqslant 2)$;

在间断点 $x=\pm 1$，收敛于 0。

(5) $f(x)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{\pi^{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{n+1}\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)}{n^{2}}\cos\dfrac{2n\pi}{3}x$

$(0\leqslant x\leqslant 3)$.

3. (1) $f(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{2}-1}\cos nx,$

$(0 \leqslant x \leqslant \pi)$；

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx,$$

$(0 \leqslant x \leqslant \pi)$；

(2) $f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$；

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx,$$

$(0 \leqslant x < \pi)$；

(3) $f(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{L}x,$

$\left(0 \leqslant x < \frac{L}{2},\ \frac{L}{2} < x \leqslant L\right)$；

$$f(x)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

$\left(0 < x < \frac{L}{2},\ \frac{L}{2} < x < L\right)$；

(4) $f(x)=\frac{H}{\pi}+\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nh}{n^2}\cos nx,\quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$；

$$f(x)=\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nh-\sin 2nh}{n^2}\sin nx,\quad (0 < x \leqslant \pi).$$

3. $1-x^2=\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$；

(1) $\frac{\pi^2}{12}$；　　　(2) $\frac{\pi^4}{90}$.

9. $\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $(-\pi<x<0,\ 0<x<\pi)$;

$\frac{\pi}{4}$.

10. $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

（1）$\frac{\pi^2}{8}$;　　（2）$\frac{\pi^2}{6}$;　　（3）$\frac{\pi^4}{96}$.

11. $\frac{H\tau}{T}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{H}{k\pi}\sin\frac{k\pi\tau}{T}e^{i\frac{2k\pi x}{T}}$

12. $f(x)=\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin na\cos nx$,

（1）$\frac{a(\pi-a)}{2}$;　　（2）$\frac{\pi^2-3\pi a+3a^2}{6}$.

13. $A_0=a_0^2$, $A_n=a_n^2+b_n^2$, $B_n=0$.

第二节　广义富里叶级数

3. $\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4L}{(2n+1)\pi}-\frac{8L}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos\frac{2n+1}{2L}\pi x$.

第三节　富里叶变换

2. （1）$\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]dx$

$$=\begin{cases} f(x) & x\neq T \\ \frac{kT}{2} & x=T; \end{cases}$$

其中$A(\lambda)=k(\cos\lambda T+\lambda T\sin\lambda T-1)/\pi\lambda^2$，

$B(\lambda)=k(\sin\lambda T-\lambda T\cos\lambda T)/\pi\lambda^2$；

（2）$\frac{2h}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda T}{\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}x=f(x)$，

$x\neq -T,0,T$；当 $x=-T,0,T$ 时，积分分别等于$-\frac{h}{2},0,\frac{h}{2}$。

（3）$f(x)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$。

3.（1）$F(\lambda)=\frac{4ia\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2}$；

（2）$\frac{a}{(\lambda-b)^2+a^2}+\frac{a}{(\lambda+b)^2+a^2}$；

（3）$F(\lambda)=\frac{2\cos\frac{\lambda}{2}\pi}{1-\lambda^2}$。

4.（1）$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$；

（2）$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=\begin{cases} f(x) & x>0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

第十二章　线性微分方程

第一节　微分方程解的存在唯一性定理

1.（1）$y=e^x-x-1$；

（2）$y=\frac{1}{2}e^x$。

2.（1）$y=c_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$

$$+c_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!};$$

（2）$y=c_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\cdots\right)$

$$+c_2\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\cdots\right);$$

（3）$y=c_1(1+x)+c_2e^x$.

3. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\cdots$.

4. （1）$y=\ln(1+x)$;

（2）$y=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!}x^{2n}$.

第二节　二阶线性微分方程的一般理论

1. （1）无关；（2）无关；（3）相关；（4）无关。

2. $y''-y'2\operatorname{ctg}2x=0$.

3. （1）$y=\frac{1}{x}(c_1\sin x+c_2\cos x)$;

（2）$y=c_2+(c_1-c_2x)\operatorname{ctg}x$;

（3）$y=c_1x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c_2x-2c_1$;

（4）$y=c_1(4x^3-3x)+c_2\sqrt{1-x^2}(4x^2-1)$.

4. (1) $y=c_1x+c_2x^2$;

（2）$y=c_1e^x+c_2(x+1)$;

（3）$y=c_1x+c_2(x^2-1)$;

(4) $y=c_1\sin x+c_2\left[1-\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right]$.

5. $y=x^2-e^{x-1}$.

6. $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$.

7. (1) $y=c_1+c_2x^2+x^3$;

(2) $y=c_1x+c_2e^x-(x^2+1)$;

(3) $y=c_1\cos kx+c_2\sin kx+\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(t)\sin k(x-t)\,dt$.

(4) $y=c_1e^{-x^2}+c_2xe^{-x^2}+\dfrac{x^2}{2}e^{-x^2}$;

(5) $y=c_1+\dfrac{x}{\cos x}$.

8. $y=\pi-1+4\operatorname{arctg}x+x^2$.

第三节 二阶常系数线性微分方程

第四节 质点振动

1. (1) $y=c_1e^{(1+\sqrt{2}x)}+c_2e^{(1-\sqrt{2}x)}$;

(2) $y=e^x\left(c_1\cos\dfrac{x}{2}+c_2\sin\dfrac{x}{2}\right)$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$;

(4) $y=e^x(c_1+c_2x)$;

(5) $y=ce^{-2x}$;

(6) $y=ce^x$;

(7) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$;

(8) $|x|>2$ 时，$y=c_1e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}$

$+c_2e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}x}$;

$|\lambda|=2$ 时，$y=e^{-\frac{\lambda}{2}x}(c_1+c_2x)$;

$|\lambda|<2$ 时，$y=e^{-\frac{\lambda x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x\right.$

$\left.+c_2\sin\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}x\right).$

2. (1) $s=e^{-t}(\cos2t+\sin2t)$； (2) $s=4e^t+2e^{3t}$；
(3) $y=3e^{-2x}\sin5x$； (4) $y=e^{-\frac{x}{2}}(x+2)$.

3. (1) $y=4\sin\frac{x}{2}$； (2) $y=2x-1$；
(3) $y=e^{2x}(x+3)$； (4) $y=e^x(2x^2+x)$；
(5) $y=-\frac{8}{5}e^x\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$；
(6) $y=\frac{1}{2}x\sin x$；
(7) $y=\frac{3}{2}x^2e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$；
(8) $y=\frac{1}{3}x\sin x-\frac{2}{9}\cos x$；
(9) $y=-\frac{e^x}{500}(50x^2+30x+19)$；
(10) $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)\cos x+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\sin x$；
(11) $y=\frac{x}{10}-\frac{1}{41}\cos2x+\frac{5}{164}\sin2x$；
(12) $y=\frac{e^x}{25}[(5x-2)\cos x+(10x-14)\sin x]$；
(13) $y=e^{4x}$； (14) $y=\frac{1}{4}x\sin x-\frac{1}{16}\cos3x$.

4. (1) $y=\frac{1}{x}(c_1\cos\ln x^2+c_2\sin\ln x^2)$；

（2） $y=x(c_1+c_2\ln x)$；

（3） $y=c_1x^{3}+c_2x^{7}$；

（4） $R=c_1r^{n}+c_2r^{-(n+1)}$。

5. （1） $y=c_1+c_2x^{2}+x^{3}$；

（2） $y=x(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x+\ln x)$；

（3） $y=c_1x+c_2x^{2}+x^{3}+x\ln x$；

（4） $y=c_1\cos\ln(1+x)+[c_2+2\ln(1+x)]\sin\ln(1+x)$。

6. 取水平轴为 x 轴，质点的平衡位置为原点，

(i) $\ddot{x}+9x=3\sin 3t$， $x(0)=\dot{x}(0)=0$；

(ii) $X=\frac{1}{6}\sin 3t-\frac{1}{2}t\cos 3t$， (iii) 产生共振现象。

7. $\theta=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$。

8. $v=\sqrt{v_0^2+2k\left(\frac{1}{a-s}-\frac{1}{a}\right)}$。

提示：重力加速度与动点到地心距离之平方成反比。

第五节　n 阶线性微分方程

第六节　线性微分方程组

1. （1） $y=c_1+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x$；

（2） $y=e^{x}(c_1+c_2x+c_3x^{2})$；

（3） $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{x}+c_4e^{-x}$；

（4） $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$；

（5） $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}$；

（6） $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$。

2. (1) $y=\cos x$; (2) $y=\frac{x}{20}(\sin 2x-2\cos 2x)$;

(3) $y=\frac{x}{20}e^{x}(3\sin x-\cos x)$;

(4) $y=x^{3}+\frac{1}{6}x^{5}$;

(5) $y=xe^{-2x}+2x^{2}e^{2x}$.

3. (1) $y=c_1x+c_2x\ln x+c_3x^{-2}$;

(2) $y=x(c_1+c_2\ln x)+c_3x^{2}+\frac{1}{4}x^{3}-\frac{3}{2}x\ln^{2}x$.

4. (1) $\begin{cases}x=c_1\cos t+c_2\sin t+3,\\ y=-c_1\sin t+c_2\cos t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+\sin t,\\ y=-c_1e^{t}+c_2e^{-t};\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=c_1e^{t}+c_2e^{-2t},\\ y=c_1e^{t}+c_3e^{-2t},\\ z=c_1e^{t}-(c_2+c_3)e^{-2t}.\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases}x=\frac{1}{3}(2\sin t-\cos t+1),\\ y=\frac{1}{3}(\sin t+\cos t+2);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t;\end{cases}$

(3) $x_1=x_2=2e^{t}$.

6. $\begin{cases}x=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}),\\ y=-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t})+\frac{mg}{k}t,\end{cases}$

或 $y=-\dfrac{mg}{kv_0}x-\dfrac{m^2g}{k^2}\ln\left(1-\dfrac{kx}{mv_0}\right).$

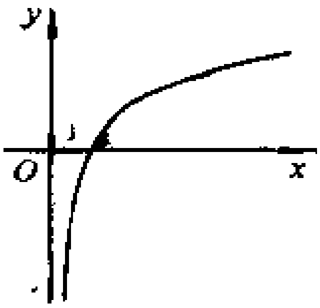
7. $\begin{cases} N_1=ke^{-\lambda_1 t}, \\ N_2=\dfrac{\lambda_1 k}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right), \\ N_3=\dfrac{\lambda}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}-\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}\right)+k. \end{cases}$

附　　录

一、希腊字母表

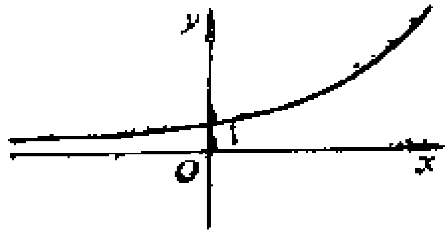
大　写	小　写	读　音	大　写	小　写	读　音
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	omega

二、常用曲线图



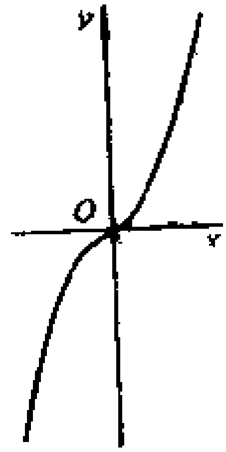
$y=\ln x$

（1）对数曲线



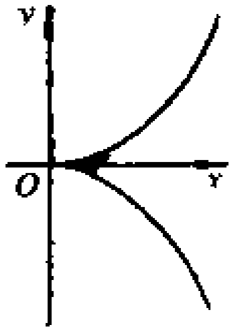
$y=e^x$

（2）指数曲线



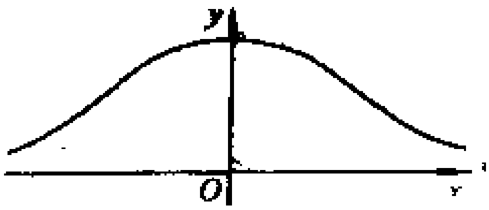
$y=ax^3$

（3）三次抛物线



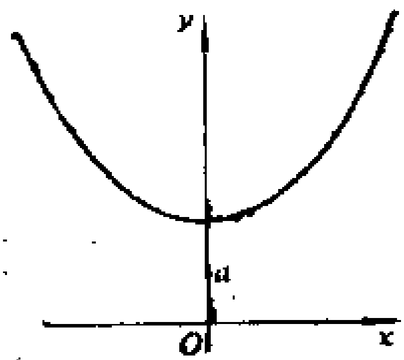
$y^2=ax^3$

（4）半三次抛物线



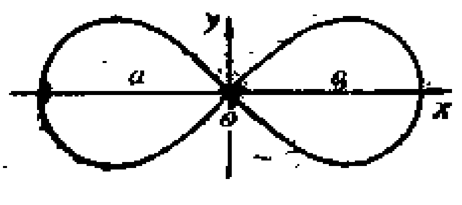
$y=e^{-x^2}$

（5）概率曲线



$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cosh\frac{x}{a}$$

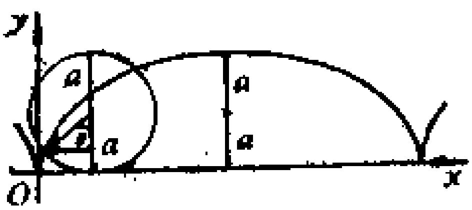
（6）悬链线



$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta$$

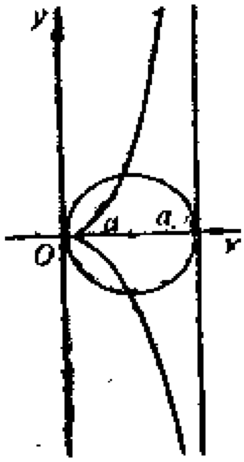
（7）贝奴里双纽线



$$x=a\,\mathrm{arcvers}\frac{x}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$$

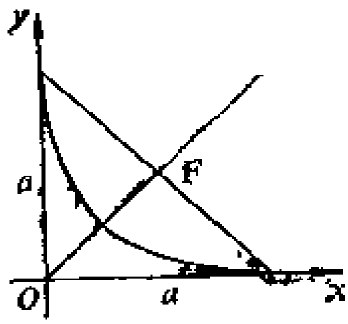
$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

（8）普通摆线



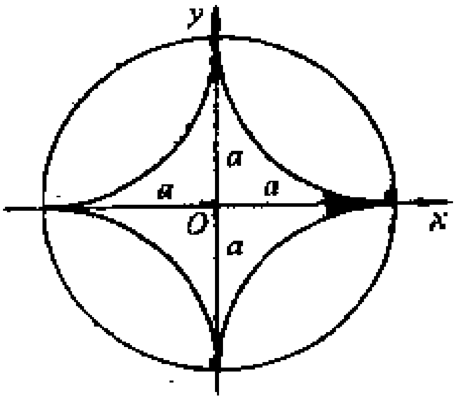
$y^2(2a-x)=x^3$

(9) 歧点蔓叶线



$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$

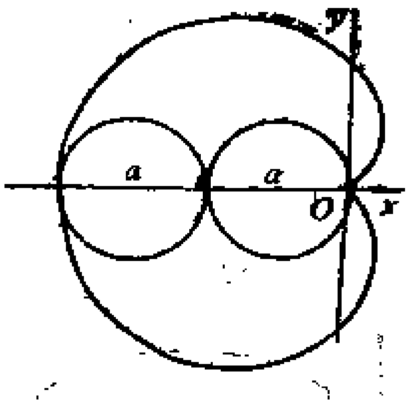
(10) 抛物线



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$

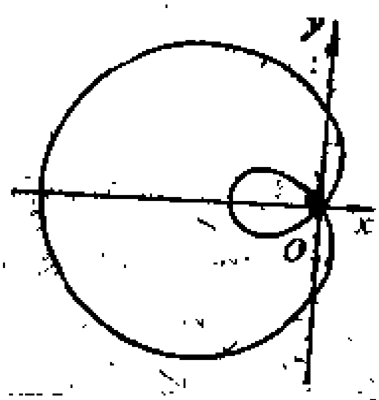
(11) 四歧点内摆线（星形线）



$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$

$\rho=a(1-\cos\theta)$

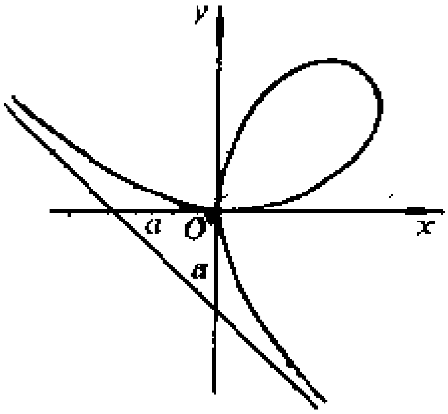
(12) 心脏线



$\rho=b-a\cos\theta$

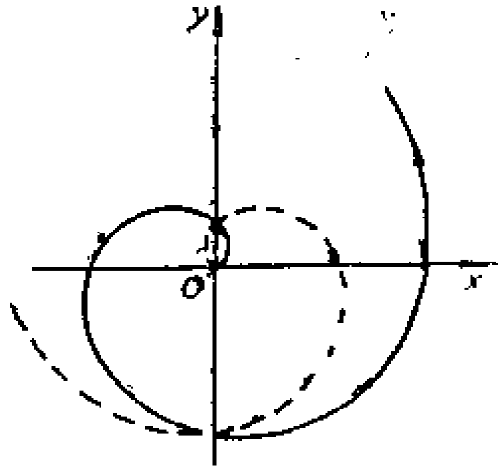
（在图中，$b<a$）

(13) 蚶线



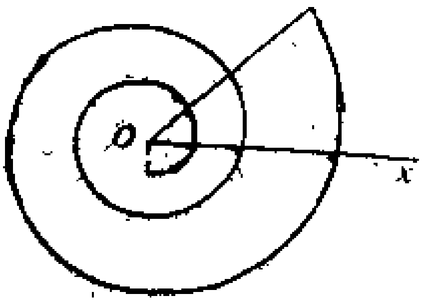
$x^3+y^3-3axy=0$

（14）笛卡儿叶形线



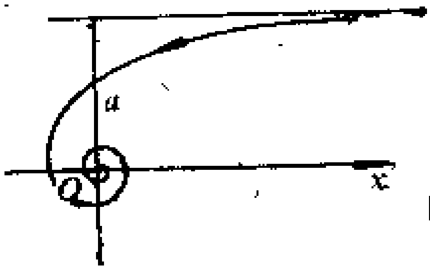
$\rho=a\theta$

（15）阿基米德螺线



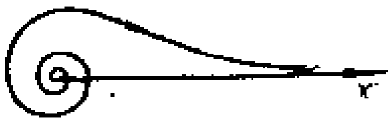
$\rho=e^{a\theta}$ 或 $\ln\rho=a\theta$

（16）对数螺线或等角螺线



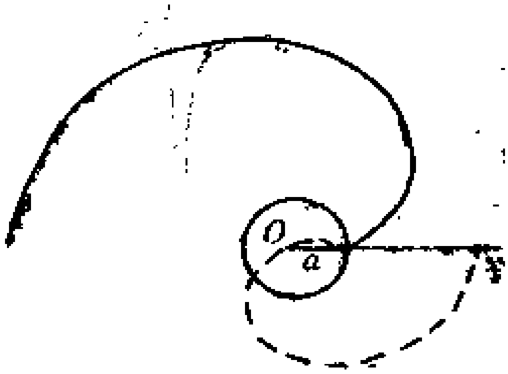
$\rho\theta=a$

（17）双曲螺线或倒螺线



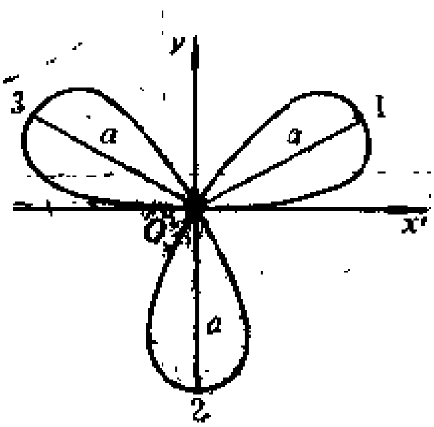
$\rho^2\theta=a^2$

（18）连锁螺线



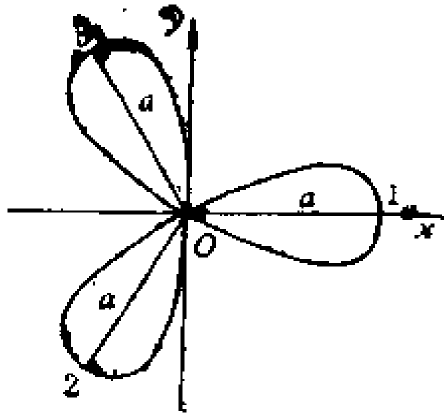
$(\rho-a)^2=4ac\theta$

（19）抛物螺线



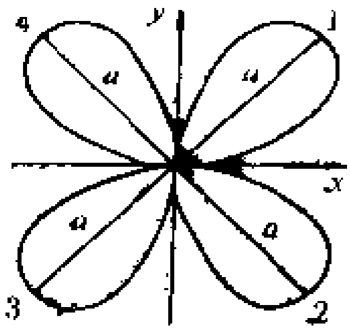
$\rho=a\sin3\theta$

（20）三瓣玫瑰线



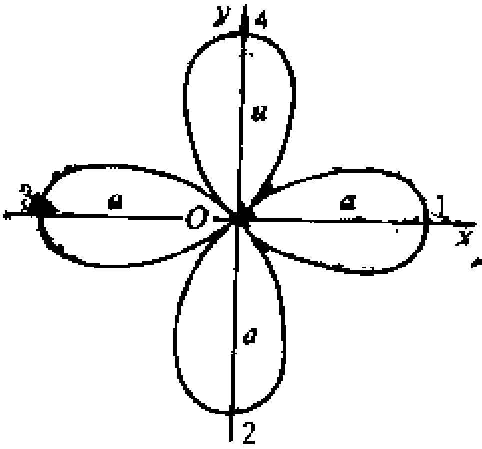
$\rho = a\cos 3\theta$

（21）三瓣玫瑰线



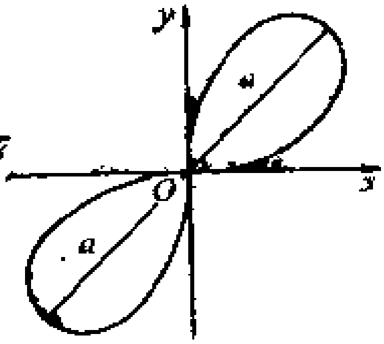
$\rho = a\sin 2\theta$

（22）四瓣玫瑰线



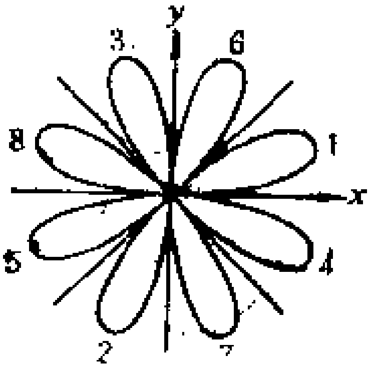
$\rho = a\cos 2\theta$

（23）四瓣玫瑰线



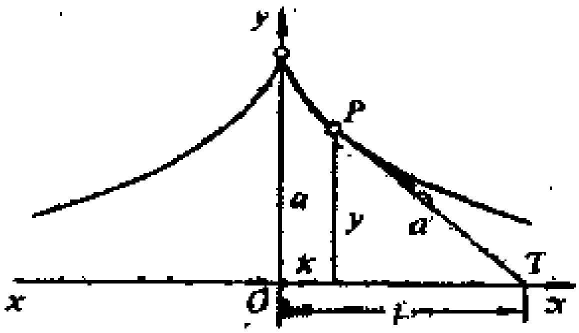
$\rho^2 = a^2\sin 2\theta$

（24）二瓣玫瑰双纽线



$\rho = a\sin 4\theta$

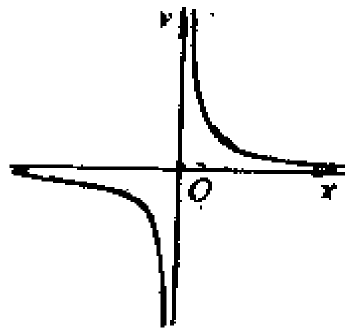
（25）八瓣玫瑰线



$$x = a\,\mathrm{sech}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\begin{cases} x = t - a\tanh\dfrac{t}{a} \\ y = a\,\mathrm{sech}\dfrac{t}{a} \end{cases}$$

（26）曳物线



$xy = a$

（27）等轴双曲线

三、简明积分表

含有 $a+bx$ 的积分

1. $\int (a+bx)^n \mathrm{d}x = \dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c$，　　当 $n \neq -1$

$$= \frac{1}{b}\ln|a+bx| + c，\qquad 当\ n = -1。$$

2. $\int \dfrac{x\mathrm{d}x}{a+bx} = \dfrac{x}{b} - \dfrac{a}{b^2}\ln|a+bx| + c。$

3. $\int \dfrac{x^2\mathrm{d}x}{a+bx} = \dfrac{1}{b^3}\Big[\dfrac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\Big] + c。$

4. $\int \dfrac{x\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = \dfrac{1}{b^2}\Big(\dfrac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\Big) + c。$

5. $\int \dfrac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = \dfrac{x}{b^2} - \dfrac{a^2}{b^3(a+bx)} - \dfrac{2a}{b^3}\ln|a+bx| + c。$

6. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)} = \dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{x}{a+bx}\right| + c。$

7. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2(a+bx)} = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{b}{a^2}\ln\left|\dfrac{a+bx}{x}\right| + c。$

8. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)^2} = \dfrac{1}{x(a+bx)} - \dfrac{1}{a^2}\ln\left|\dfrac{a+bx}{x}\right| + c。$

含有 $\sqrt{a+bx}$ 的积分

9. $\int x\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2} + c。$

10. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2(15b^2x^2-12abx+8a^2)(a+bx)^{3/2}}{105b^3}$

$+c.$

11. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}+c.$

12. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(3b^2x^2-4abx+8a^2)\sqrt{a+bx}}{15b^3}+c.$

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{|\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}|}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+c,$ 当$a>0$;

$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+c,$ 当$a<0$.

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}.$

15. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}.$

16. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a+bx}}{x}+\frac{b}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}.$

含有$a^2\pm x^2$的积分

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+c,$ 当$n=1$.

$= \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}}$

$+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n-1}},$ 当$n>1$.

18. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+c.$ 当$n=1$.

$= \frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}}+c,$ 当$n>1$.

19. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$.

含有$\sqrt{a^2-x^2}$的积分

20. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$.

21. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}+c$.

22. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}$

$+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+c$.

23. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$.

24. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+c$.

25. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$.

26. $\int(a^2-x^2)^{3/2}dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}$

$+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+c$.

27. $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+c$.

28. $\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+c$.

29. $\int\frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+c$.

30. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$.

31. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+c$.

32. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}-\frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$.

33. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$.

34. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+c$.

含有$\sqrt{x^2\pm a^2}$的积分

35. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$.

36. $\int x\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}+c$.

37. $\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{8}(2x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x$

$+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$.

38. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$.

39. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\sqrt{x^2\pm a^2}+c$.

40. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\mp\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$.

41. $\int(x^2\pm a^2)^{3/2}dx=\frac{x}{8}(2x^2\pm 5a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln|x$

$+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$.

42. $\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{3/2}}=\pm\frac{x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}+c$.

43. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + c$.

44. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$.

45. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + c$.

46. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{|x|} + c$.

47. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x} + c$.

48. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + a^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{|x|} + c$.

49. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + c$.

50. $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$.

51. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} + c$.

52. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + c$.

含有 $a + bx + cx^2$ 的积分

53. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + c$,

当 $b^2 < 4ac$,

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\ln\left|\frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + c$$

当 $b^2 > 4ac$.

54. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln|2cx+b+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}|$

$+c$,

当 $c>0$

$=-\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+c$,

当 $c<0$, $b^2>4ac$.

55. $\int\sqrt{a+bx+cx^2}dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}$

$+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

56. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

含有三角函数的积分

57. $\int\sin^2 ax dx=\frac{1}{2a}(ax-\sin ax\cos ax)+x$.

58. $\int\cos^2 ax dx=\frac{1}{2a}(ax+\sin ax\cos ax)+c$.

59. $\int\sin^n x dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x dx$.

60. $\int\cos^n x dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx$.

61. $\int\operatorname{tg}x dx=-\ln|\cos x|+c$.

62. $\int\operatorname{ctg}x dx=\ln|\sin x|+c$.

63. $\int\operatorname{tg}^n x dx=\frac{\operatorname{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int\operatorname{tg}^{n-2}x dx$.

64. $\int\operatorname{ctg}^n x dx=-\frac{\operatorname{ctg}^{n-1}x}{n-1}-\int\operatorname{ctg}^{n-2}x dx$.

65. $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$.

66. $\int \csc x \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \operatorname{ctg} x| + c$.

67. $\int \sec^n x \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \mathrm{d}x$.

68. $\int \csc x \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{ctg} x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x \mathrm{d}x$.

69. $\int \sec x \operatorname{tg} x \mathrm{d}x = \sec x + c$.

70. $\int \csc x \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x = -\csc x + c$.

71. $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = -\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + c$.

72. $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + c$.

73. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + c$.

74. $\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}$

$$+ \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \mathrm{d}x.$$

75. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c$,

当 $a^2 > b^2$,

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|$$

$+c$, 当 $a^2<b^2$。

其他积分

76. $\int xe^x dx = e^x(x-1)+c$。

77. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$。

78. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)+c$。

79. $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1]+c$。

80. $\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + c$。

81. $\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + c$。

82. $\int x^n \sin x dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$。

83. $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$。

84. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}+c$。

85. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}+c$。

86. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+c$。

87. $\int \mathrm{arctg}\, x dx = x\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$。

88. $\int x^n \arcsin x dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arcsin x - \int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)$。

89. $\int x^n \mathrm{arctg}\, x dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\mathrm{arctg}\, x - \int\frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx\right)$。