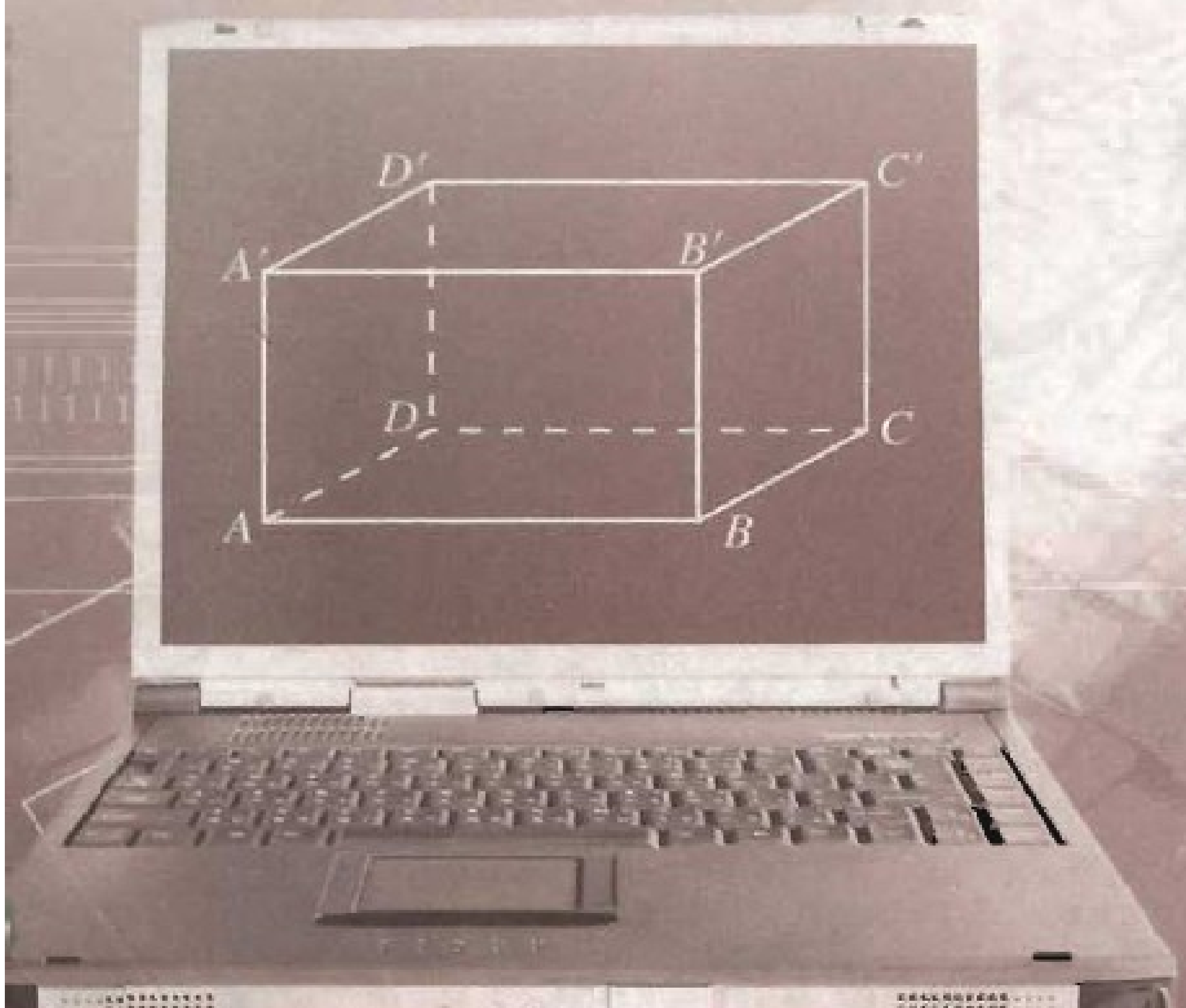
普通高中课程标准实验教科书

数学 ②

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书　数学 2　必修　A 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

网　　址　http://www.pep.com.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　唐山市润丰印务有限公司
版　　次　2007 年 2 月第 3 版
印　　次　2019 年 7 月第 31 次印刷
开　　本　890 毫米×1 240 毫米　1/16
印　　张　9.75
字　　数　216 千字
书　　号　ISBN 978-7-107-17706-4
定　　价　8.75 元
价格依据文件号：京发改规[2016]13 号

如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社联系。电话：400-810-5788

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从 2013 年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求　印刷　第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：王申怀
主要编者：马　波　张　鹤　王敬庚　陶维林　王申怀　张劲松
责任编辑：张劲松
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，她是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学、循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学

的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

学数学趁年轻. 同学们，你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.

本 册 导 引

我们根据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了这套实验教科书.

本书是高中数学必修课程的数学 2，包括立体几何初步、解析几何初步，分为空间几何体，点、直线、平面之间的位置关系，直线与方程，圆与方程四章.

几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的学科. 直观感知、操作确认、思辩论证、度量计算是认识和探索几何图形及其性质的主要方法.

立体几何是几何学的重要组成部分. 在立体几何初步中，我们将从对空间几何体的整体观察入手，认识空间图形及其直观图的画法；再以长方体为载体，直观认识和理解空间中点、直线、平面之间的位置关系，并利用数学语言表述有关平行、垂直的性质与判定，对某些结论进行论证. 另外，我们还将了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法.

欧氏几何把几何与逻辑思想结合起来，用逻辑推理方法研究几何问题. 解析几何通过坐标系，把几何中的点与代数的基本研究对象数（有序数对）对应，然后建立图形（曲线）与方程的对应，从而把几何与代数紧密结合起来，用代数方法解决几何问题. 这是数学的重大进步.

在解析几何初步中，我们将在平面直角坐标系中建立直线和圆的代数方程，运用代数方法研究它们的几何性质及其相互位置关系，了解空间直角坐标系. 体会数形结合的思想，初步形成用代数方法解决几何问题的能力.

学习始于疑问. 在本书中，我们将通过适当的问题情景，引出需要学习的数学内容，然后在“观察”“思考”“探究”等活动中，引导同学们自己发现问题、提出问题，通过亲身实践、主动思维，经历不断的从具体到抽象、从特殊到一般的概括活动来理解和掌握数学基础知识，打下坚实的数学基础.

学而不思则罔. 只有通过自己的独立思考，同时掌握科学的思维方法，才能真正学会数学. 在本书中，我们将利用数学内容之间的内在联系，特别是蕴涵在数学知识中数学思想方法，启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、化归等数学思考的常用逻辑方法，使同学们学会数学思考与推理，不断提高数学思维能力.

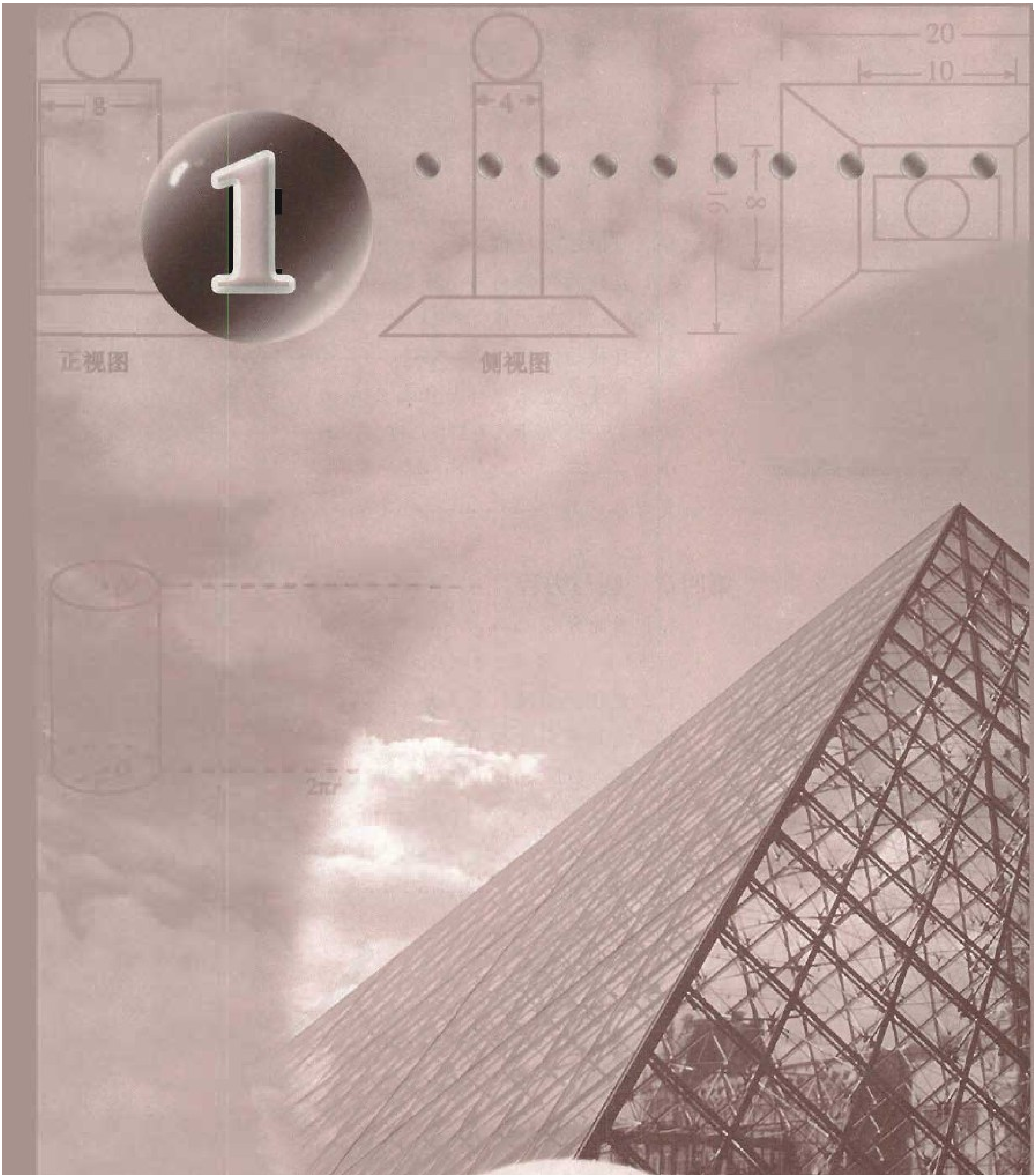
学习的目的在于应用. 在本书中，我们将努力为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会，以使同学们加深对数学概念本质的理解，认识数学知识与实际的联系，学会用数学知识和方法解决实际问题. 另外，我们还开辟了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目，为同学们提供选学素材，有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究.

祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、用数学解决问题的能力等方面都有较大提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学更加全面的认识.

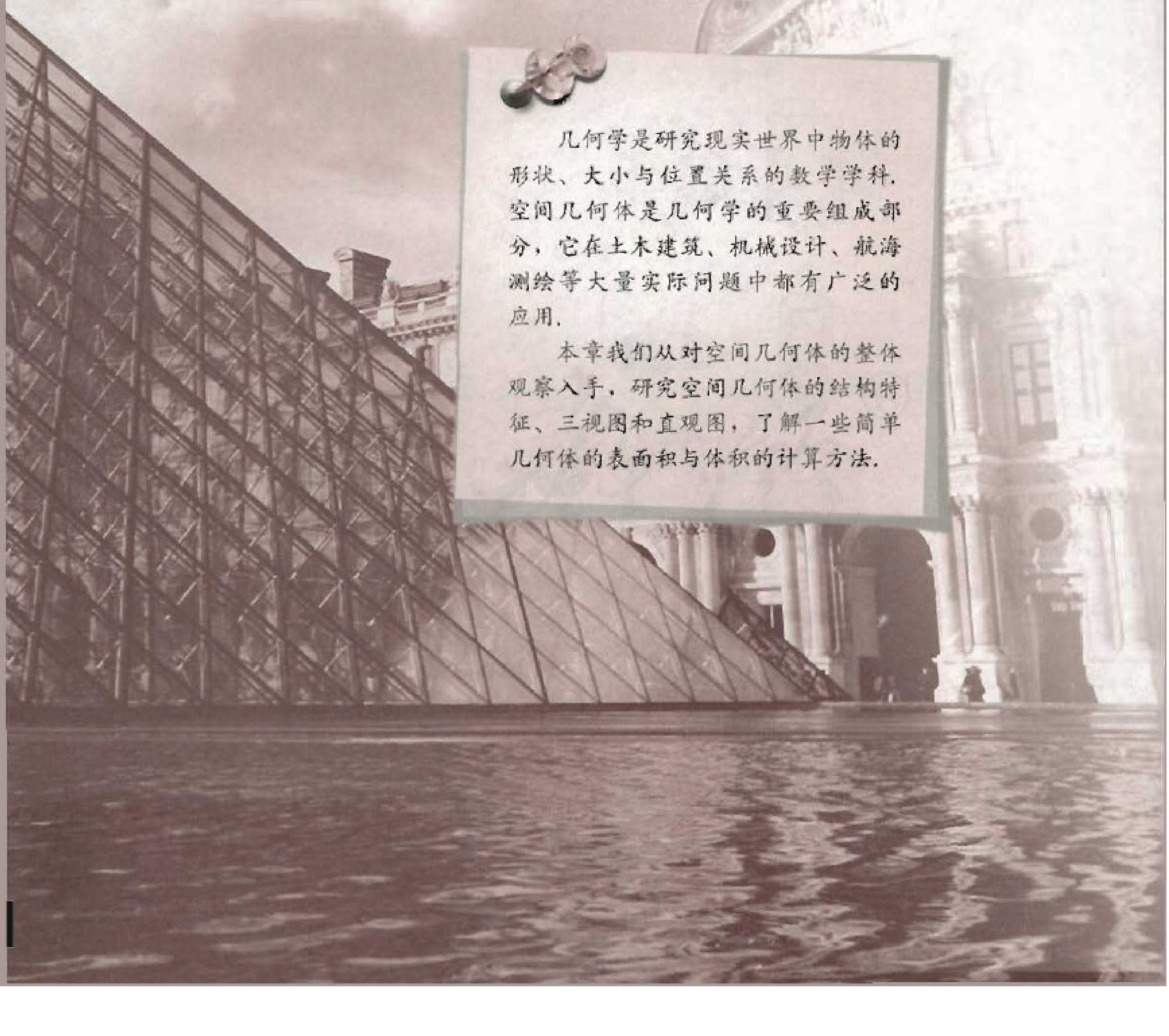
本书部分数学符号

$A\in a$	点 A 在直线 a 上
$A\notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A\in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A\notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$\alpha\cap\beta=a$	平面 α 和平面 β 的交线是 a
$a\subset\alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a\not\subset\alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a\cap b=A$	直线 a 与直线 b 相交于点 A
$a\cap\alpha=A$	直线 a 与平面 α 相交于点 A
$a/\!/\alpha$	直线 a 与平面 α 互相平行
$\alpha/\!/\beta$	平面 α 与平面 β 互相平行
$a\perp\alpha$	直线 a 与平面 α 互相垂直
$\alpha\perp\beta$	平面 α 与平面 β 互相垂直
二面角 α-AB-β(α-l-β)	棱为 AB，面为 α，β 的二面角 （棱为 l，面为 α，β 的二面角）
k_l，k'_{AB}	直线 l 的斜率 k，直线 AB 的斜率 k'
AB 或 $\lvert AB\rvert$	线段 AB 的长度
$Oxyz$	空间直角坐标系

目 录


1
20
10
8
4
16
8
正视图
侧视图
经典的建筑给人以美的享受，你想知道其中的奥秘吗？

第一章 空间几何体



几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科.空间几何体是几何学的重要组成部分，它在土木建筑、机械设计、航海测绘等大量实际问题中都有广泛的应用.

本章我们从对空间几何体的整体观察入手，研究空间几何体的结构特征、三视图和直观图，了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法.

1.1 空间几何体的结构

在我们周围存在着各种各样的物体，它们都占据着空间的一部分．如果我们只考虑这些物体的形状和大小，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫做空间几何体．本节我们主要从结构特征方面认识几种最基本的空间几何体．

观察

观察下面的图片，这些图片中的物体具有怎样的形状？日常生活中，我们把这些物体的形状叫做什么？我们如何描述它们的形状？

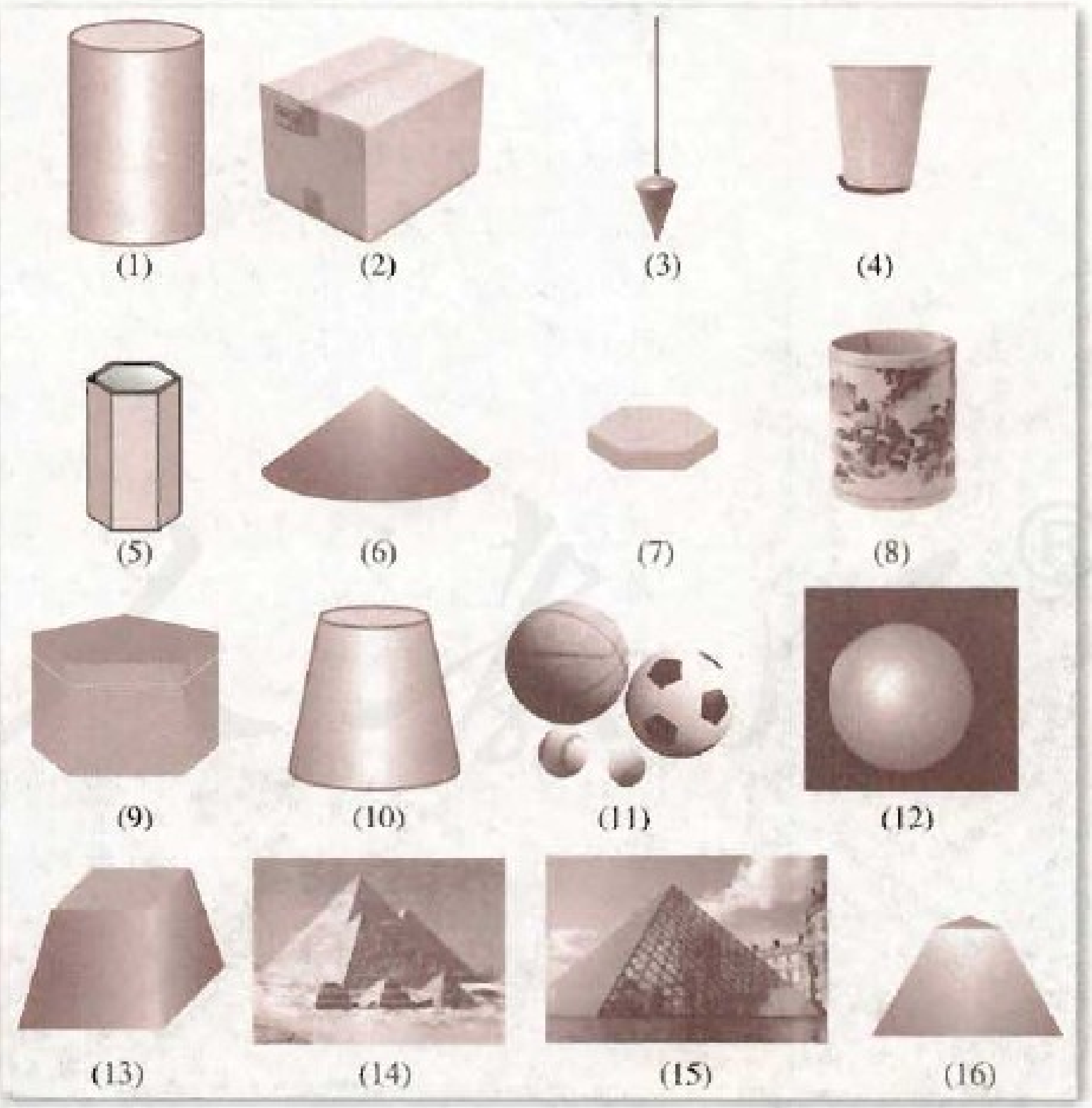


图 1.1-1

观察一件实物，说出它属于哪种空间几何体，并分析它的结构特征，要注意它与平面图形的联系．注意观察组成几何体的每个面的特点，以及面与面之间的关系．

通过观察，可以发现，(2)、(5)、(7)、(9)、(13)、(14)、(15)、(16) 具有同样的特点：组成几何体的每个面都是平面图形，并且都是平面多边形❶；(1)、(3)、(4)、(6)、(8)、(10)、(11)、(12) 具有同样的特点：组成它们的面不全是平面图形.

一般地，我们把由若干个平面多边形围成的几何体叫做**多面体**（图 1.1-2）. 围成多面体的各个多边形叫做多面体的**面**，如面 $ABCD$，面 $BCC'B'$；相邻两个面的公共边叫做多面体的**棱**，如棱 AB，棱 AA'；棱与棱的公共点叫做多面体的**顶点**，如顶点 A，D'. (2)、(5)、(7)、(9)、(13)、(14)、(15)、(16) 这些物体都具有多面体的形状.

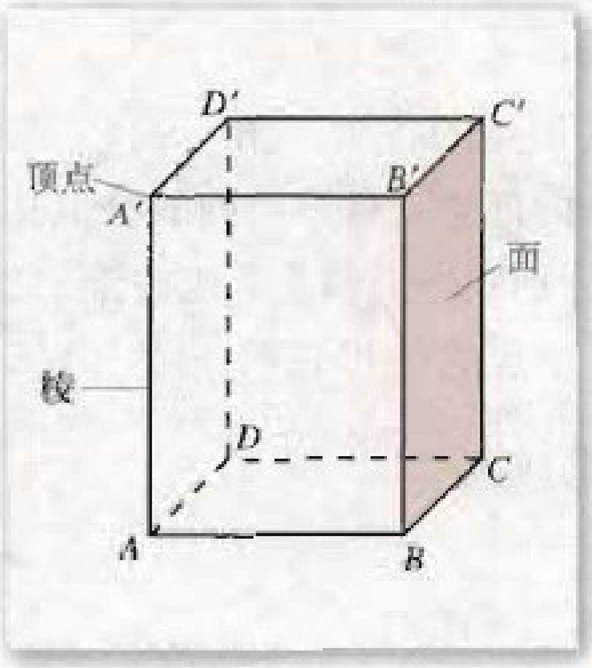


图 1.1-2

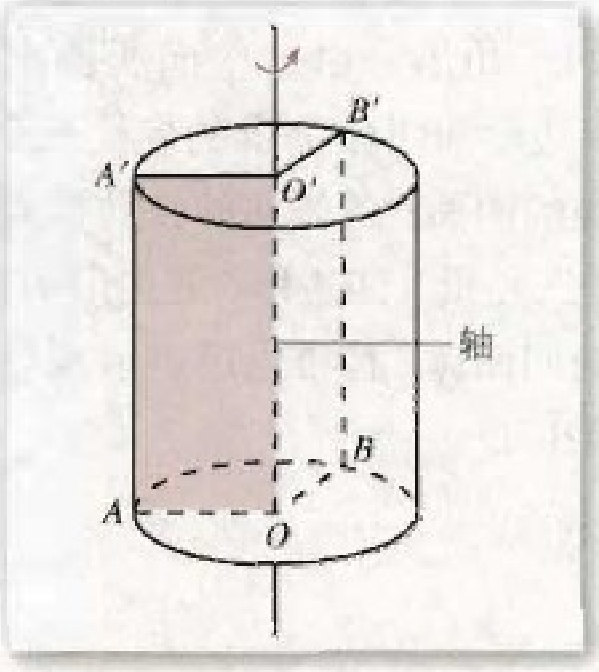


图 1.1-3

我们把由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体叫做**旋转体**（图 1.1-3）. 这条定直线叫做旋转体的**轴**. (1)、(3)、(4)、(6)、(8)、(10)、(11)、(12) 这些物体都具有旋转体的形状.

1.1.1　柱、锥、台、球的结构特征

1. 棱柱的结构特征

图 1.1-1 中的 (2) 是我们非常熟悉的长方体包装盒，它的每个面都是平行四边形（矩形），并且相对的两个面给我们以平行的形象，如同天花板与地面一样.

如图 1.1-4，一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做**棱柱**(prism). 棱柱中，这两个互相平行的面叫做棱柱的**底面**，简称**底**；其余各面叫做棱柱的**侧面**；相邻侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**；侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的**顶点**. 底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱

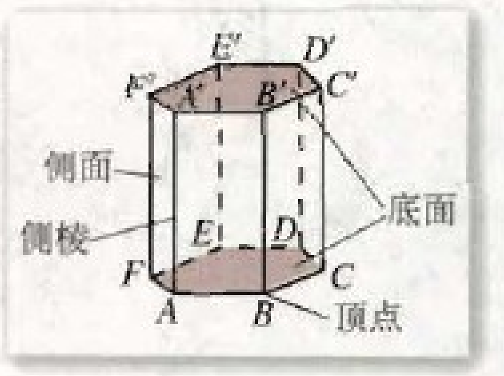


图 1.1-4

❶ 本章所说的多边形，一般包括它内部的平面部分.

柱，图 1.1-4 的六棱柱表示为棱柱 $ABCDEF\text{-}A'B'C'D'E'F'$. 图 1.1-1 中的（5）、（7）、（9）都是具有棱柱结构的物体.

2. 棱锥的结构特征

图 1.1-1 中的（14）和（15）这样的多面体，均由平面图形围成，其中一个面是多边形，其余各面都是三角形，并且这些三角形有一个公共顶点.

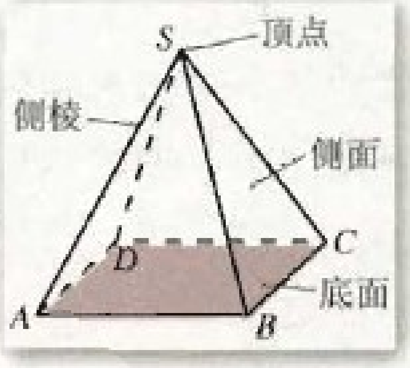


图 1.1-5

如图 1.1-5，一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做**棱锥**（pyramid）. 这个多边形面叫做**棱锥的底面**或**底**；有公共顶点的各个三角形面叫做**棱锥的侧面**；各侧面的公共顶点叫做**棱锥的顶点**；相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**. 底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……其中三棱锥又叫四面体. 棱锥也用表示顶点和底面各顶点的字母表示，图 1.1-5 的四棱锥表示为棱锥 $S\text{-}ABCD$.

思考

如何描述图 1.1-1 中（13）、（16）的几何结构特征，它们与棱锥有何关系?

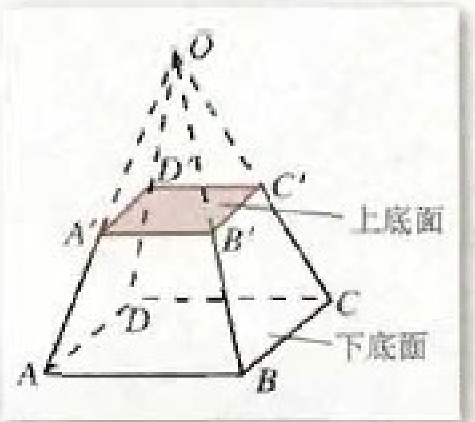


图 1.1-6

3. 棱台的结构特征

我们已经学过棱柱和棱锥，但是具有图 1.1-1 中像（13）、（16）这种结构的几何体我们没有学过. 像具有（13）和（16）这种几何结构特征的多面体，是用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分，这样的多面体（图 1.1-6）叫做**棱台**（frustum of a pyramid）. 原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的**下底面**和**上底面**，棱台也有侧面、侧棱、顶点.

探究

请仿照棱锥中关于侧面、侧棱、顶点的定义，给出棱台的侧面、侧棱、顶点的定义，并在图 1.1-6 中标出它们.

由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台……与棱柱的表示一样，图 1.1-6 中的四棱台表示为棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.

4. 圆柱的结构特征

如图 1.1-7，以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱（circular cylinder）．旋转轴叫做圆柱的轴；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面；平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面；无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线．

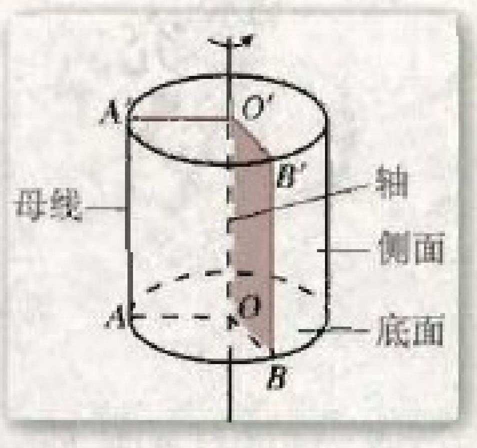


图 1.1-7

在生活中，许多容器和物体都是圆柱形的，如图 1.1-1 中的（1）和（8）．圆柱用表示它的轴的字母表示，图1.1-7中圆柱表示为圆柱 $O'O$．

圆柱和棱柱统称为柱体．

5. 圆锥的结构特征

与圆柱一样，圆锥也可以看作是由平面图形旋转而成的．如图 1.1-8，以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆锥（circular cone）．图 1.1-1 中的（3）和（6）就是圆锥形物体．圆锥也有轴、底面、侧面和母线．

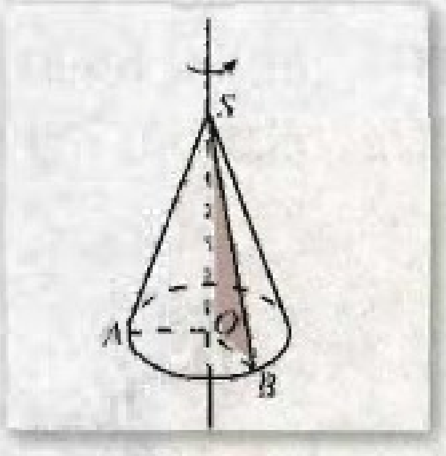


图 1.1-8

请你仿照圆柱中关于轴、底面、侧面、母线的定义，给出圆锥的轴、底面、侧面、母线的定义，并在图 1.1-8 中标出它们．

圆锥也用表示它的轴的字母表示，图 1.1-8 中的圆锥表示为圆锥 SO．

棱锥与圆锥统称为锥体．

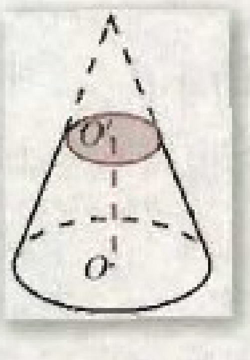


图 1.1-9

6. 圆台的结构特征

与棱台类似，用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分（图 1.1-9）叫做圆台（frustum of a cone）．图 1.1-1 中的（4）和（10）都是具有圆台结构特征的物体．

与圆柱和圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面、母线．请你在图 1.1-9 中标出它们，并用字母将图 1.1-9 中的圆台表示出来．

棱台与圆台统称为台体．

探究

圆柱可以由矩形旋转得到，圆锥可以由直角三角形旋转得到. 圆台可以由什么平面图形旋转得到？如何旋转？

7. 球的结构特征

如图 1.1-10，以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体（solid sphere），简称球. 半圆的圆心叫做球的球心，半圆的半径叫做球的半径，半圆的直径叫做球的直径. 图 1.1-1 中的（11）、（12）具有球体的几何结构特征. 球常用表示球心的字母 O 表示，图 1.1-10 中的球表示为球 O.

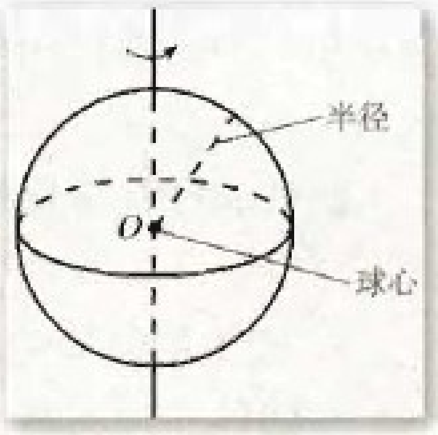


图 1.1-10

探究

棱柱、棱锥与棱台都是多面体，它们在结构上有哪些相同点和不同点？三者的关系如何？当底面发生变化时，它们能否互相转化？圆柱、圆锥与圆台呢？

1.1.2 简单组合体的结构特征

现实世界中的物体表示的几何体，除柱体、锥体、台体和球体等简单几何体外，还有大量的几何体是由简单几何体组合而成的，这些几何体叫做简单组合体.

简单组合体的构成有两种基本形式：一种是由简单几何体拼接而成，如图 1.1-11 中(1)、(2)物体表示的几何体；一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成，如图 1.1-11 中(3)、(4)物体表示的几何体.

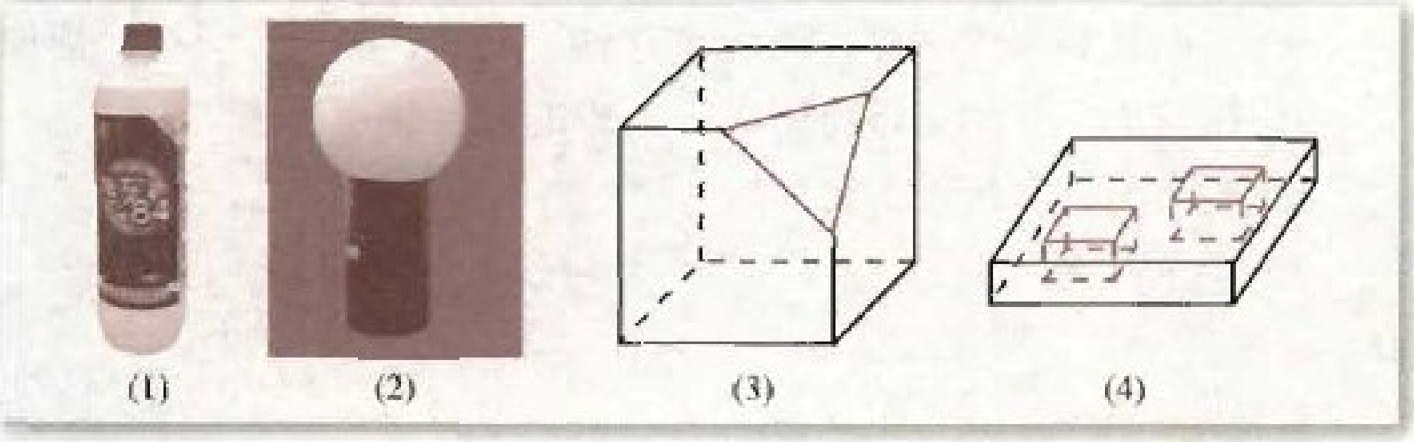


图 1.1-11

观察

观察图 1.1-11 中(1)、(3)两物体所示的几何体，你能说出它们各由哪些简单几何体组合而成吗？

图 1.1-11 中(1)物体所示的几何体由两个圆柱和两个圆台组合而成，如图 1.1-12；图 1.1-11 中（3）物体所示的几何体由一个长方体截去一个三棱锥而得到，如图 1.1-13.

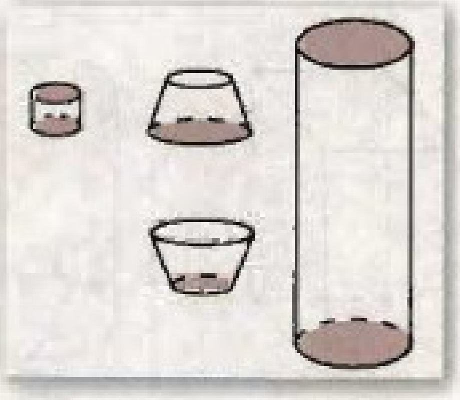


图 1.1-12

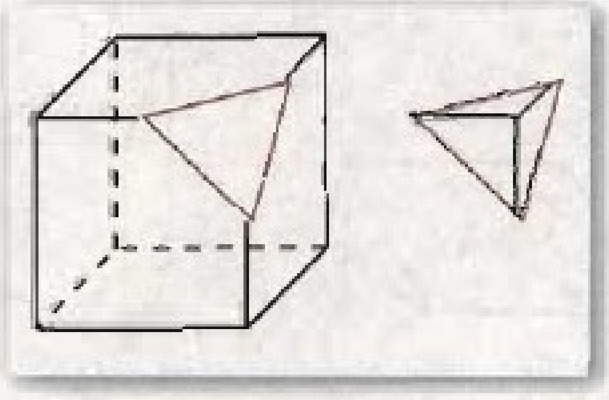


图 1.1-13

现实世界中，我们看到的物体大多由具有柱、锥、台、球等几何结构特征的物体组合而成.

练习

1. 说出下列物体的主要几何结构特征：

（第 1 题）

2. 根据下列对于几何结构特征的描述，说出几何体的名称：

（1）由 7 个面围成，其中两个面是互相平行且全等的五边形，其他面都是全等的矩形；

（2）一个等腰三角形绕着底边上的高所在的直线旋转 180°形成的封闭曲面所围成的图形.

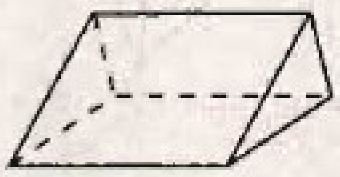
3. 观察我们周围的物体，并说出这些物体所示几何体的主要结构特征.

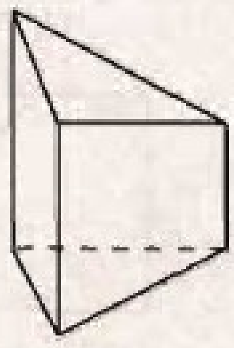
习题1.1

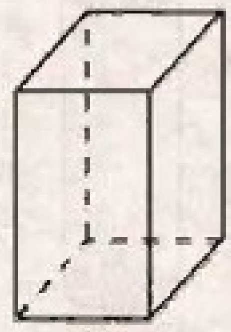
A 组

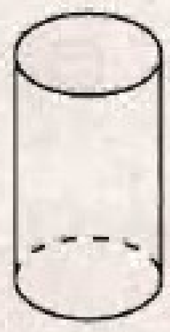
1. 选择题.

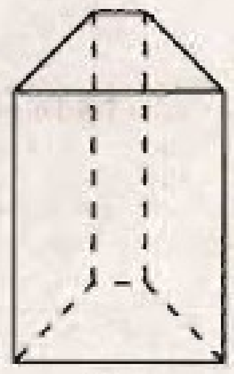
(1) 下列几何体中是棱柱的有（　　）

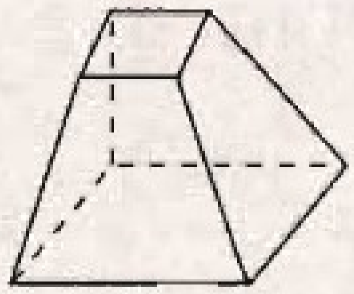

①

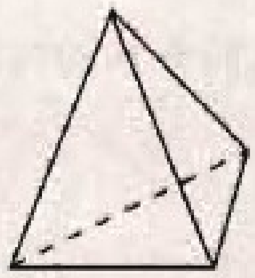

②


③


④


⑤


⑥


⑦

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

(2) 下列命题正确的是（　　）

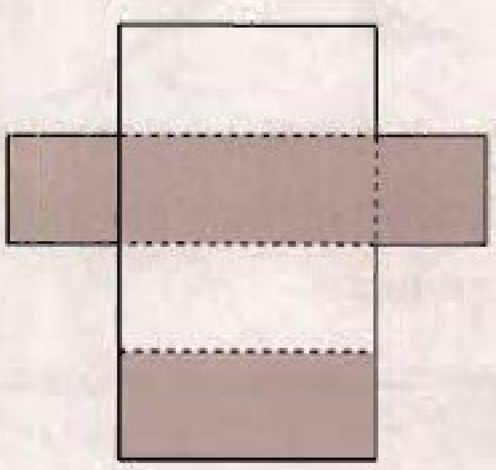
(A) 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱.

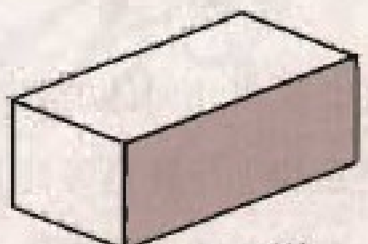
(B) 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱.

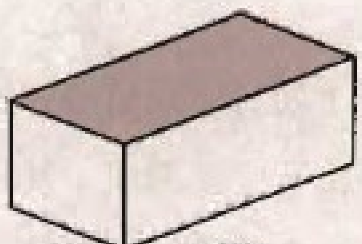
(C) 有两个面平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行的几何体叫棱柱.

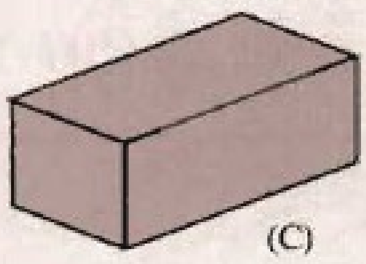
(D) 用一个平面去截棱锥，底面与截面之间的部分组成的几何体叫棱台.

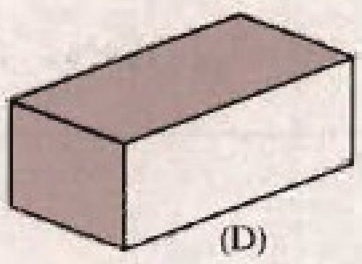
(3) 如图，右边长方体中由左边的平面图形围成的是（　　）




(A)


(B)

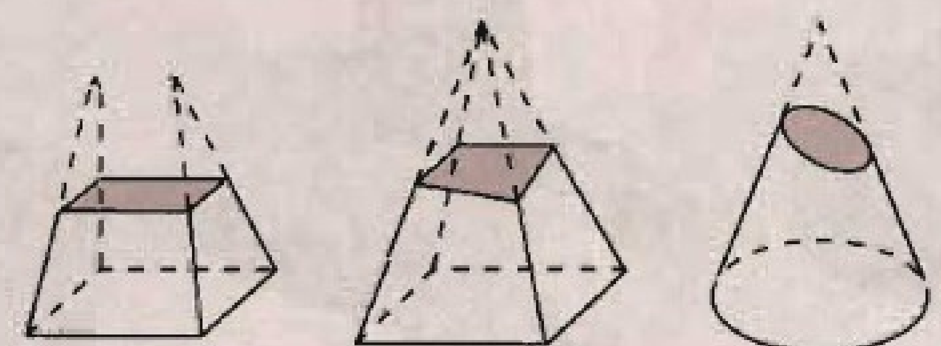

(C)


(D)

(4) 充满气的车轮内胎可由下面某个图形绕对称轴旋转而成，这个图形是（　　）.

(A)　(B)　(C)　(D)

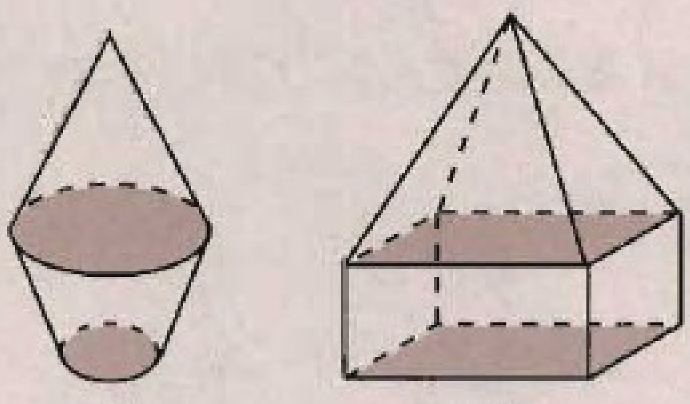
2. 判断下列几何体是不是台体，并说明为什么.



(1)　(2)　(3)

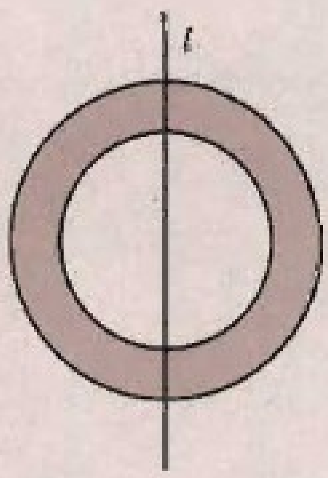
（第 2 题）

3. 说出下列几何体的主要结构特征：



(1)　(2)

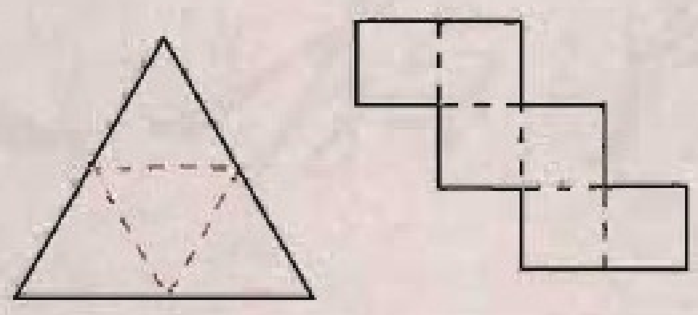
（第 3 题）



（第 4 题）

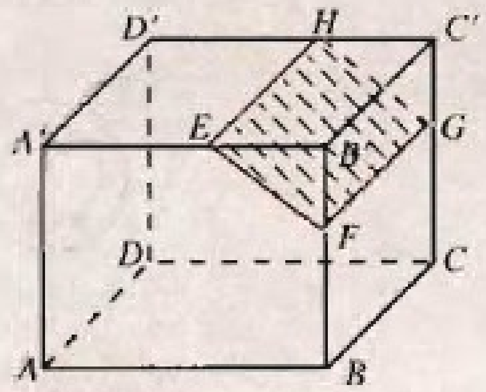
4. 如图，一个圆环面绕着过圆心的直线 l 旋转 180°，想象并说出它形成的几何体的结构特征.

5. 将图中的平面图形按适当比例放大，分别制作四面体和正方体，并说明平面图形与空间几何体的关系.



（第 5 题）

B 组



(第1题)

1. 如图，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中被截去一部分，其中 $EH /\!/ A'D'$. 剩下的几何体是什么？截去的几何体是什么？你能说出它们的名称吗？
2. 请研究下列物体所示几何体的几何结构特征.


(第2题)

1.2 空间几何体的三视图和直观图

前面我们认识了柱体、锥体、台体、球体以及简单组合体的结构特征. 为了将这些空间几何体画在纸上，用平面图形表示出来，使我们能够根据平面图形想象空间几何体的形状和结构，这就需要学习视图的有关知识.

我们常用三视图和直观图表示空间几何体. 三视图是观察者从三个不同位置观察同一个空间几何体而画出的图形；直观图是观察者站在某一点观察一个空间几何体而画出的图形. 三视图和直观图在工程建设、机械制造以及日常生活中具有重要意义. 本节我们将在学习投影知识的基础上，学习空间几何体的三视图和直观图.

1.2.1 中心投影与平行投影

我们知道，光是直线传播的. 由于光的照射，在不透明物体后面的屏幕上可以留下这个物体的影子，这种现象叫做**投影**. 其中，我们把光线叫做**投影线**，把留下物体影子的屏幕叫做**投影面**.

我们把光由一点向外散射形成的投影，叫做**中心投影**. 中心投影的投影线交于一点. 中心投影现象在我们的日常生活中非常普遍. 例如，在电灯泡的照射下，物体后面的屏幕上就会形成影子，而且随着物体距离灯泡（或屏幕）的远近，形成的影子大小会有不同（图 1.2-1）. 另外，人们可以运用中心投影的方法进行绘画，使画出来的美术作品与人们感官的视觉效果是一致的（图 1.2-2）.

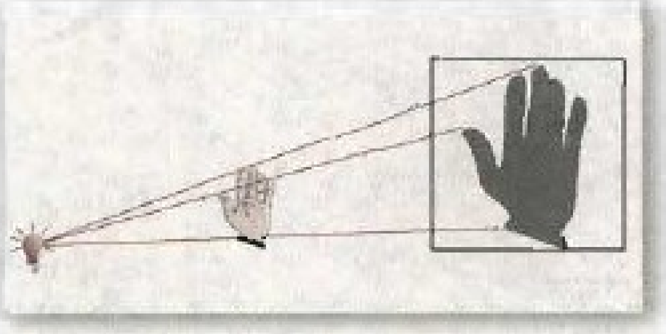


图 1.2-1

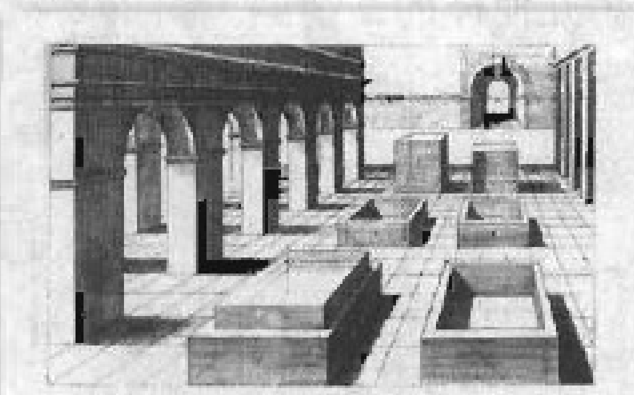


图 1.2-2

我们把在一束平行光线照射下形成的投影，叫做**平行投影**. 平行投影的投影线是平行的. 在平行投影中，投影线正对着投影面时，叫做正投影，否则叫做斜投影.

在平行投影之下，与投影面平行的平面图形留下的影子，与这个平面图形的形状

和大小是完全相同的.

一个三角板在中心投影和不同方向的平行投影之下，所产生的投影如图 1.2-3.

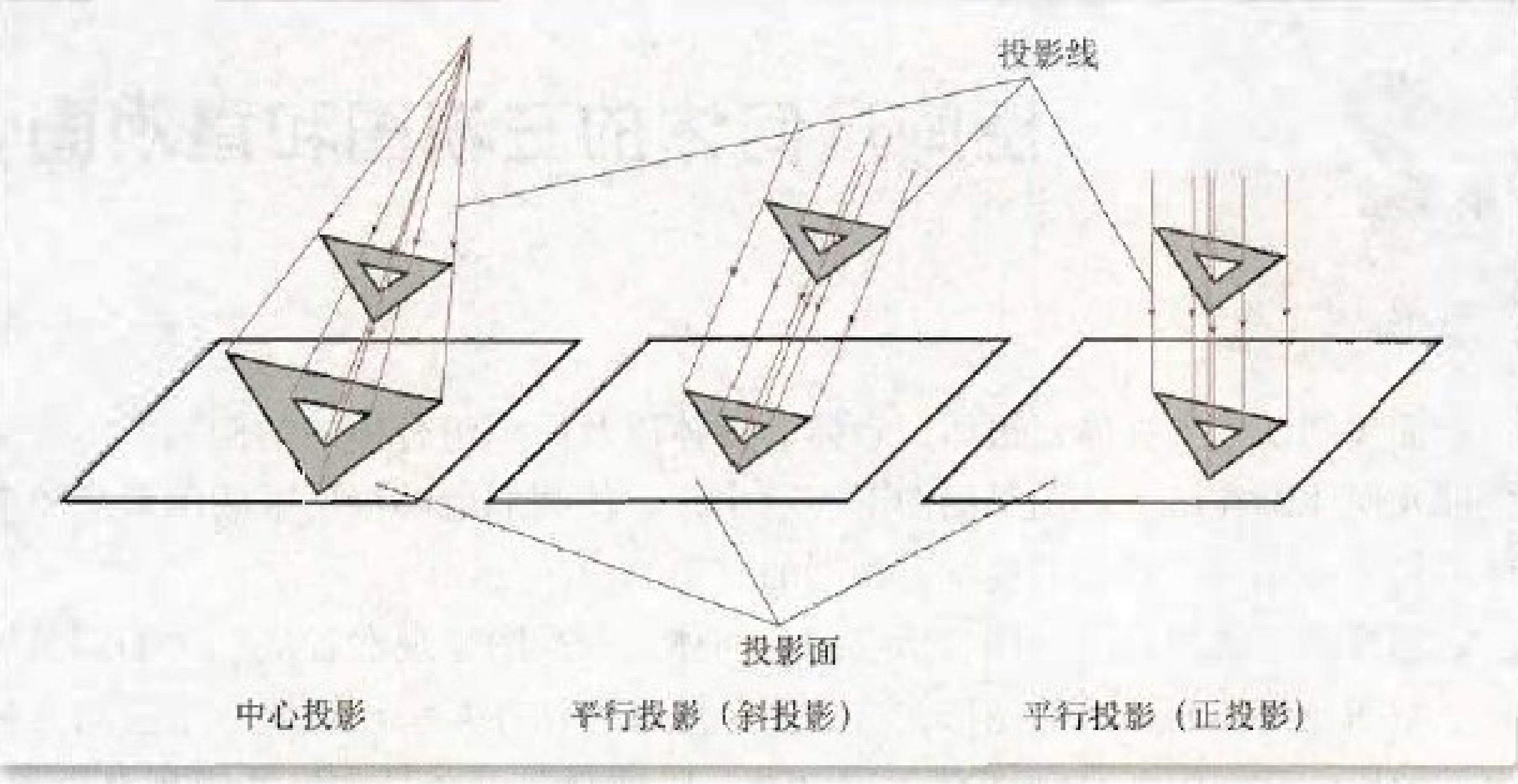


图 1.2-3

我们可以用平行投影的方法，画出空间几何体的三视图和直观图.

1.2.2 空间几何体的三视图

1. 柱、锥、台、球的三视图

把一个空间几何体投影到一个平面上，可以获得一个平面图形，但是只有一个平面图形难以把握几何体的全貌. 因此，我们需要从多个角度进行投影，才能较好地把握几何体的形状和大小. 通常，总是选择三种正投影，一种是光线从几何体的前面向后面正投影，得到投影图，这种投影图叫做几何体的正视图；一种是光线从几何体的左面向右面正投影，得到投影图，这种投影图叫做几何体的侧视图；第三种是光线从几何体的上面向下面正投影，得到投影图，这种投影图叫做几何体的俯视图. 几何体的正视图、侧视图和俯视图统称为几何体的三视图. 图 1.2-4 是一个长方体的三视图.

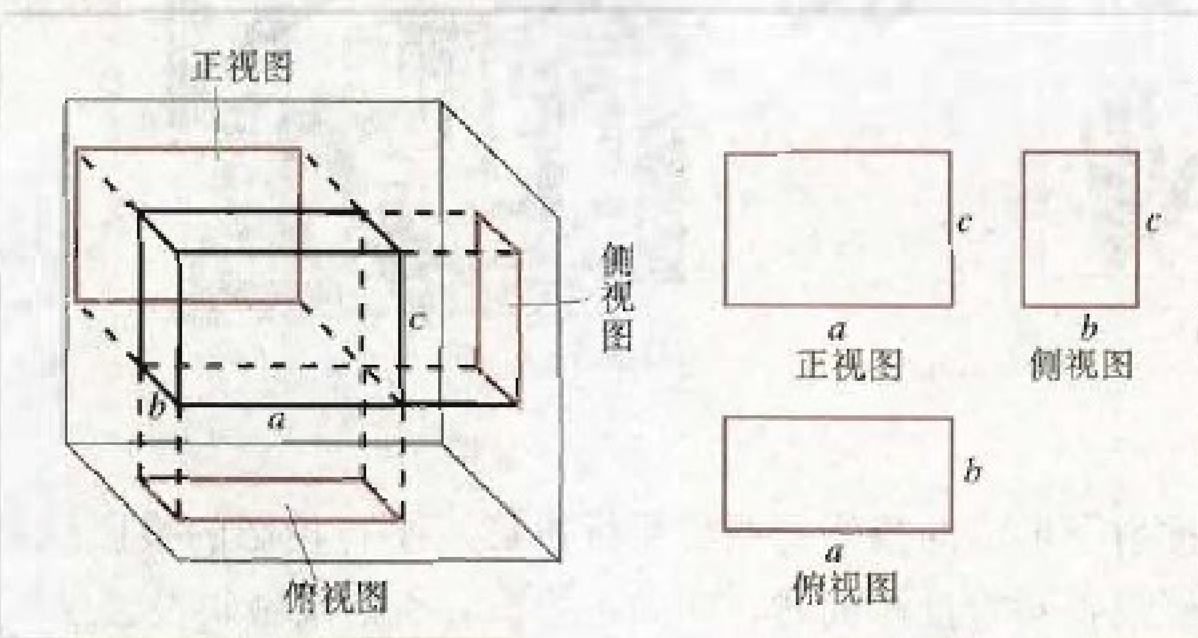


图 1.2-4

一般地，侧视图在正视图的右边，俯视图在正视图的下边.

观察

正视图、侧视图和俯视图分别是从几何体的正前方、正左方和正上方观察到的几何体的正投影图，它们都是平面图形. 观察长方体的三视图，你能得出同一个几何体的正视图、侧视图和俯视图在形状、大小方面的关系吗？

由图 1.2-4 可以发现，长方体的三视图都是长方形，正视图和侧视图、侧视图和俯视图、俯视图和正视图都各有一条边长相等.

一般地，一个几何体的侧视图和正视图高度一样，俯视图与正视图长度一样，侧视图与俯视图宽度一样.

图 1.2-5(1)、(2)分别是圆柱和圆锥的三视图.

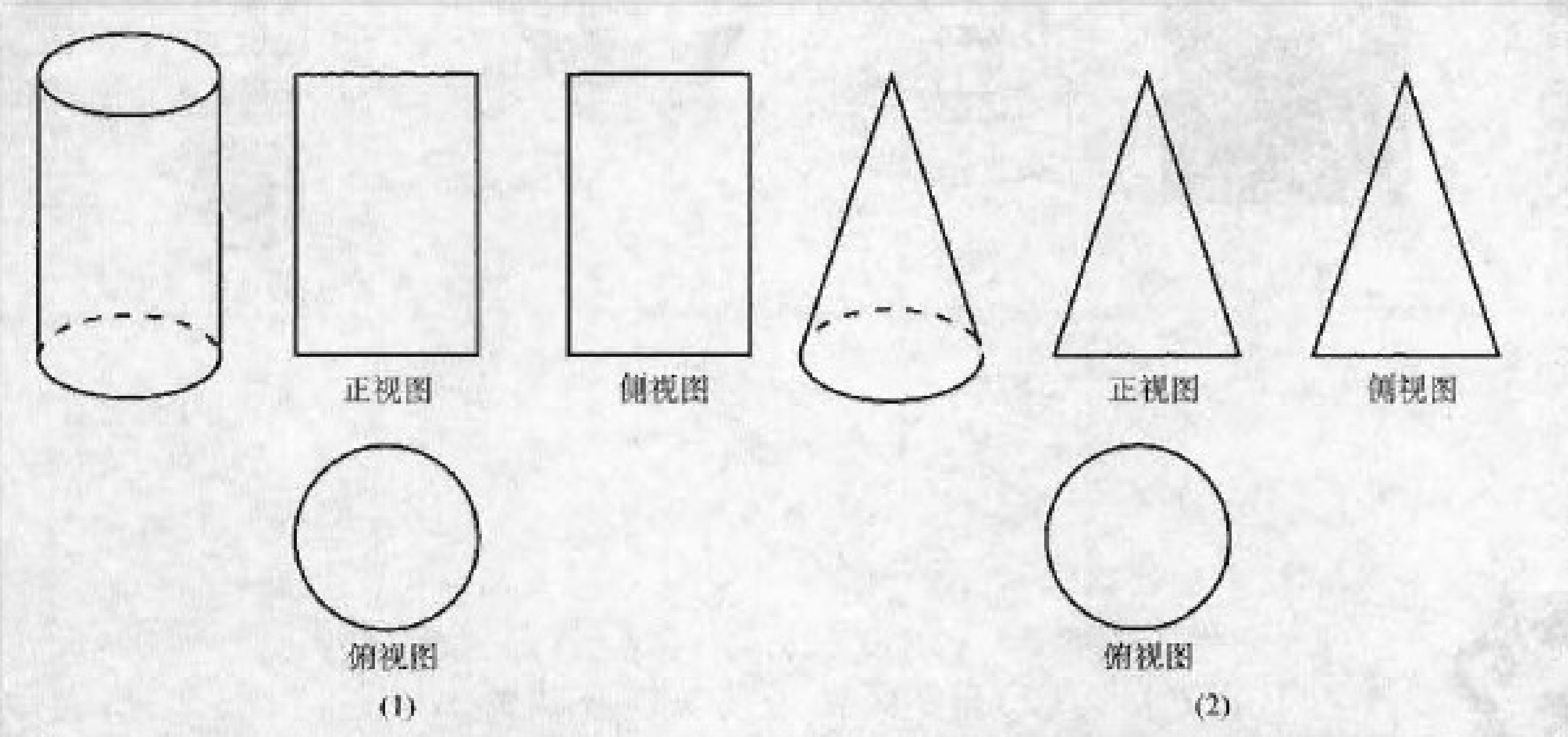


图 1.2-5

思考

图 1.2-6 是一个几何体的三视图，你能说出它对应的几何体的名称吗？

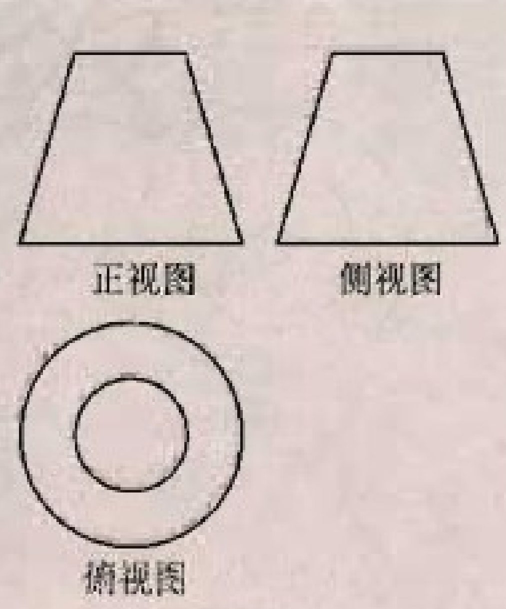


图 1.2-6

图 1.2-6 的三视图表示的几何体是圆台.

画几何体的三视图时，能看见的轮廓线和棱用实线表示，不能看见的轮廓线和棱用虚线表示.

2. 简单组合体的三视图

下列物体表示的几何体是一些简单几何体的组合体，你能画出它们的三视图吗？

对于简单几何体的组合体，一定要认真观察，先认识它的基本结构，然后画它的三视图. 图 1.2-7（1）是我们熟悉的一种容器，容器的主要几何结构，从上往下分别是圆柱、圆台和圆柱，它的三视图如图 1.2-8 所示. 图 1.2-7(2)、(3)、(4)的三视图请同学们自己画出.

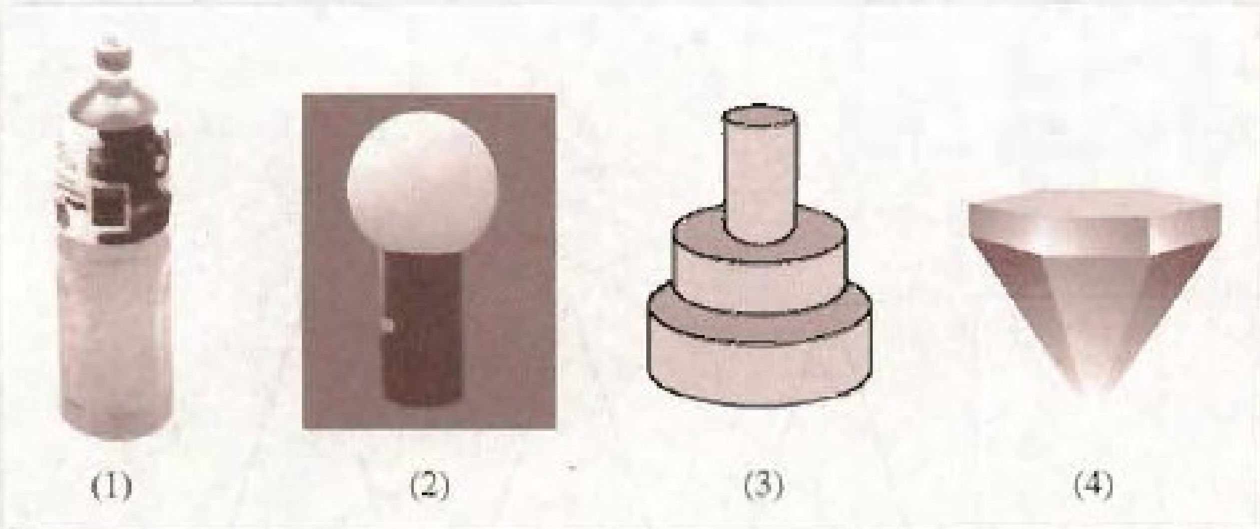


图 1.2-7

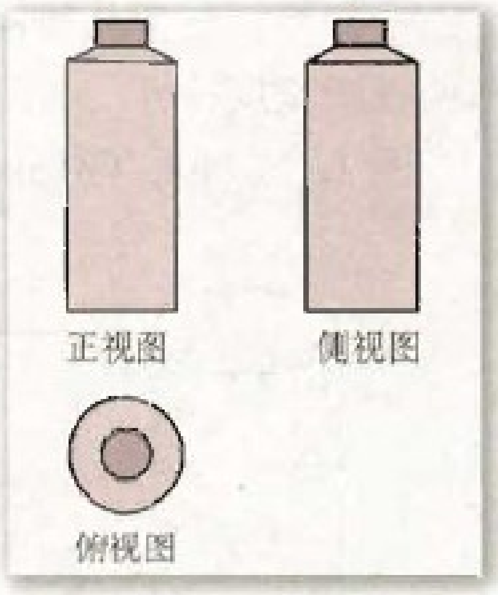


图 1.2-8

思考

图 1.2-9(1)、(2)分别是两个简单组合体的三视图，想象它们表示的组合体的结构特征，并尝试画出它们的示意图（尺寸不作严格要求）.

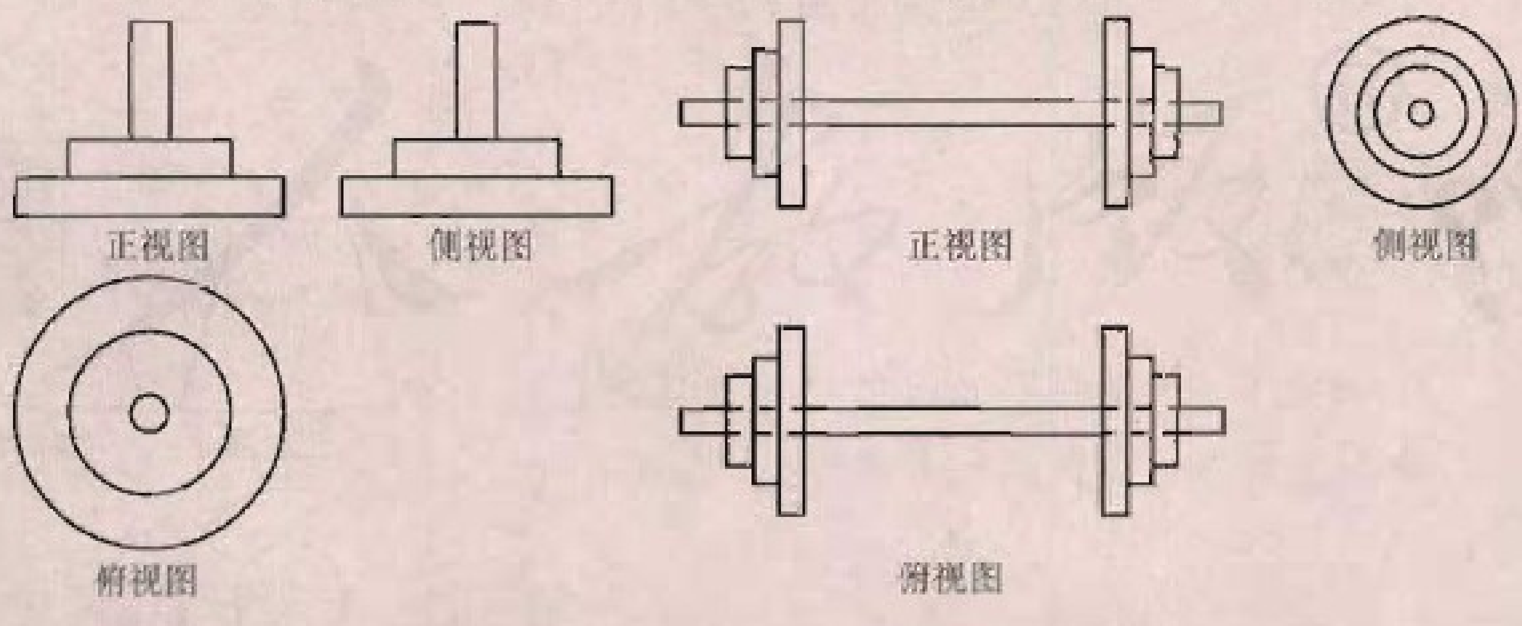
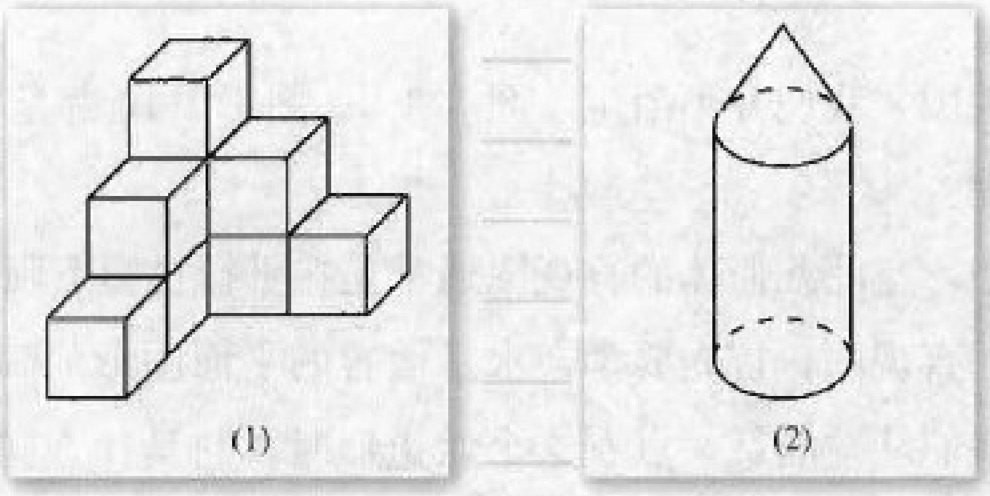


图 1.2-9

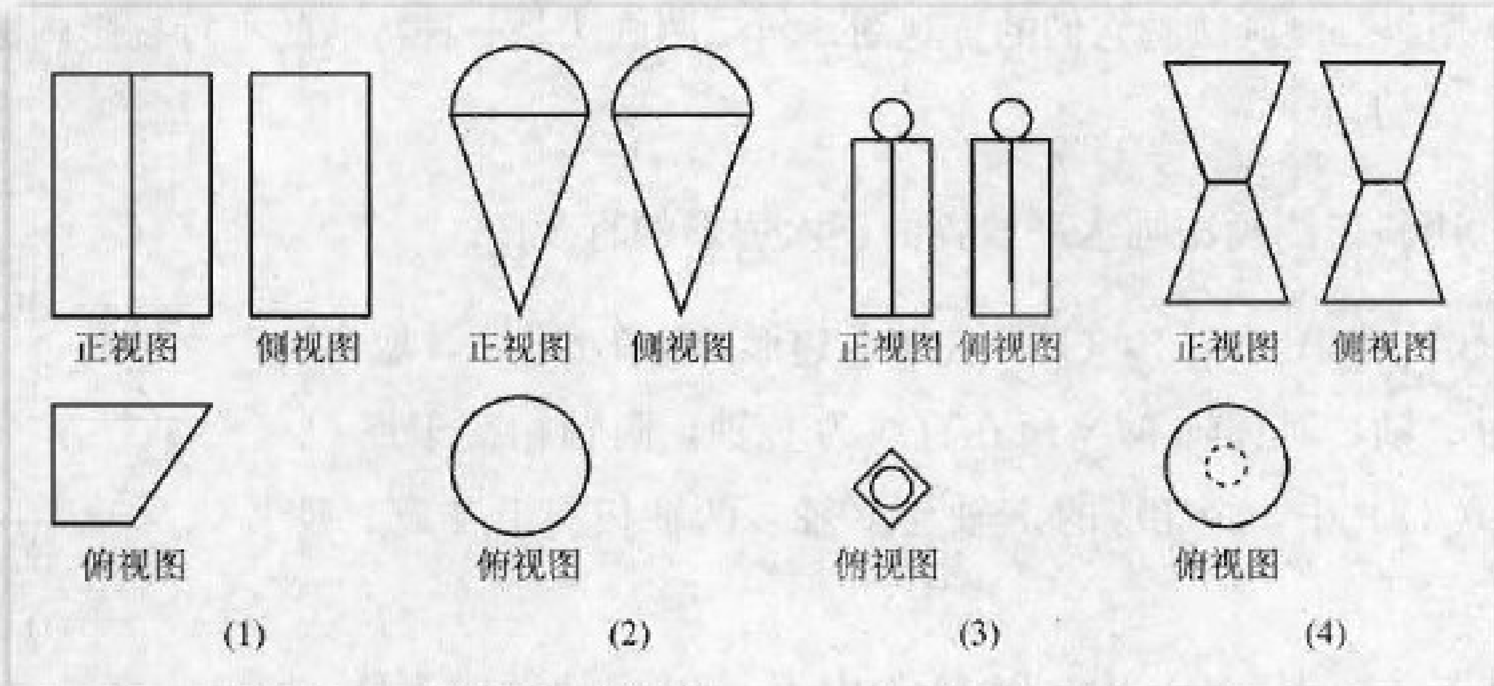
练　习

1. 画出下列几何体的三视图：



(第 1 题)

2. 观察下列几何体的三视图，想象并说出它们的几何结构特征，然后画出它们的示意图：

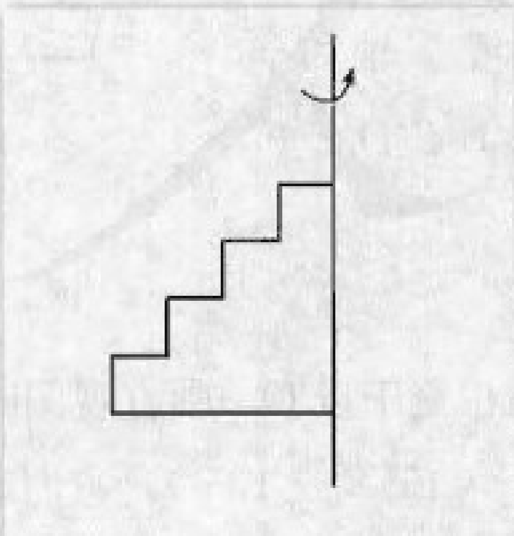


(第 2 题)

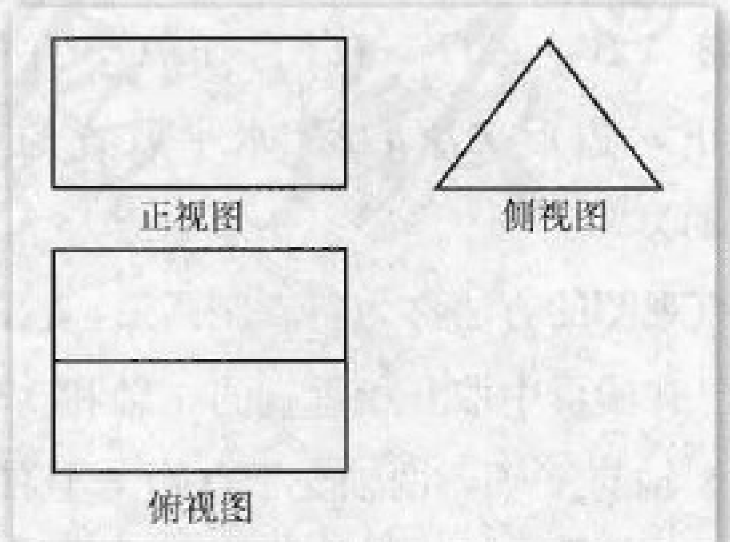
3. 根据下列描述，说出几何体的结构特征，并画出它们的三视图：

（1）由六个面围成，其中一个面是正五边形，其余五个面是全等的等腰三角形的几何体；

（2）如图，由一个平面图形旋转一周形成的几何体.



(第 3(2) 题)



(第 4 题)

4. 如图是一个几何体的三视图，想象它的几何结构特征，并说出它的名称.

1.2.3 空间几何体的直观图

对于几何体的直观图，我们并不陌生．图 1.1-2—图 1.1-10 都是相应几何体的直观图．它们是怎样画出来的呢？

在立体几何教学中，空间几何体的直观图通常是在平行投影下画出的空间图形．

要画空间几何体的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的画法．例如，在桌面上放置一个正六边形，我们从空间某一点看这个六边形时，它是什么样子？如何画出它的直观图？

下面我们以正六边形为例，说明水平放置的平面图形的直观图画法．对于平面多边形，我们常用斜二测画法画它们的直观图．斜二测画法是一种特殊的平行投影画法．

例 1　用斜二测画法画水平放置的正六边形的直观图．

画法：(1) 如图 1.2-10 (1)，在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 所在直线为 x 轴，对称轴 MN 所在直线为 y 轴，两轴相交于点 O．在图 1.2-10 (2) 中，画相应的 x'轴与 y'轴，两轴相交于点 O'，使 $\angle x'O'y'=45°$．

(2) 在图 1.2-10 (2) 中，以 O'为中点，在 x'轴上取 $A'D'=AD$，在 y'轴上取 $M'N'=\frac{1}{2}MN$．以点 N'为中点，画 $B'C'$平行于 x'轴，并且等于 BC；再以 M'为中点，画 $E'F'$平行于 x'轴，并且等于 EF．

(3) 连接 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$，并擦去辅助线 x'轴和 y'轴，便获得正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'E'F'$ (图 1.2-10(3))．

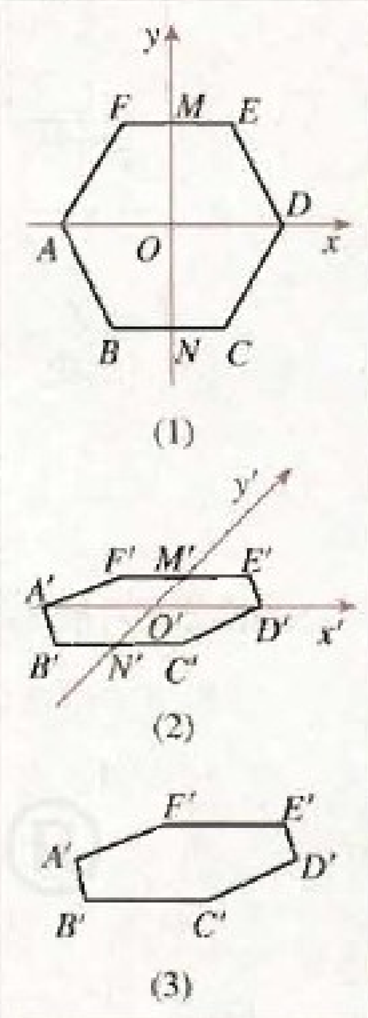


图 1.2-10

上述画直观图的方法称为斜二测画法，它的步骤是：

(1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O．画直观图时，把它们画成对应的 x'轴与 y'轴，两轴交于点 O'，且使 $\angle x'O'y'=45°$ (或 135°)，它们确定的平面表示水平面．

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段．

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半．

生活经验告诉我们，水平放置的圆看起来非常像椭圆．在实际画水平放置的圆的直观图时，我们常用如图 1.2-11 所示的椭圆模板．

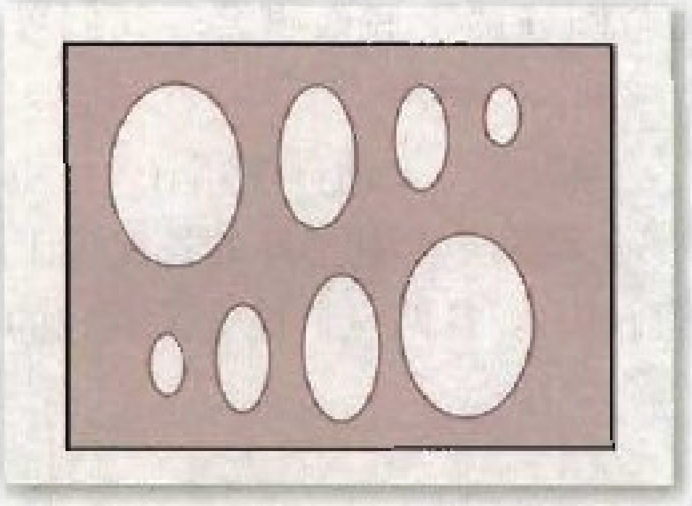


图 1.2-11

立体几何中，常用正等测画法画水平放置的圆．

下面我们探求空间几何体的直观图的画法．

例 2　用斜二测画法画长、宽、高分别是 4 cm、3 cm、2 cm的长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$的直观图．

画法：(1) 画轴．如图 1.2-12，画 x 轴、y 轴、z 轴，三轴相交于点 O，使$\angle xOy=45°$，$\angle xOz=90°$．

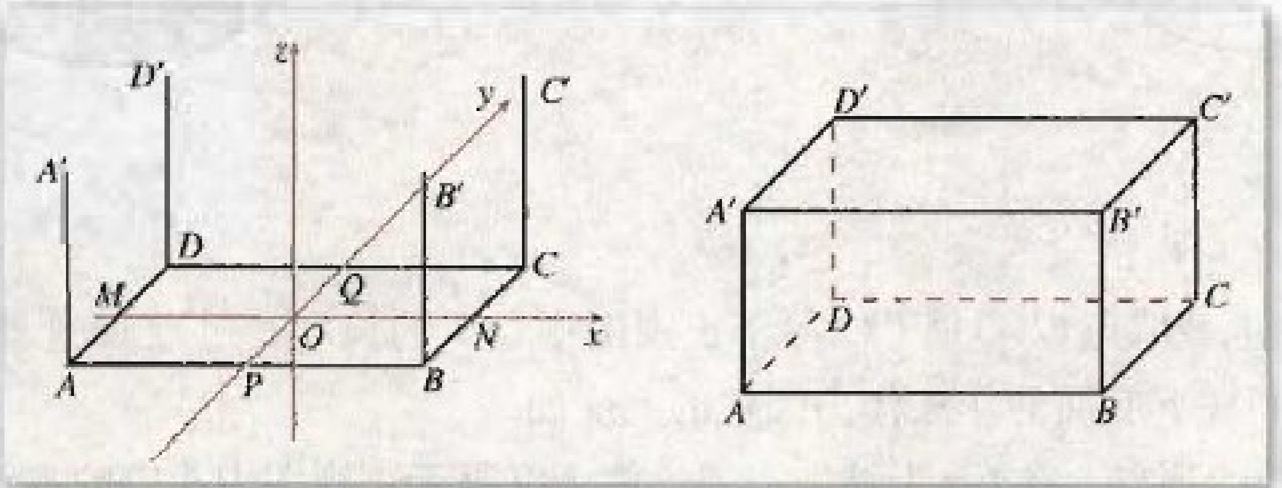


图 1.2-12

(2) 画底面．以点 O 为中点，在 x 轴上取线段 MN，使 $MN=4$ cm；在 y 轴上取线段 PQ，使 $PQ=\frac{3}{2}$ cm．分别过点 M 和 N 作 y 轴的平行线，过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线，设它们的交点分别为 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面$ABCD$．

画几何体的直观图时，如果不作严格要求，图形尺寸可以适当选取．用斜二测画法画图的角度也可以自定，但要求图形具有一定的立体感．

(3) 画侧棱．过 A，B，C，D 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 2 cm 长的线段 AA'，BB'，CC'，DD'．

(4) 成图．顺次连接 A'，B'，C'，D'，并加以整理（去掉辅助线，将被遮挡的部分改为虚线），就得到长方体的直观图．

例3 如图 1.2-13，已知几何体的三视图，用斜二测画法画出它的直观图.

分析：由几何体的三视图知道，这个几何体是一个简单组合体. 它的下部是一个圆柱，上部是一个圆锥，并且圆锥的底面与圆柱的上底面重合. 我们可以先画出下部的圆柱，再画出上部的圆锥.

画法：(1) 画轴. 如图 1.2-14 (1)，画 x 轴、z 轴，使 $\angle xOz=90°$.

(2) 画圆柱的下底面. 在 x 轴上取 A，B 两点，使 AB 的长度等于俯视图中圆的直径，且 $OA=OB$. 选择椭圆模板中适当的椭圆过 A，B 两点，使它为圆柱的下底面.

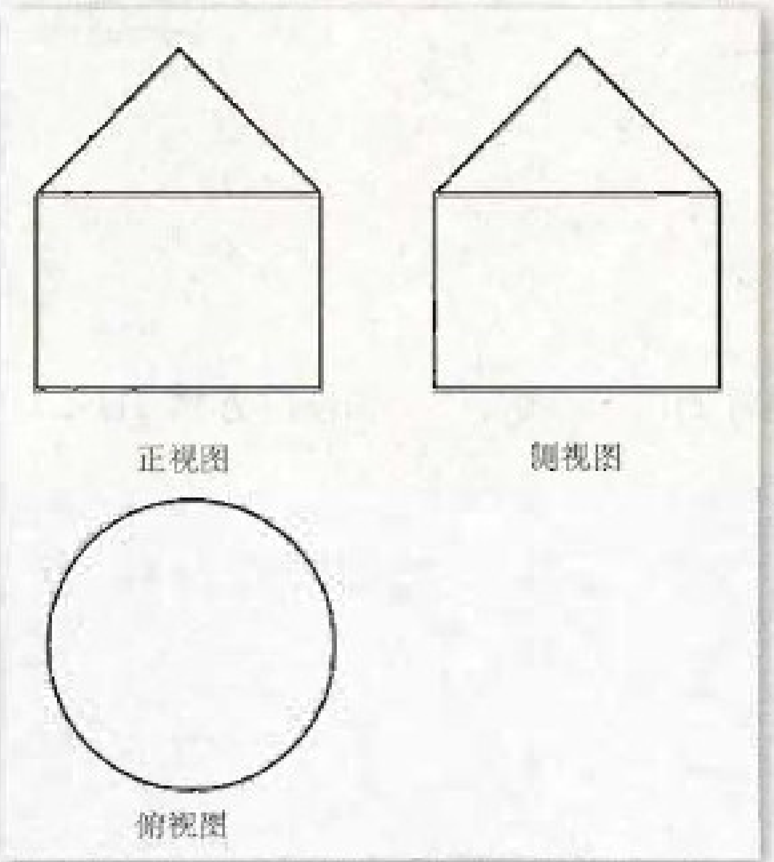


图 1.2-13

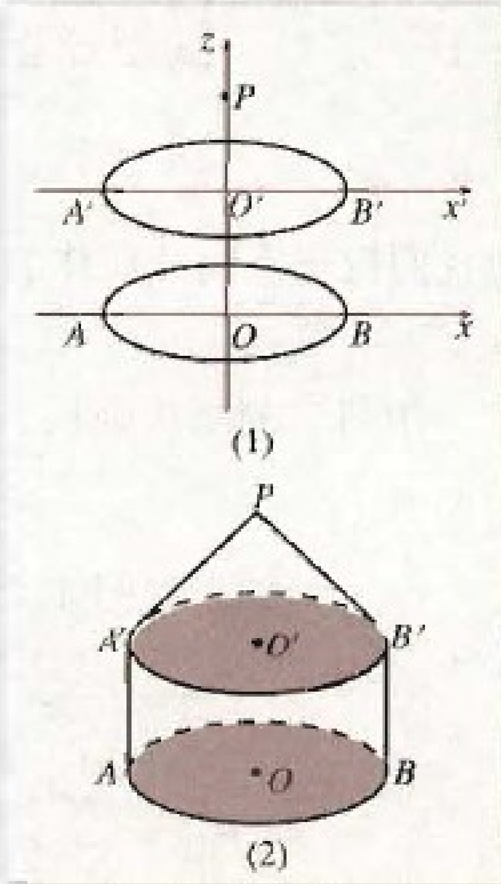


图 1.2-14

(3) 在 Oz 上截取点 O'，使 OO' 等于正视图中 OO' 的长度，过点 O' 作平行于轴 Ox 的轴 $O'x'$，类似圆柱下底面的作法作出圆柱的上底面.

(4) 画圆锥的顶点. 在 Oz 上截取点 P，使 PO' 等于正视图中相应的高度.

(5) 成图. 连接 PA'，PB'，AA'，BB'，整理得到三视图表示的几何体的直观图（图 1.2-14(2)）.

空间几何体的三视图与直观图有着密切的联系，我们能够由空间几何体的三视图得到它的直观图. 同时，也能够由空间几何体的直观图得到它的三视图.

从投影的角度看，三视图和用斜二测画法画出的直观图都是在平行投影下画出来的空间图形. 在中心投影下，也可以画出空间图形. 图 1.2-15(1)是中心投影下正方体的直观图，它与平行投影下正方体的直观图（图 1.2-15(2)）有什么联系与区别呢?

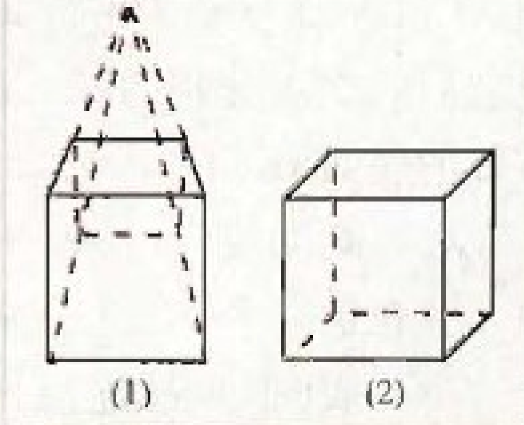


图 1.2-15

空间几何体在平行投影与中心投影下有不同的表现形式，我们可以根据问题的实际情况，选择不同的表现方式.

探究

（1）图 1.2-16 是一个奖杯的三视图，你能想象出它的几何结构特征，并画出它的直观图吗？

（2）空间几何体的三视图和直观图能够帮助我们从不同侧面、不同角度认识几何体的结构，它们各有哪些特点？二者有何关系？

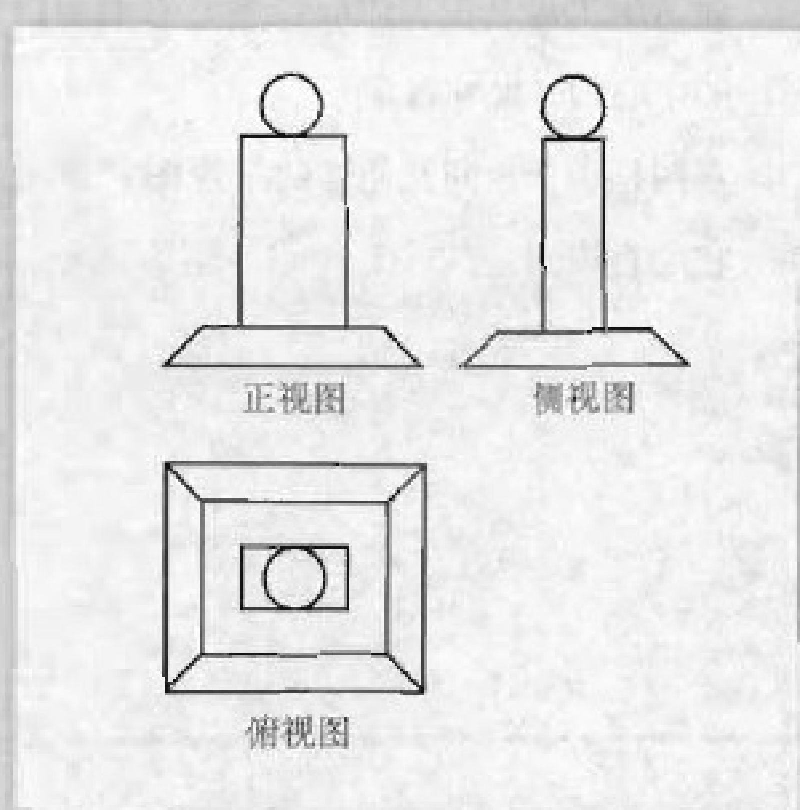


图 1.2-16

练　习

1. 用斜二测画法画出下列水平放置的平面图形的直观图（尺寸自定）：

　　（1）任意三角形；　　（2）平行四边形；

　　（3）正八边形.

2. 判断下列结论是否正确，正确的在括号内画"√"，错误的画"×".

　　（1）角的水平放置的直观图一定是角.（　　）

　　（2）相等的角在直观图中仍然相等.（　　）

　　（3）相等的线段在直观图中仍然相等.（　　）

　　（4）若两条线段平行，则在直观图中对应的两条线段仍然平行.（　　）

3. 利用斜二测画法得到的

　　① 三角形的直观图是三角形.

　　② 平行四边形的直观图是平行四边形.

　　③ 正方形的直观图是正方形.

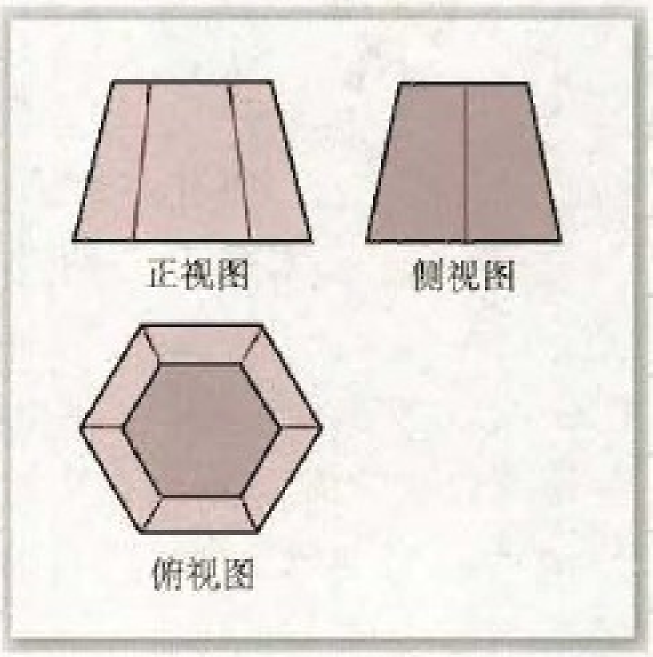
　　④ 菱形的直观图是菱形.

　　以上结论，正确的是（　　）

　　（A）①②　　（B）①　　（C）③④　　（D）①②③④

4. 用斜二测画法画出五棱锥 P-$ABCDE$ 的直观图，其中底面 $ABCDE$ 是正五边形，点 P 在底面的投影是正五边形的中心 O（尺寸自定）.

5. 右图是一个空间几何体的三视图，试用斜二测画法画出它的直观图.

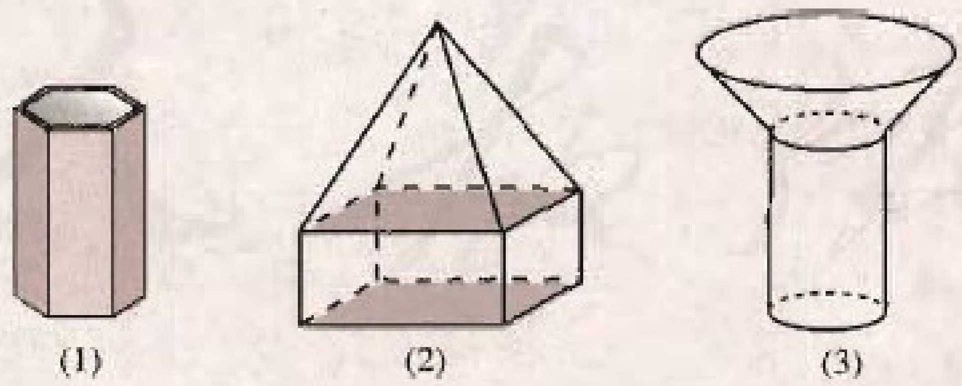


（第5题）

习题1.2

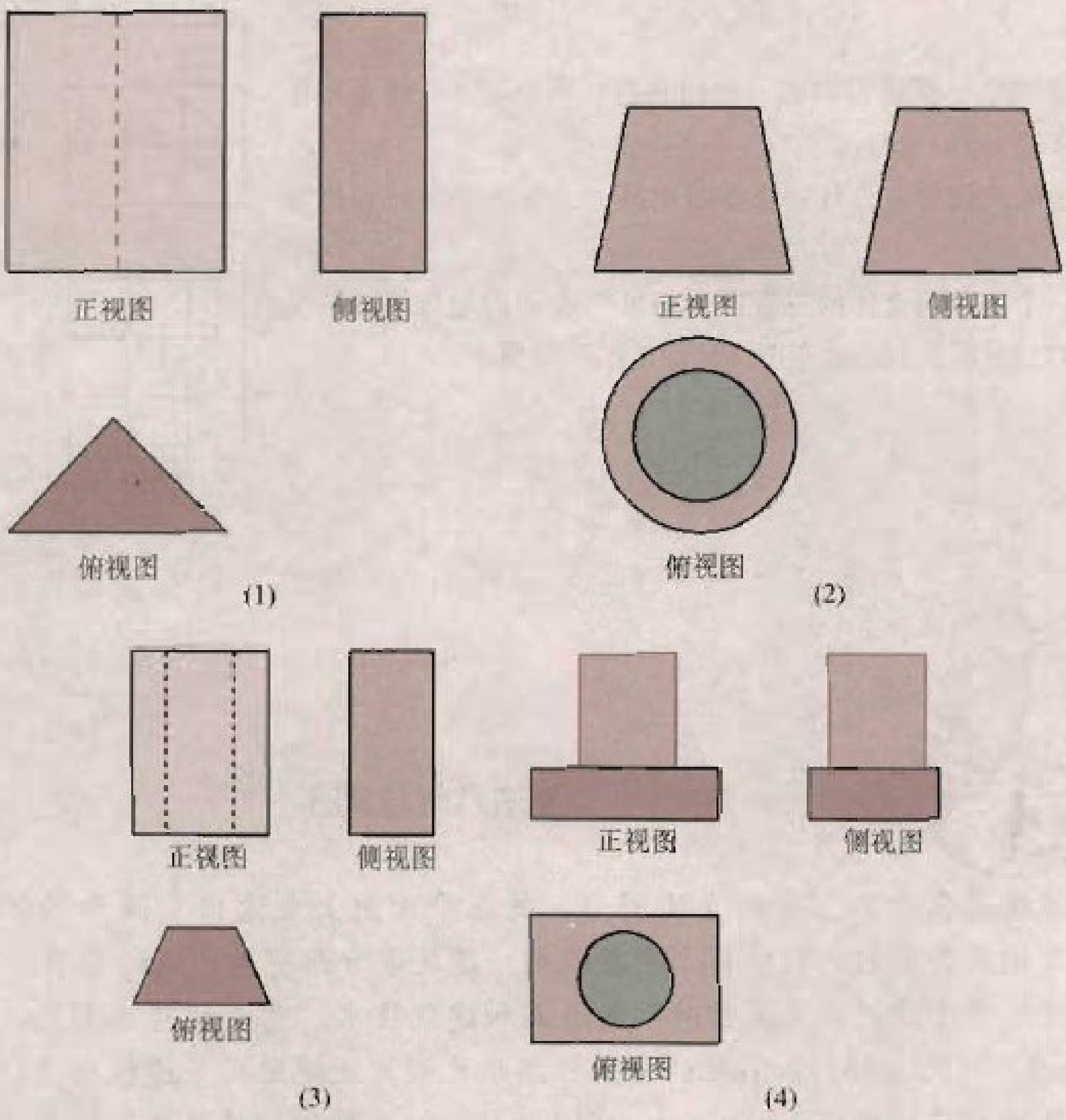
A 组

1. 画出下列物体表示的几何体的三视图（尺寸不作严格要求）：



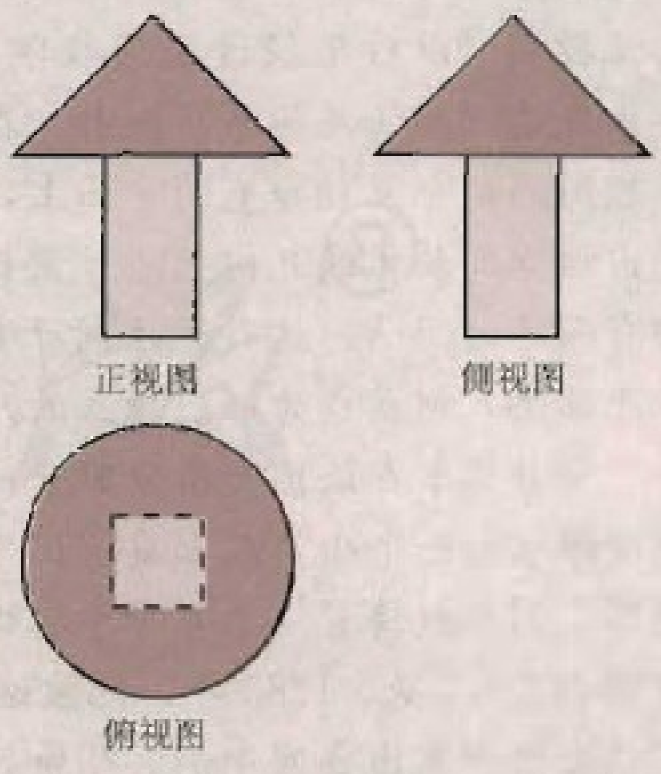
（第1题）

2. 根据下列三视图，想象对应的几何体：



（第 2 题）

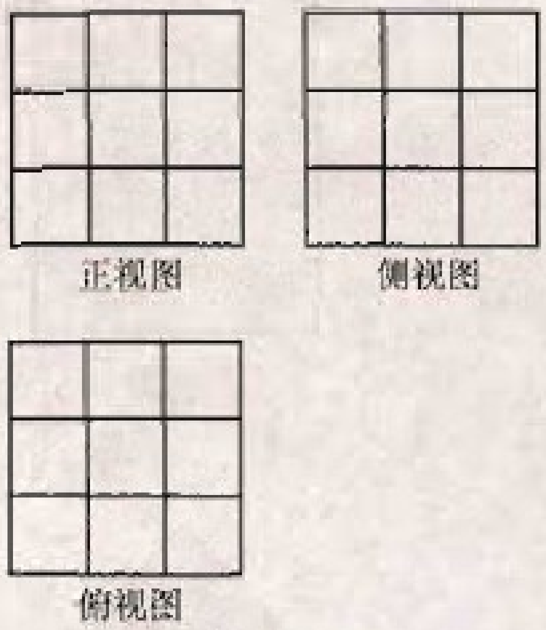
3. 根据第 2 题给出的三视图，利用硬纸制作相应的实物模型.
4. 用斜二测画法画出水平放置的一角为 60°，边长为 4 cm 的菱形的直观图.
5. 如图，已知几何体的三视图，想象对应的几何体的结构特征，并画出它的直观图.



（第 5 题）

B 组

1. 画出你学校中一座建筑物的三视图和直观图（尺寸、线条不作严格要求）.
2. 用学习过的几何体，设计一个学习用品，并在小组中解释你的设计.
3. 如图是一个简单组合体的三视图，想象它表示的组合体的结构特征，并尝试画出它的示意图（尺寸不作严格要求）.



（第 3 题）

画法几何与蒙日

画法几何就是在平面上绘制空间图形，并在平面图上表达出空间原物体各部分的大小、位置以及相互关系的一门学科. 它在绘画、建筑等方面有着广泛的应用.

画法几何起源于欧洲文艺复兴时期的绘画和建筑技术. 意大利艺术家达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452—1519）在他的绘画作品中已经广泛地运用了透视理论，主要是中心投影. 法国数学家笛沙格（Desargues，1591—1661）在他的“透视法”中给出了空间几何体透视像的画法，以及如何从平面图中正确地计算出几何体的尺寸大小的方法，主要是运用正投影。以后又经过法国数学家蒙日（Monge，1746—1818）的深入研究，并在 1799 年出版了《画法几何学》一书. 在该书中，蒙日第一次详细阐述了怎样把空间（三维）物体投影到两个互相垂直的平面上，并根据投影原理（这种原理后来发展成射影几何学）推断出该空间物体的几何性质. 蒙日的《画法几何学》一书不论是在概念上，还是在方法上都有深远的影响. 这种方法对于建筑学、军事学、机械制图等方面都有极大的实用价值，从此画法几何就成为一门独立的几何分支学科. 蒙日成为画法几何的创始人.

蒙日生长在法国大革命时代，曾任海军部长，并创立了巴黎多科工艺学校. 他出生在迪隆附近的一个小商人家庭，16 岁就在里昂学院任讲师，他熟练地以比例尺绘出他家乡的地图，因而被梅育爱尔军事学院聘为绘图员. 1768 年，蒙日在梅育爱尔担任数学教授，那时他只有 23 岁. 1780 年，他被选为巴黎科学院院士，迁居巴黎后曾在海军学校教书. 为了从数据中算出要塞中炮兵阵地的位置，蒙日用几何方法避开了麻烦的计算，他用二维平面上的适当投影来表达三维物体的聪明方法，在实际中有着广泛的应用，并导致画法几何的产生. 法国大革命前后，由于军事建筑上的迫切需要，蒙日的画法几何方法被列为军事秘密，所以很久未能公诸于世，直到当时的军事约束解除后，蒙日才公布了他的研究成果，这已是他建立画法几何之后 30 年的事了.

1.3 空间几何体的表面积与体积

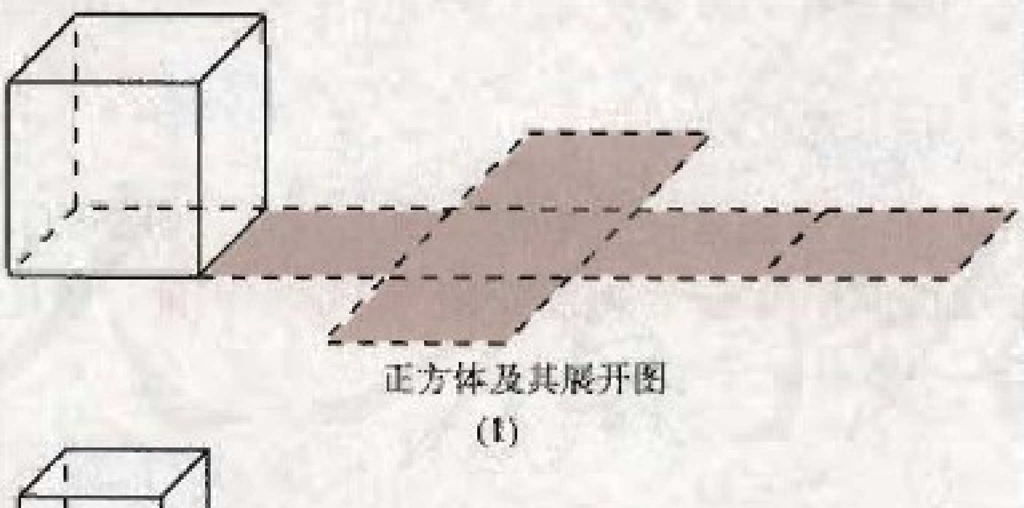
前面，我们分别从几何结构特征和视图两个方面认识了空间几何体. 下面我们来学习空间几何体的表面积和体积. 表面积是几何体表面的面积，它表示几何体表面的大小，体积是几何体所占空间的大小.

1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积

1. 柱体、锥体、台体的表面积

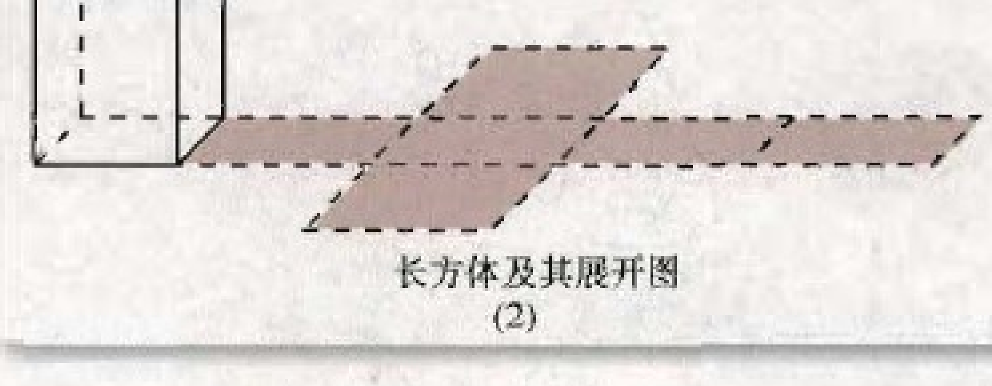
思考

在初中，我们已经学习了正方体和长方体的表面积，以及它们的展开图（图1.3-1），你知道上述几何体的展开图与其表面积的关系吗？



正方体及其展开图

(1)



长方体及其展开图

(2)

图 1.3-1

正方体、长方体是由多个平面图形围成的多面体，它们的表面积就是各个面的面积的和，也就是展开图的面积.

一般地，我们可以把多面体展成平面图形，利用平面图形求面积的方法，求多面体的表面积.

探究

棱柱、棱锥、棱台也是由多个平面图形围成的多面体，它们的展开图是什么？如何计算它们的表面积？

例1 已知棱长为 a，各面均为等边三角形的四面体 $S\text{-}ABC$（图 1.3-2），求它的表面积.

分析：由于四面体 $S\text{-}ABC$ 的四个面是全等的等边三角形，所以四面体的表面积等于其中任何一个面面积的 4 倍.

解：先求 $\triangle SBC$ 的面积，过点 S 作 $SD\perp BC$，交 BC 于点 D.

因为 $BC=a$，

$$SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

所以 $$S_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SD=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

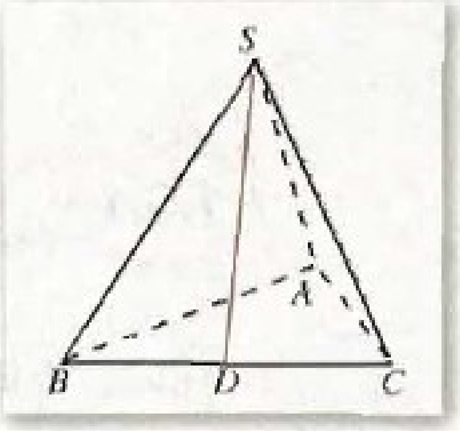


图 1.3-2

因此，四面体 $S\text{-}ABC$ 的表面积

$$S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2.$$

思考

如何根据圆柱、圆锥的几何结构特征，求它们的表面积？

我们知道，圆柱的侧面展开图是一个矩形（图1.3-3）. 如果圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，那么圆柱的底面面积为 πr^2，侧面面积为 $2\pi rl$. 因此，圆柱的表面积

$$S=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l).$$

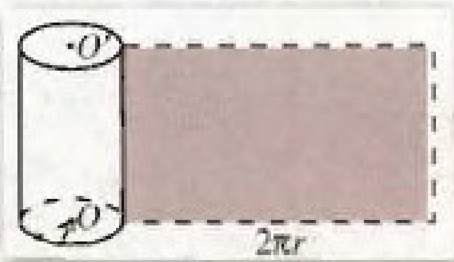


图 1.3-3

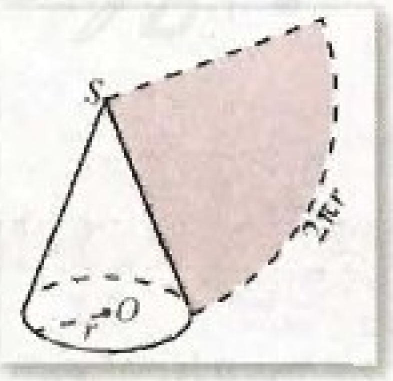


图 1.3-4

将空间图形问题转化为平面图形问题，是解决立体几何问题基本的、常用的方法.

圆锥的侧面展开图是一个扇形（图 1.3-4）. 如果圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，那么它的表面积

$$S=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l).$$

探究

(1) 联系圆柱和圆锥的展开图，你能想象圆台展开图的形状，并且画出它吗？

(2) 如果圆台的上、下底面半径分别为 r'，r，母线长为 l，你能计算出它的表面积吗？

圆台的侧面展开图是一个扇环（图 1.3-5），它的表面积等于上、下两个底面的面积和加上侧面的面积，即

$$S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl).$$

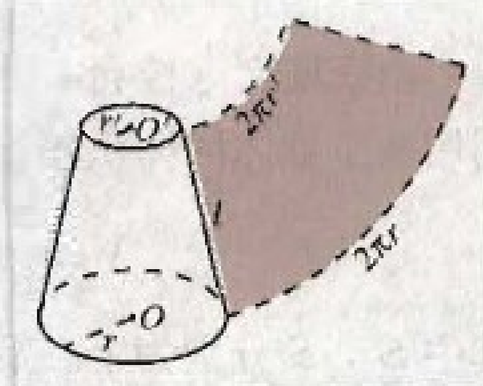


图 1.3-5

例 2 如图 1.3-6，一个圆台形花盆盆口直径为 20 cm，盆底直径为15 cm，底部渗水圆孔直径为 1.5 cm，盆壁长15 cm. 为了美化花盆的外观，需要涂油漆. 已知每平方米用 100 毫升油漆，涂 100 个这样的花盆需要多少油漆（π 取 3.14，结果精确到 1 毫升，可用计算器）？

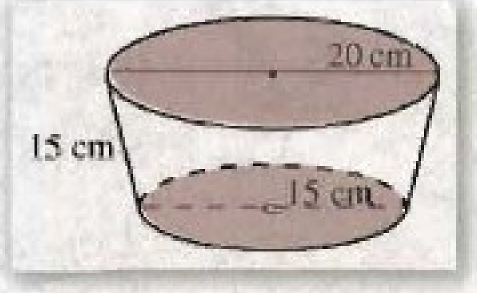


图 1.3-6

分析：只要求出每一个花盆外壁的表面积，就可求出油漆的用量. 而花盆外壁的表面积等于花盆的侧面面积加上底面面积，再减去底面圆孔的面积.

解：如图 1.3-6，由圆台的表面积公式得一个花盆外壁的表面积

$$S=\pi\times\left[\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\times15+\frac{20}{2}\times15\right]-\pi\times\left(\frac{1.5}{2}\right)^2$$
$$\approx1000(\text{cm}^2)=0.1(\text{m}^2).$$

涂 100 个花盆需油漆：$0.1\times100\times100=1000$(毫升).

答：涂 100 个这样的花盆约需要 1000 毫升油漆.

2. 柱体、锥体与台体的体积

我们已经学习了计算特殊的棱柱——正方体、长方体，以及圆柱的体积公式. 它们的体积公式可以统一为

$$V=Sh\ (S\text{ 为底面面积，}h\text{ 为高}).$$

一般柱体的体积也是

$$V=Sh,$$

其中 S 为底面面积，h 为柱体的高.

圆锥的体积公式是

> 棱柱（圆柱）的高是指两底面之间的距离，即从一底面上任意一点向另一个底面作垂线，这点与垂足（垂线与底面的交点）之间的距离.

$$V=\frac{1}{3}Sh\ (S\text{ 为底面面积，}h\text{ 为高})，$$

它是同底等高的圆柱的体积的$\frac{1}{3}$.

棱锥（圆锥）的高是指从顶点向底面作垂线，顶点与垂足（垂线与底面的交点）之间的距离.

棱锥的体积也是同底等高的棱柱体积的$\frac{1}{3}$，即棱锥的体积

$$V=\frac{1}{3}Sh\ (S\text{ 为底面面积，}h\text{ 为高}).$$

由此可见，棱柱与圆柱的体积公式类似，都是底面面积乘高；棱锥与圆锥的体积公式类似，都是底面面积乘高的$\frac{1}{3}$.

由于圆台（棱台）是由圆锥（棱锥）截成的，因此可以利用两个锥体的体积差，得到圆台（棱台）的体积公式

$$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h,$$

其中 S'，S 分别为上、下底面面积，h 为圆台（棱台）高.

此公式可以证明. 圆台（棱台）的高是指两个底面之间的距离.

思考？

比较柱体、锥体、台体的体积公式：

$V_{柱体}=Sh$（S 为底面积，h 为柱体高）；

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为锥体高）；

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$（$S'$，$S$ 分别为上、下底面面积，h 为台体高）.

你能发现三者之间的关系吗？柱体、锥体是否可以看作“特殊”的台体？其体积公式是否可以看作台体体积公式的“特殊”形式？

例 3 有一堆规格相同的铁制（铁的密度是 7.8 g/cm³）六角螺帽（图 1.3-7）共重5.8 kg，已知底面是正六边形，边长为 12 mm，内孔直径为 10 mm，高为 10 mm，问这堆螺帽大约有多少个（π 取 3.14，可用计算器）？

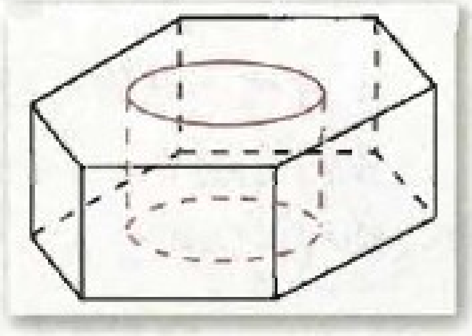


图 1.3-7

分析：六角螺帽表示的几何体是一个组合体，在一个六棱柱中间挖去一个圆柱，因此它的体积等于六棱柱的体积减去圆柱的体积.

解：六角螺帽的体积是六棱柱体积与圆柱体积的差，即

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2\times6\times10-3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times10$$

$\approx 2\,956(\text{mm}^3)$
$=2.956(\text{cm}^3)$.

所以螺帽的个数为

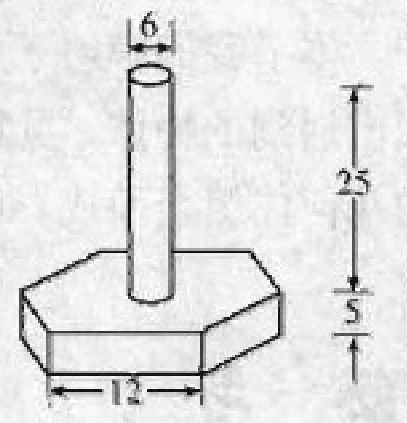
$5.8\times1000\div(7.8\times2.956)\approx252$(个)．

答：这堆螺帽大约有 252 个．

求组合体的表面积和体积时，要注意组合体的结构特征，避免重叠和交叉等．

练　习

1. 已知圆锥的表面积为 a m²，且它的侧面展开图是一个半圆，求这个圆锥的底面直径．
2. 右图是一种机器零件，零件下面是六棱柱（底面是正六边形，侧面是全等的矩形）形，上面是圆柱（尺寸如图，单位：mm）形．电镀这种零件需要用锌，已知每平方米用锌 0.11 kg，问电镀10 000个零件需锌多少千克（结果精确到 0.01 kg）？



（第 2 题）

1.3.2　球的体积和表面积

1. 球的体积

设球的半径为 R，它的体积只与半径 R 有关，是以 R 为自变量的函数．

事实上，如果球的半径为 R，那么它的体积

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

这个公式以后可以证明．

2. 球的表面积

设球的半径为 R，它的表面积由半径 R 惟一确定，即它的表面积 S 也是以 R 为自变量的函数．

事实上，如果球的半径为 R，那么它的表面积

$$S=4\pi R^2.$$

这个公式以后可以证明．

例 4　如图 1.3-8，圆柱的底面直径与高都等于球的直径．求证：

(1) 球的体积等于圆柱体积的 $\frac{2}{3}$；

（2）球的表面积等于圆柱的侧面积.

证明：（1）设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$.

因为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，

$V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$，

所以，$V_{球}=\frac{2}{3}V_{圆柱}$.

（2）因为 $S_{球}=4\pi R^2$，

$S_{圆柱侧}=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$，

所以，$S_{球}=S_{圆柱侧}$.

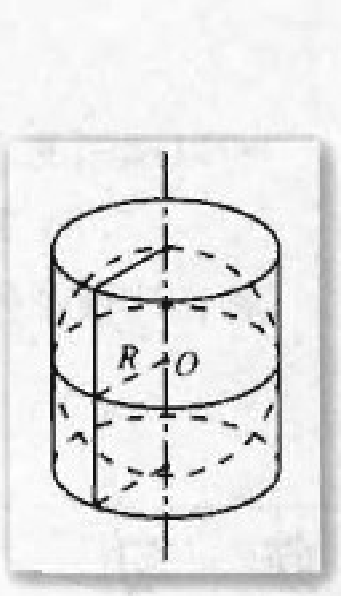


图 1.3-8

本节我们学习了柱体、锥体、台体、球体的表面积与体积的计算方法. 在生产、生活中我们遇到的物体，虽然形状往往比较复杂，但是很多物体的形状都可以看作是由这些简单的几何体组合而成，它们的表面积与体积可以转化为这些简单几何体的表面积与体积的和.

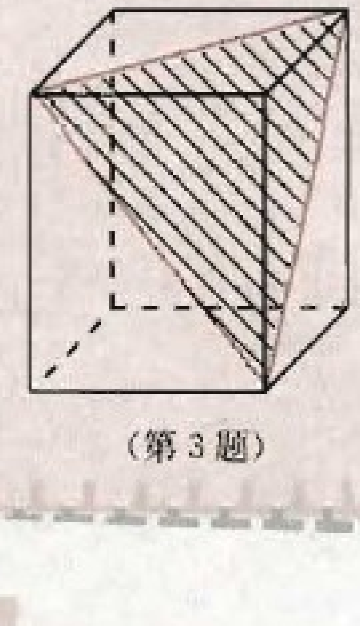
练 习

1. 将一个气球的半径扩大 1 倍，它的体积扩大到原来的几倍？
2. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 a cm，求球的体积.
3. 一个球的体积是 100 cm^3，试计算它的表面积（π 取 3.14，结果精确到 1 cm^2，可用计算器）.

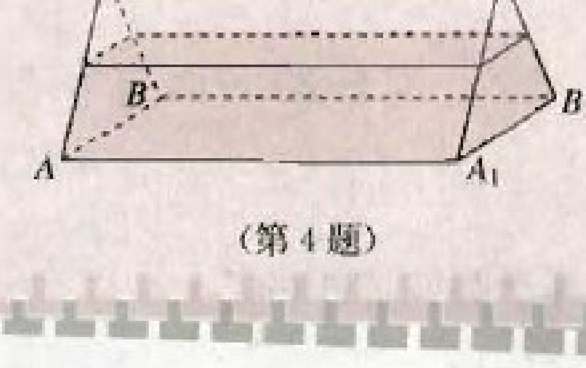
习 题 1.3

A 组

1. 五棱台的上、下底面均是正五边形，边长分别是 8 cm 和 18 cm，侧面是全等的等腰梯形，侧棱长是 13 cm，求它的侧面面积.
2. 已知圆台的上、下底面半径分别是 r，R，且侧面面积等于两底面积之和，求圆台的母线长.
3. 如图，将一个长方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥，求棱锥的体积与剩下的几何体体积的比.



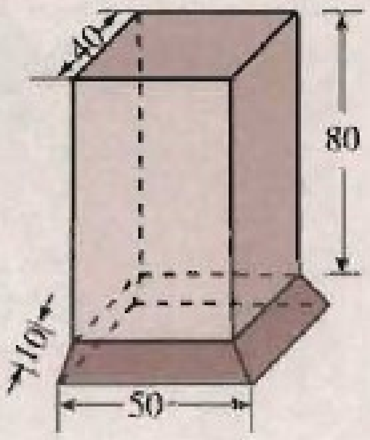
（第 3 题）



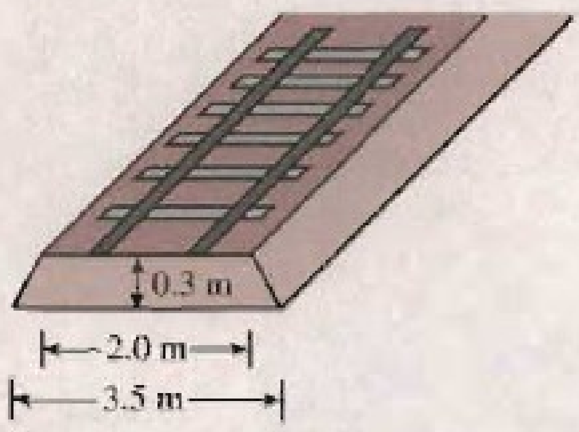
（第 4 题）

4. 如图，一个三棱柱形容器中盛有水，且侧棱 $AA_1=8$. 若侧面 AA_1B_1B 水平放置时，液面恰好过 AC，BC，A_1C_1，B_1C_1 的中点. 当底面 ABC 水平放置时，液面高为多少？

5. 如图是一个烟筒的直观图（图中单位：cm），它的下部是一个四棱台（上、下底面均是正方形，侧面是全等的等腰梯形）形物体；上部是一个四棱柱（底面与四棱台的上底面重合，侧面是全等的矩形）形物体. 为防止雨水的侵蚀，增加美观，需要粘贴瓷砖，需要瓷砖多少平方厘米（结果精确到 1 cm²，可用计算器）？



（第 5 题）

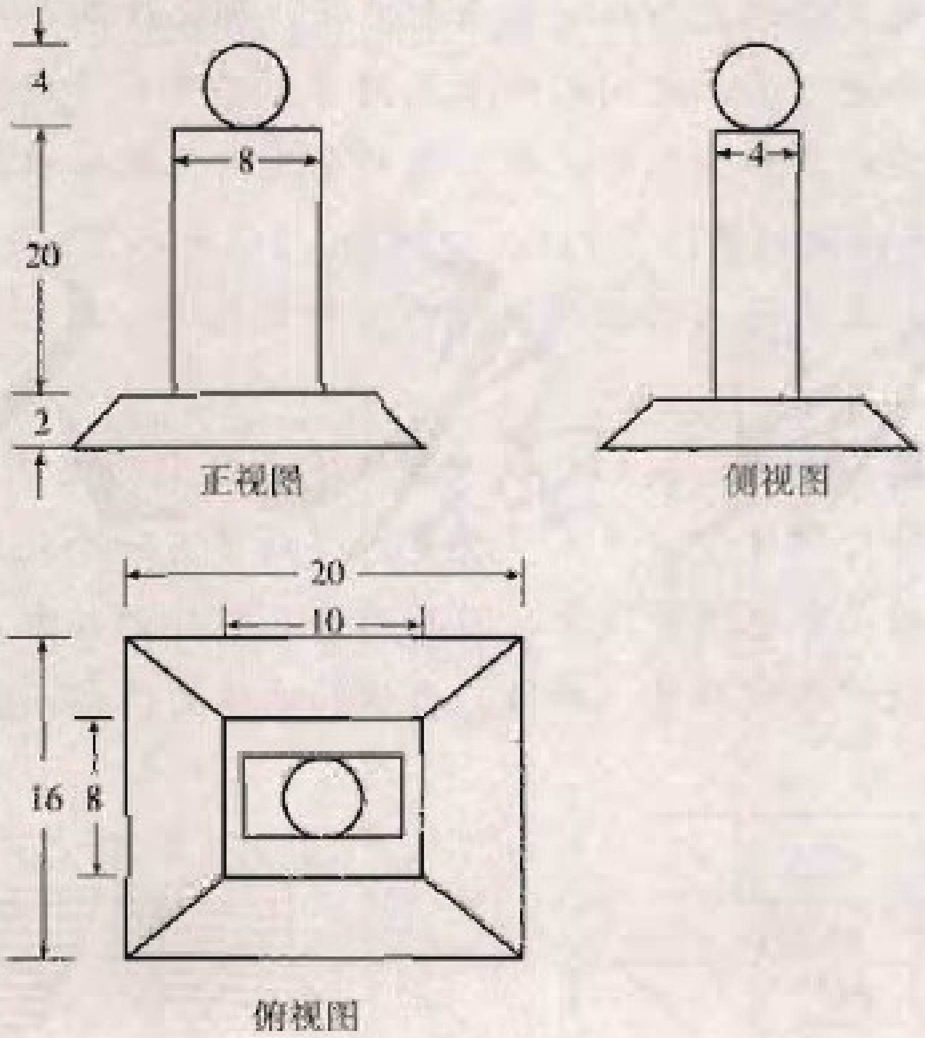


（第 6 题）

6. 我国铁路路基是用碎石铺设的（如图），请你查询北京到上海的铁路长度，并估计所用碎石方数（结果精确到 1 m³，可用计算器）.

B 组

1. 如图是一个奖杯的三视图，试根据奖杯的三视图计算它的表面积和体积（尺寸如图，单位：cm，π 取 3.14，结果分别精确到 1 cm²，1 cm³，可用计算器）.



（第 1 题）

2. 已知三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的侧面均是矩形，求证：它的任意两个侧面的面积和大于第三个侧面的面积.
3. 分别以一个直角三角形的斜边、两直角边所在直线为轴，其余各边旋转一周形成的曲面围成三个几何体，画出它们的三视图和直观图，并探讨它们体积之间的关系.

祖暅原理与柱体、锥体、球体的体积

一、祖暅原理

为了求一般柱体、锥体的体积，我们简要介绍一下祖暅（gèng）原理.

祖暅，字景烁，祖冲之之子，范阳郡蓟县（今河北省涞源县）人，南北朝时代的伟大科学家. 祖暅在数学上有突出贡献，他在实践的基础上，于5世纪末提出下面的体积计算原理：祖暅原理："幂势既同，则积不容异". "势"即是高，"幂"是面积. 意思是，如果两等高的几何体在同高处截得两几何体的截面积恒等，那么这两个几何体的体积相等.

祖暅原理：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.

如图1，夹在平行平面间的两个几何体（它们的形状可以不同），被平行于这两个平面的任何一个平面所截，如果截面（阴影部分）的面积都相等，那么这两个几何体的体积一定相等.

这个原理是非常浅显易懂的. 例如，取一摞纸堆放在桌面上组成一个几何体（图2），将它改变一下形状，这时几何体形状发生了改变，得到了另一个几何体，但两个几何体的高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而两个几何体的体积相等. 利用这个原理和长方体体积公式，我们能够求出柱体、锥体、台体和球体的体积.

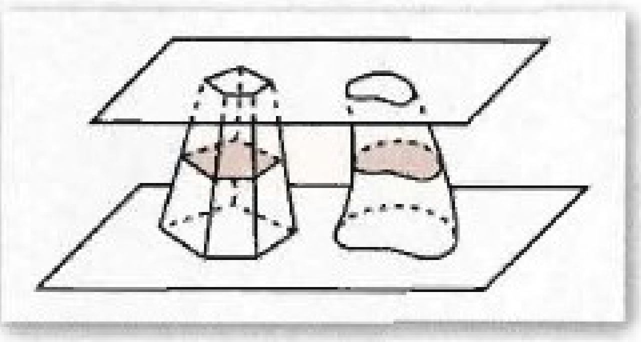


图1

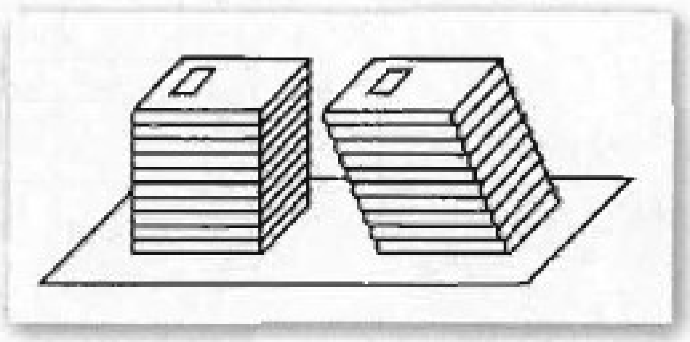


图2

祖暅提出上面的原理，要比其他国家的数学家早一千多年. 在欧洲直到 17 世纪，才有意大利数学家卡瓦列里（Cavalieri. B，1598—1647）提出上述结论.

二、柱体和锥体的体积

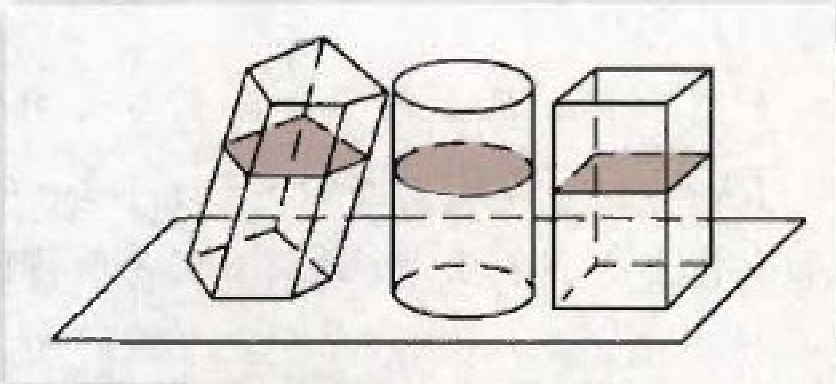


图 3

下面我们用祖暅原理推导柱体和锥体的体积公式.

设有底面积都等于 S，高都等于 h 的任意一个棱柱、一个圆柱和一个长方体，使它们的下底面在同一平面内（图 3）. 根据祖暅原理，可知它们的体积相等. 由于长方体的体积等于它的底面积乘以高，于是我们得到柱体的体积公式

$$V_{柱体}=Sh.$$

其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

设有底面积都等于 S，高都等于 h 的两个锥体（例如一个棱锥和一个圆锥），使它们的底面在同一平面内（图 4）. 根据祖暅原理，可推导出它们的体积相等. 这就是说，等底面积等高的两个锥体的体积相等.

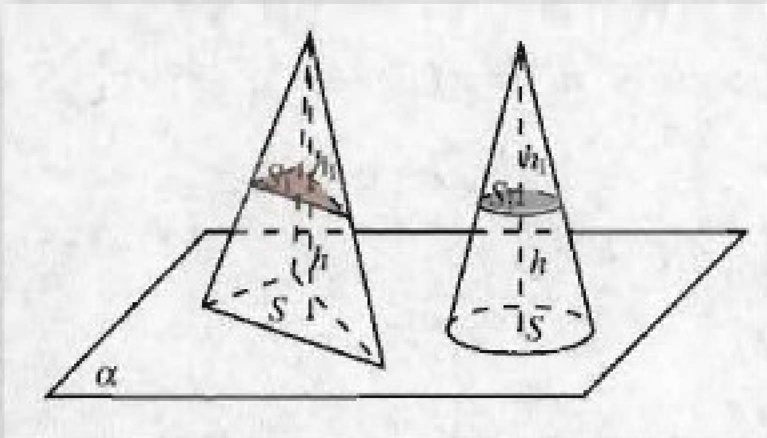


图 4

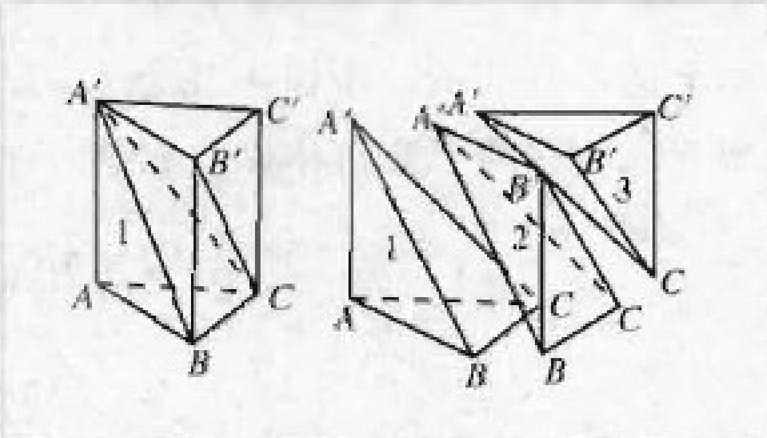


图 5

如图 5，设三棱柱 ABC-$A'B'C'$ 的底面积（即 $\triangle ABC$ 的面积）为 S，高（即点 A' 到平面 ABC 的距离）为 h，则它的体积为 Sh. 沿平面 $A'BC$ 和平面 $A'B'C$，将这个三棱柱分割为 3 个三棱锥. 其中三棱锥 1、2 的底面积相等（$S_{\triangle A'AB}=S_{\triangle A'B'B}$），高也相等（点 C 到平面 $ABB'A'$ 的距离）；三棱锥 2、3 也有相等的底面积（$S_{\triangle B'BC}=S_{\triangle B'C'C}$）和相等的高（点 A' 到平面 $BCC'B'$ 的距离）. 因此，这三个三棱锥的体积相等，每个三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}Sh$.

三棱锥 A'-ABC（即三棱锥 1）如果以 $\triangle ABC$ 为底，那么它的底面积是 S，高是 h，而它的体积是 $\frac{1}{3}Sh$. 这说明三棱锥的体积等于它的底面积乘以高的积的三分之一.

事实上，对于一个任意的锥体，设它的底面积为 S，高为 h，那么它的体积应等于一个底面积为 S，高为 h 的三棱锥的体积，即这个锥体的体积为

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$

这就是锥体的体积公式.

柱体和锥体是两种基本几何体，它们的体积公式有着广泛的应用.

三、球体的体积

先来研究半球（半径为 R）的体积计算．为了应用祖暅原理，我们需要找到一个能够求体积的，使它和半球高度一样，并且用任何一个水平面去截它们时，得到的截面面积都相等的几何体．

如图 6(1)，设平行于大圆且与大圆的距离为 l 的平面截半球所得圆面的半径为 r，$r=\sqrt{R^2-l^2}$，于是截面面积 $S_1=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)=\pi R^2-\pi l^2$．$S_1$ 可以看成是在半径为 R 的圆面上挖去一个半径为 l 的同心圆，所得圆环的面积．

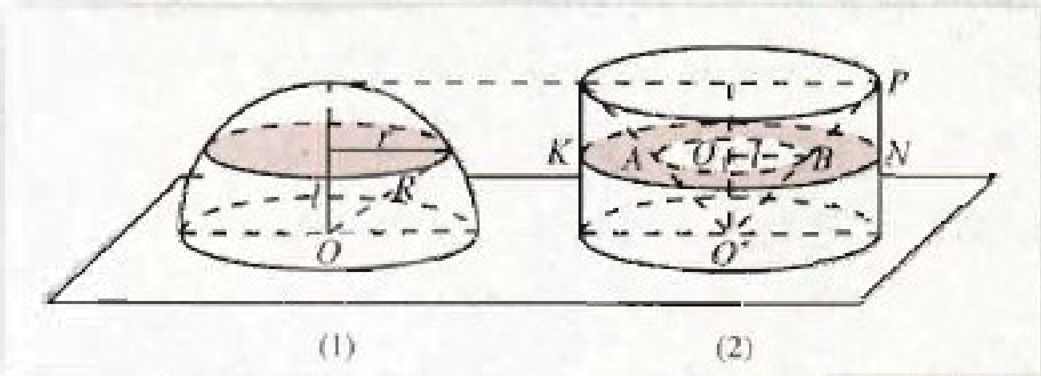


图 6

为此，我们取一个底面半径和高均为 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体与半球放在同一水平面上（图6(2)）．

用任一水平面去截这两个几何体，截面分别为圆面和圆环面．由上述可知：

圆环大圆半径为 R，小圆半径为 l，面积 $S_2=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$．所以，$S_1=S_2$．根据祖暅原理，这两个几何体体积相等．即

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以球的体积

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

利用祖暅原理求几何体的体积，关键是找出一个满足条件的能够求出体积的几何体．

实习作业

目　的：画出某些物体（如某些建筑物）的三视图和直观图，体会几何学在现实生活中的应用.

要　求：以小组为单位，分别到不同地点画所见物体的三视图和直观图，最后汇总完成作业.

过　程：

1. 从不同角度，观察你所在学校的某一座教学楼，了解它的几何结构，画出它的三视图和直观图（在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求）.

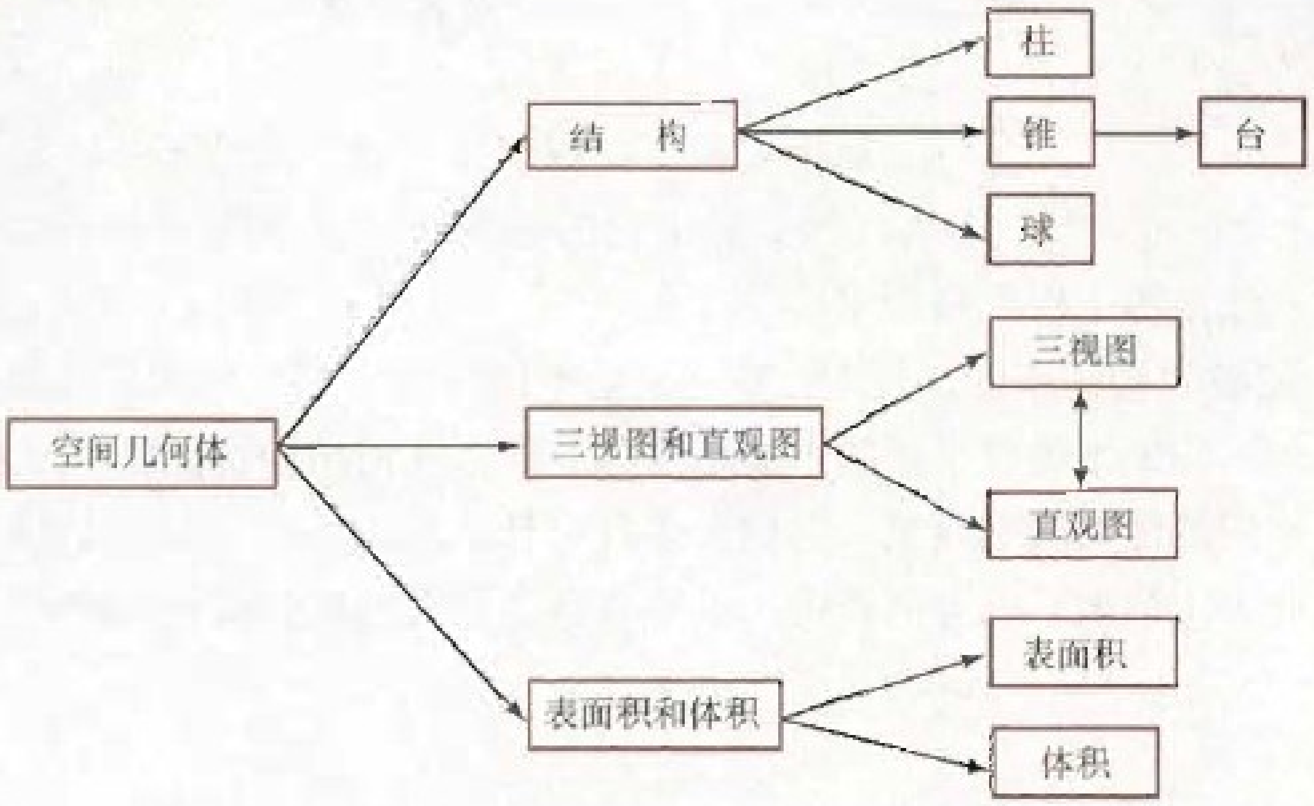
2. 估计上述教学楼的高度、长度、宽度及墙壁的厚度、窗户的大小等数据.

思　考：(1) 你们学校教学楼的主体结构具有什么几何结构特征？

(2) 观察你们地区的其他建筑，它们大多具有什么几何结构特征？请你结合其他学科知识，或向专业人士请教，或上网查询，了解具备上述几何结构特征的原因.

小 结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 我们生活的世界，存在各式各样的物体，它们大多是由具有柱、锥、台、球等形状的物体组成的. 认识和把握柱体、锥体、台体、球体的几何结构特征，是我们认识空间几何体的基础. 本章接触到的空间几何体是单一的柱体、锥体、台体、球体，或者是它们的简单组合体. 你能说出较复杂的几何体（如你身边的建筑物）的结构吗？

2. 对于空间几何体，可以有不同的分类标准. 你能从不同的方面认识柱、锥、台、球等空间几何体吗？你分类的依据是什么？

3. 为了研究空间几何体，我们需要在平面上画出空间几何体. 空间几何体有哪些不同的表现形式？空间几何体的三视图可以使我们很好地把握空间几何体的性质. 由空间几何体可以画出它的三视图，同样由三视图可以想象出空间几何体的形状，两者之间的互相转化，可以培养我们的几何直观能力、空间想象能力. 你有这方面的感受和体会吗？

4. 利用斜二测画法，我们可以画出空间几何体的直观图. 你能回顾用斜二测画法画空间几何体的基本步骤吗？

5. 计算空间几何体的表面积和体积时，要充分利用平面几何知识，把空间图形转化为平面图形，特别是柱、锥、台体侧面展开图. 请同学们回顾柱、锥、台体的侧面展开图是什么？如何计算它们的表面积？柱、锥、台体的体积之间是否存在一定的关系？

6. 球是比较特殊的空间几何体，它的表面积公式和体积公式是什么？

复习参考题

A 组

1. 填空题.

(1) 伐木工人将树伐倒后，再将枝杈砍掉，根据需要将其截成不同长度的圆木，圆木可以近似地看成是________体.

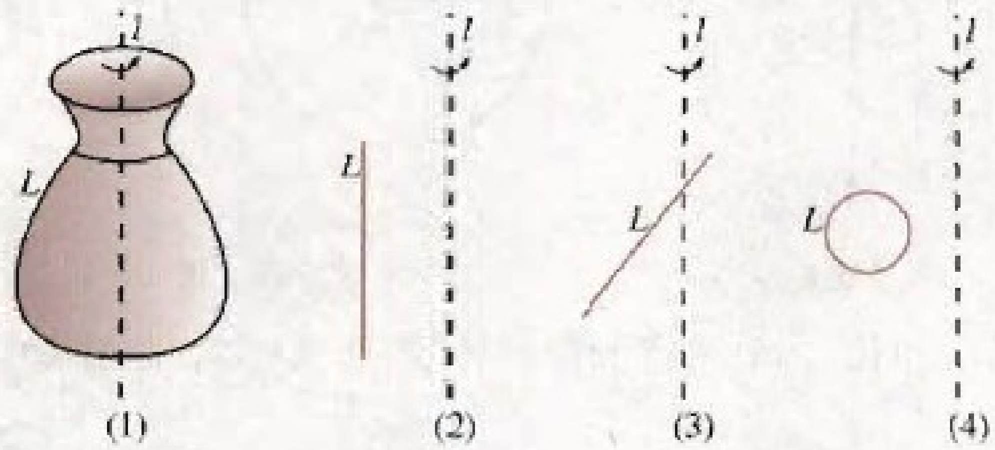
(2) 用铁丝作一个三角形，在三个顶点上分别固定一根筷子，把三根筷子的另一端也用铁丝连接成一个三角形，从而获得一个几何体模型. 如果筷子的长度相同，那么这个几何体可能是______.

(3) 正方形边长扩大到原来的 n 倍，其面积扩大到原来的____倍；正方体棱长扩大到原来的 n 倍，其表面积扩大到原来的____倍，体积扩大到原来的____倍.

(4) 圆半径扩大到原来的 n 倍，其面积扩大到原来的____倍；球半径扩大到原来的 n 倍，其表面积扩大到原来的____倍，体积扩大到原来的____倍.

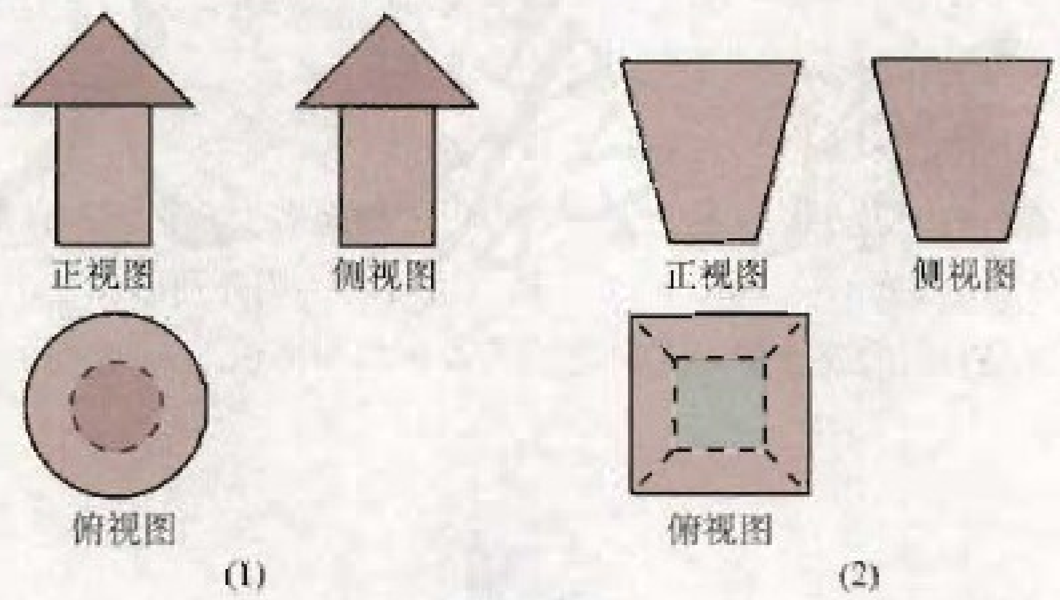
(5) 圆柱的底面不变，体积扩大到原来的 n 倍，则高扩大到原来的____倍；反之，高不变，底面半径应扩大到原来的____倍.

2. 仿照下图 (1)，画出 (2)、(3)、(4) 中 L 围绕 l 旋转一周形成的空间几何体.



(第 2 题)

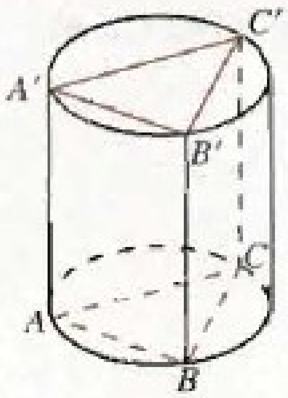
3. 已知几何体的三视图如下，画出它们的直观图.



(第 3 题)

4. 按第 3 题的三视图，用硬纸制作实物模型，并将它们设计成学习用品或装饰物.

5. 如图，圆柱内有一个三棱柱，三棱柱的底面在圆柱底面内，并且底面是正三角形. 如果圆柱的体积是 V，底面直径与母线长相等，那么三棱柱的体积是多少？

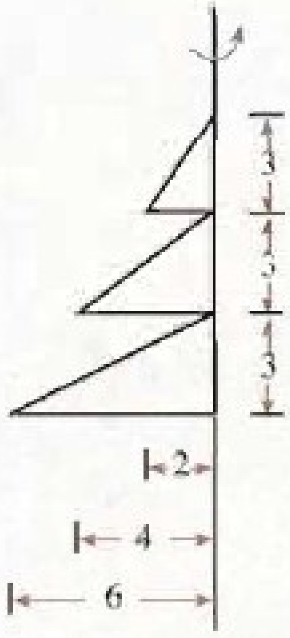


（第 5 题）

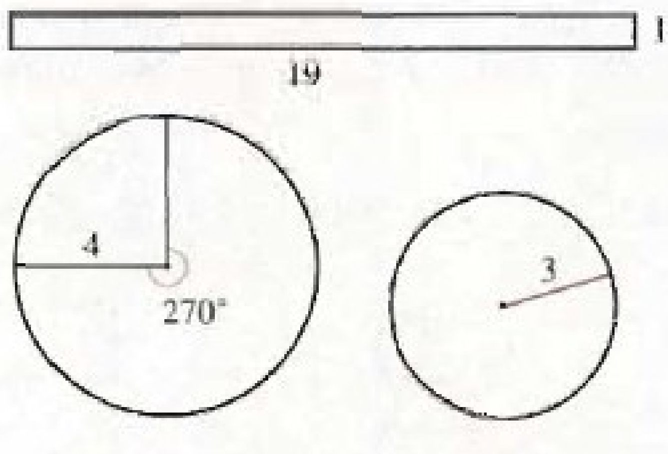
（第 6 题）

6. 如图是一个漏斗形铁管接头，它的母线长是 35 cm，两底面直径分别是 50 cm 和 20 cm，制作1 万个这样的接头需要多少平方米的铁皮（π 取 3.1，结果精确到 1 m^2）？

7. 三个直角三角形如图放置，它们围绕固定直线旋转一周形成几何体，画出它的三视图，并求出它的表面积和体积.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 用硬纸依据如图所示（单位：cm）的平面图形制作一个几何体，画出该几何体的三视图并求出其表面积.

9. 一个红色的棱长是 4 cm 的立方体，将其适当分割成棱长为 1 cm 的小正方体，问：

(1) 共得到多少个棱长为 1 cm 的小正方体？

(2) 三面涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？

(3) 二面涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？

(4) 一面涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？

(5) 六个面均没有涂色的小正方体有多少个？表面积之和为多少？它们占有多少立方厘米的空间？

10. 直角三角形三边长分别是 3 cm、4 cm、5 cm，绕三边旋转一周分别形成三个几何体. 想象并说出三个几何体的结构，画出它们的三视图，求出它们的表面积和体积.

B 组

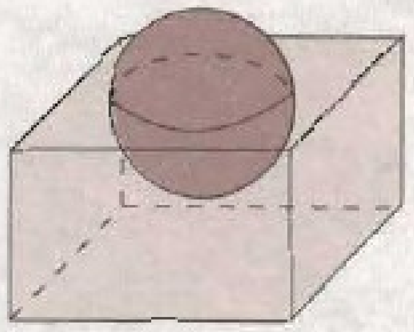
1. 由 8 个面围成的几何体，每一个面都是正三角形，并且有四个顶点 A、B、C、D 在同一个平面内，$ABCD$ 是边长为 30 cm 的正方形.

(1) 想象几何体的结构，并画出它的三视图和直观图；

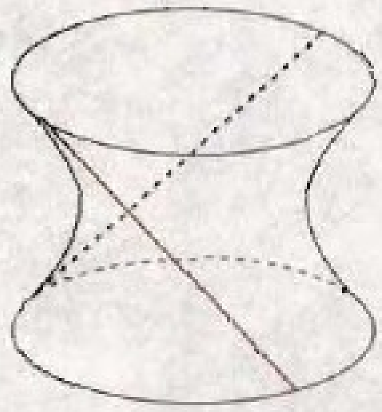
(2) 求出此几何体的表面积和体积；

(3) 用硬纸制作这个模型.

2. 一个长、宽、高分别是 80 cm、60 cm、55 cm 的水槽中有水200 000 cm^3. 现放入一个直径为 50 cm 的木球，如果木球的三分之二在水中，三分之一在水上，那么水是否会从水槽中流出？



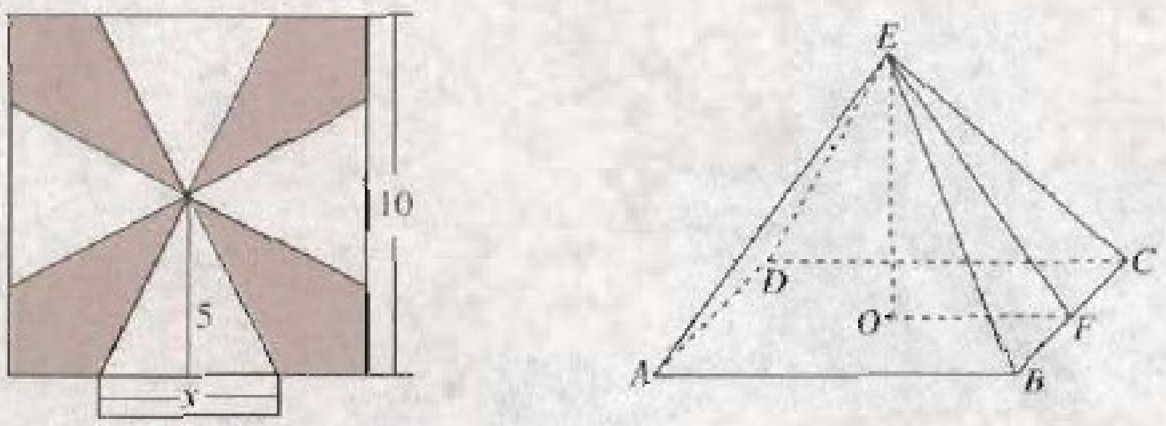
（第 2 题）



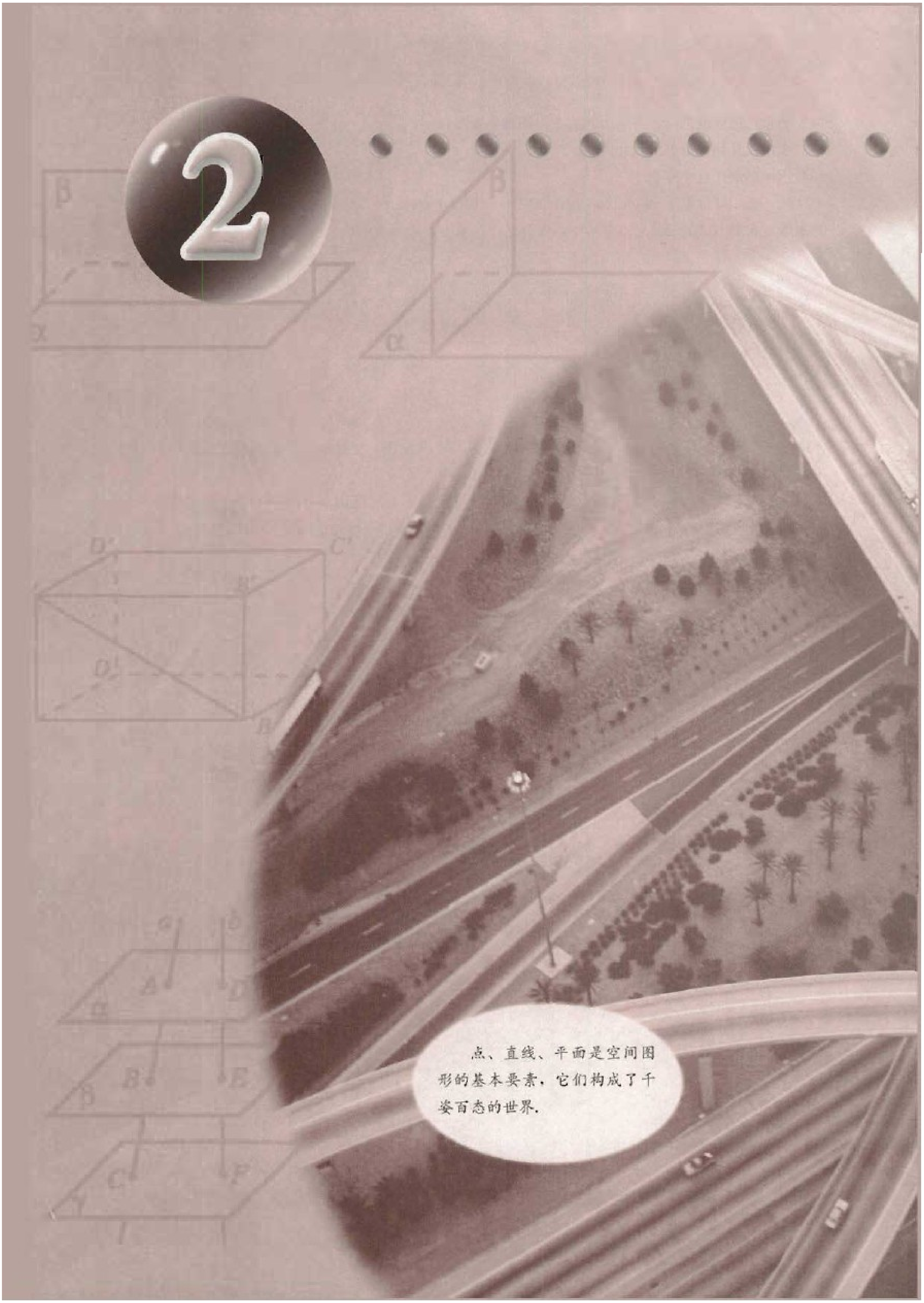
（第 3 题）

3. 你见过如图所示的纸篓吗？仔细观察它的几何结构，可以发现，它可以由多条直线围成，你知道它是怎么形成的吗？

4. 一块边长为 10 cm 的正方形铁片按如图所示的阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥（底面是正方形，从顶点向底面作垂线，垂足是底面中心的四棱锥）形容器，试把容器的容积 V 表示为 x 的函数.



（第 4 题）


2
点、直线、平面是空间图形的基本要素，它们构成了千姿百态的世界.

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

空间几何体各式各样、千姿百态，如何认识和把握它们呢？一般的方法是，从构成空间几何体的基本元素——点、直线和平面入手，研究它们的性质以及相互之间的位置关系，由整体到局部，由局部再到整体，逐步认识空间几何体的性质.

本章以长方体为载体，直观认识和理解空间中点、直线、平面的位置关系，学会用数学语言表述有关平行、垂直的判定与性质，并对某些结论进行论证.

CHAPTER 2

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

长方体是我们非常熟悉的空间几何图形.

思考?

观察长方体（图 2.1-1），你能发现长方体的顶点，棱所在的直线，以及侧面、底面之间的位置关系吗？

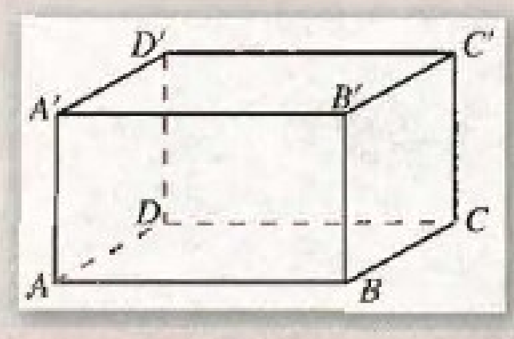


图 2.1-1

长方体由上下、前后、左右六个面围成. 有些面是平行的，有些面是相交的；有些棱所在的直线与面平行，有些棱所在的直线与面相交；每条棱所在的直线都可以看成是某个平面内的直线等等.

空间中的点、直线、平面之间有哪些位置关系呢？本节我们将讨论这个问题.

2.1.1 平面

生活中的一些物体通常呈平面形，课桌面、黑板面、海面都给我们以平面的形象.

几何里所说的“平面”（plane）就是从这样的一些物体中抽象出来的. 但是，几何里的平面是无限延展的.

观察

请你从适当的角度和距离观察桌面、黑板面或者门的表面，它们呈现出怎样的形象？

我们常常把水平的平面画成一个平行四边形，用平行四边形表示平面，如图 2.1-2. 平行四边形的锐角通常画成 45°，且横边长等于其邻边长的 2 倍. 如果一个平面被另一个平面遮挡住，为了增强它的立体感，我们常把被遮挡部分用虚线画出来，如图 2.1-3.

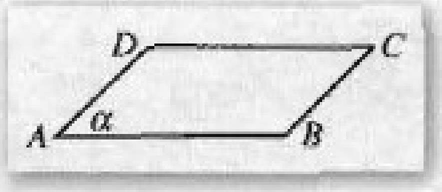


图 2.1-2

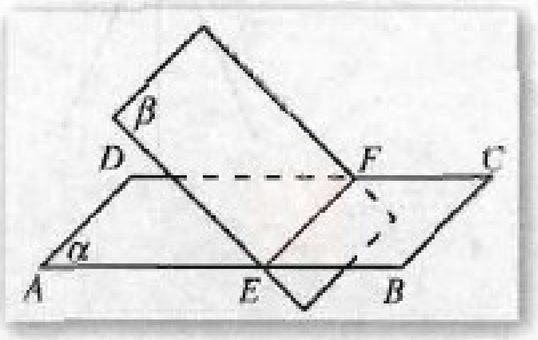


图 2.1-3

为了表示平面，我们常把希腊字母 α，β，γ 等写在代表平面的平行四边形的一个角上，如平面 α、平面 β；也可以用代表平面的平行四边形的四个顶点，或者相对的两个顶点的大写英文字母作为这个平面的名称，图 2.1-2 的平面 α，也可以表示为：平面 $ABCD$、平面 AC 或者平面 BD.

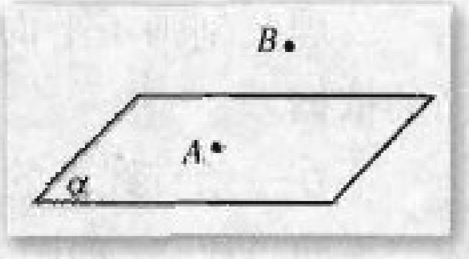


图 2.1-4

平面内有无数个点，平面可以看成点的集合. 如图 2.1-4，点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 在平面 α 外，记作 $B\notin\alpha$.

思考?

如果直线 l 与平面 α 有一个公共点 P，直线 l 是否在平面 α 内？如果直线 l 与平面 α 有两个公共点呢？

实际生活中，我们有这样的经验：把一根直尺边缘上的任意两点放到桌面上，可以看到，直尺的整个边缘就落在了桌面上.

上述经验和类似的事实可以归纳为以下公理.

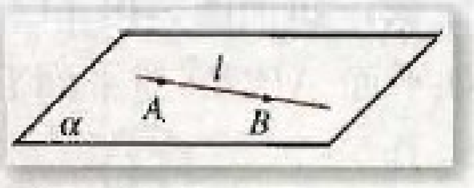


图 2.1-5

公理 1　**如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内**（图 2.1-5）.

此公理可以用来判断直线是否在平面内.

> 在生产、生活中，人们经过长期观察与实践，总结出关于平面的一些基本性质，我们把它作为公理. 这些公理是进一步推理的基础.

点动成线、线动成面. 直线、平面都可以看成点的集合. 点 P 在直线 l 上，记作 $P\in l$；点 P 在直线 l 外，记作 $P\notin l$. 如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l，记作 $l\subset\alpha$；否则，就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l\not\subset\alpha$.

公理 1 也可以用符号表示：

$$A\in l，B\in l，且 A\in\alpha，B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha.$$

生活中，我们常常可以看到这样的现象：三脚架可以牢固地支撑照相机或测量用的平板仪等等（图2.1-6）.

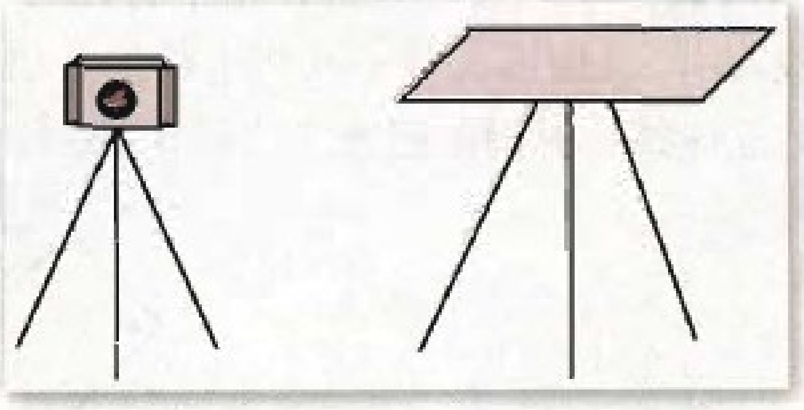


图 2.1-6

上述事实和类似经验可以归纳为下面的公理.

公理 2　**过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.**

公理 2 刻画了平面特有的基本性质，它给出了确定一个平面的依据.

不在一条直线上的三个点 A，B，C 所确定的平面，可以记成“平面 ABC”，如图 2.1-7.

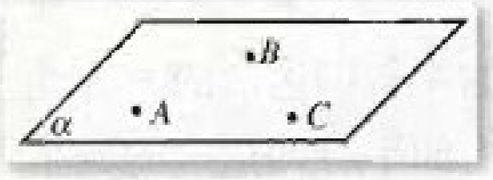


图 2.1-7

思考

如图 2.1-8，把三角板的一个角立在课桌面上，三角板所在平面与桌面所在平面是否只相交于一点 B？为什么？

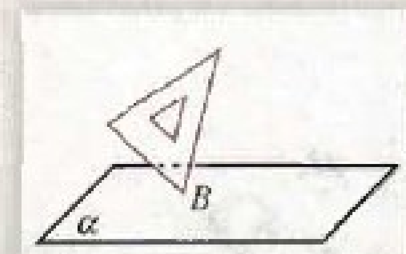


图 2.1-8

观察图 2.1-1 的长方体，我们发现，两个平面相交成直线，这条直线叫做两个平面的交线，如平面 $ABCD$ 与平面 $B'BCC'$ 相交于 BC. 另一方面，相邻两个平面有一个公共点，如平面 $ABCD$ 与平面 $B'BCC'$ 有一个公共点 B，经过点 B 有且只有一条过该点的公共直线 BC.

由上及其他相应事实，可以归纳得到：

公理 3　**如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.**

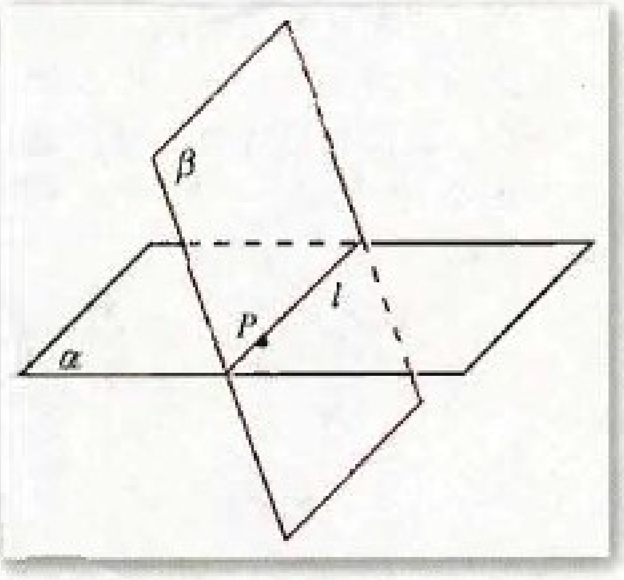


图 2.1-9

公理 3 告诉我们，如果两个不重合的平面有一个公共点，那么这两个平面一定相交，且其交线一定过这个公共点. 也就是说，如果两个平面有一个公共点，那么它们必定还有另外一个公共点，只要找出这两个平面的两个公共点，就找出了它们的交线.

平面 α 与 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$. 如图 2.1-9. 公理 3 也可以用符号表示：

$$P\in\alpha，且 P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l，且 P\in l.$$

上述三个公理是人们经过长期观察与实践总结出来的，是几何推理的基本依据，也是我们进一步研究空间图形的基础.

从一些原始概念（基本概念）和一些不加证明的原始命题（公理）出发，运用逻辑推理，推导出其他命题和定理的方法叫做公理化方法.

例 1　如图 2.1-10，用符号表示下列图形中点、直线、平面之间的位置关系.

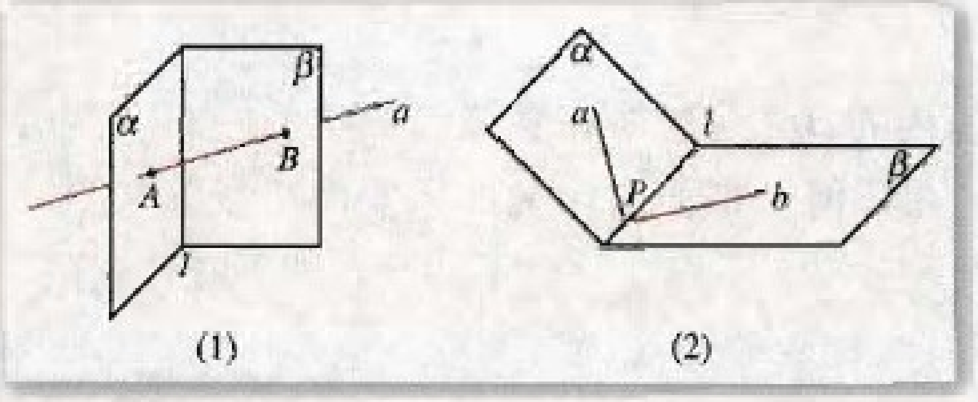


图 2.1-10

分析：根据图形，先判断点、直线、平面之间的位置关系，然后用符号表示出来.

解：在 (1) 中，$\alpha\cap\beta=l$，$a\cap\alpha=A$，$a\cap\beta=B$.

在 (2) 中，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap l=P$，$b\cap l=P$.

直线 a 与平面 α 相交于点 A，记作 $a\cap\alpha=A$；直线 a，l 相交于点 P，记作 $a\cap l=P$.

练　习

1. 下列命题正确的是（　）

　(A) 经过三点确定一个平面

　(B) 经过一条直线和一个点确定一个平面

　(C) 四边形确定一个平面

　(D) 两两相交且不共点的三条直线确定一个平面

2. (1) 不共面的四点可以确定几个平面？

　(2) 共点的三条直线可以确定几个平面？

3. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”.

　(1) 平面 α 与平面 β 相交，它们只有有限个公共点.（　）

　(2) 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.（　）

　(3) 经过两条相交直线，有且只有一个平面.（　）

　(4) 如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面重合.（　）

4. 用符号表示下列语句，并画出相应的图形：

　(1) 点 A 在平面 α 内，但点 B 在平面 α 外；

　(2) 直线 a 经过平面 α 外的一点 M；

　(3) 直线 a 既在平面 α 内，又在平面 β 内.

2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系

思考？

同一平面内的两条直线有几种位置关系？空间中的两条直线呢？

如图 2.1-11，教室内的日光灯管所在直线与黑板的左右两侧所在的直线，既不相交，也不共面，即它们不同在任何一平面内；又如天安门广场上（图2.1-12），旗杆所在的直线与长安街所在的直线，它们既不相交，也不共面，即不能处在同一平面内.

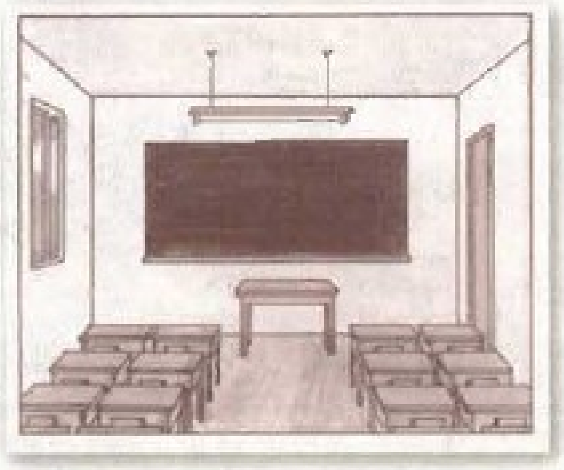


图 2.1-11

图 2.1-12

观察

如图 2.1-13，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，线段 $A'B$ 所在直线与线段 $C'C$ 所在直线的位置关系如何？

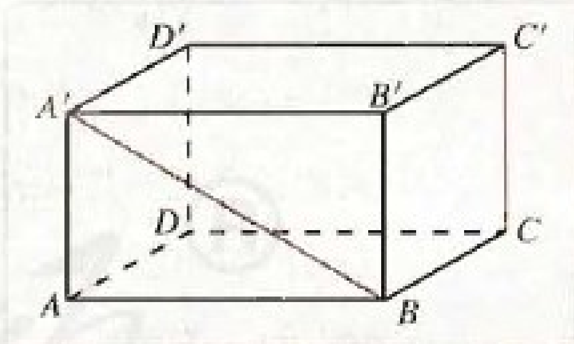


图 2.1-13

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线（skew lines）.

空间两条直线的位置关系有且只有三种：

- 共面直线
  - 相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点；
  - 平行直线：同一平面内，没有公共点；
- 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点.

这样，空间中两直线平行和过去我们学过的平面上两直线平行的意义是一致的，即首先这两条直线在同一平面内，其次是它们不相交.

为了表示异面直线 a，b 不共面的特点，作图时，通常用一个或两个平面衬托，如

图 2.1-14.

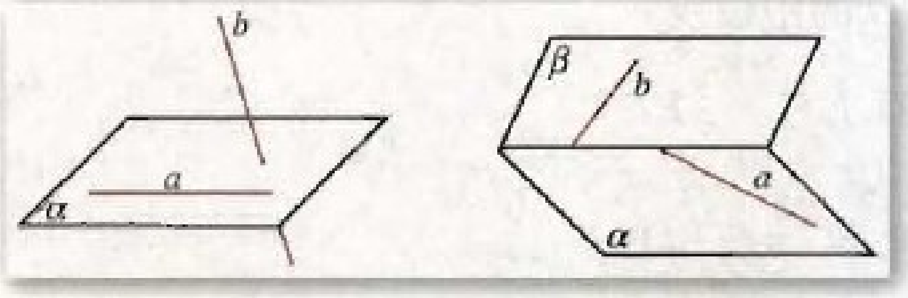


图 2.1-14

探究

图 2.1-15 是一个正方体的展开图，如果将它还原为正方体，那么 AB、CD、EF、GH 这四条线段所在直线是异面直线的有____对.

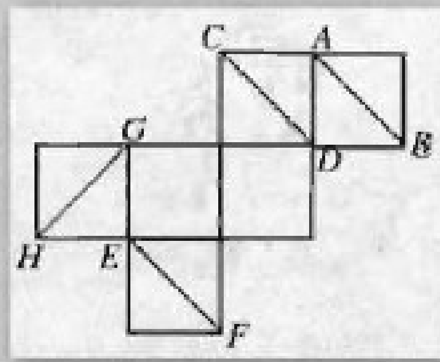


图 2.1-15

我们知道，在同一平面内，如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线互相平行. 在空间中，如果两条直线都与第三条直线平行，是否也有类似的规律？

观察

如图 2.1-16，长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，$BB' \parallel AA'$，$DD' \parallel AA'$，那么 BB' 与 DD' 平行吗？

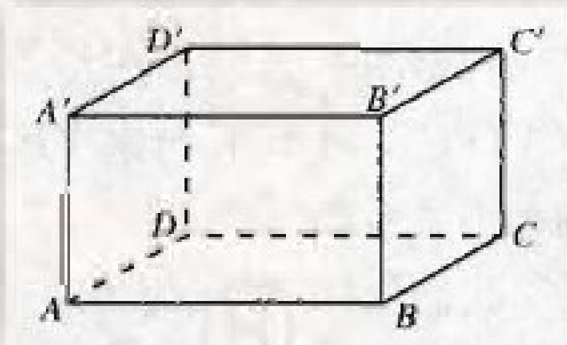


图 2.1-16

联系其他相应事实，可以归纳出以下公理.

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这个公理表明，空间平行于一条已知直线的所有直线都互相平行. 它给出了判断空间两条直线平行的依据.

公理 4 表述的性质通常叫做空间平行线的传递性.

根据公理 4，上面“观察”的答案是肯定的.

例 2　如图 2.1-17，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明：连接 BD.

因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

所以 $EH /\!/ BD$，且 $EH=\frac{1}{2}BD$.

同理，$FG /\!/ BD$，且 $FG=\frac{1}{2}BD$.

因为 $EH /\!/ FG$，且 $EH=FG$，

所以 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

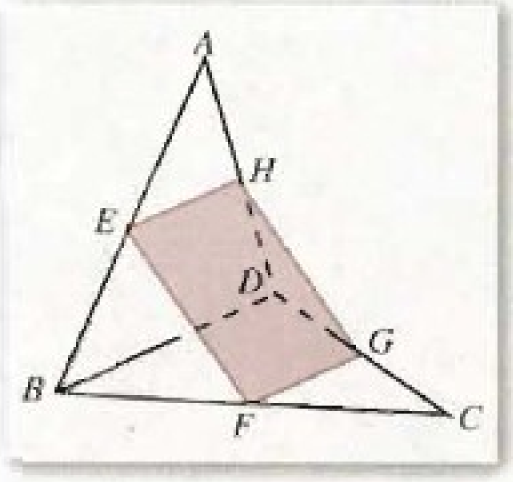


图 2.1-17

探究

在例 2 中，如果再加上条件 $AC=BD$，那么四边形 $EFGH$ 是什么图形？

思考

在平面上，我们容易证明“如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补”．空间中，结论是否仍然成立呢？

观察图 2.1-18，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$\angle ADC$ 与 $\angle A'D'C'$，$\angle ADC$ 与 $\angle A'B'C'$ 的两边分别对应平行，这两组角的大小关系如何？

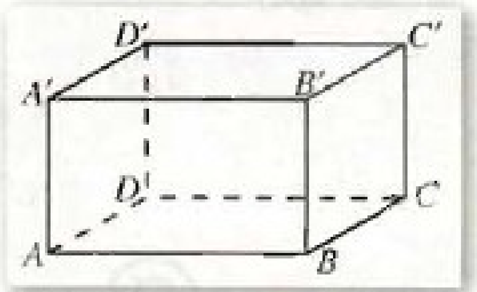


图 2.1-18

我们从图中可以看出，

$$\angle ADC=\angle A'D'C',\ \angle ADC+\angle A'B'C'=180^\circ.$$

一般地，有以下定理.

定理 **空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.**

我们知道，平面内两条直线相交成 4 个角，其中不大于 90°的角称为它们的夹角．夹角刻画了一条直线相对于另一条直线倾斜的程度．两条异面直线之间也存在类似的问题，为此我们引入“异面直线所成的角”的概念.

如图 2.1-19，已知两条异面直线 a，b，经过空间任一点 O 作直线 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角）.

a' 与 b' 所成角的大小与点 O 的位置有关吗？

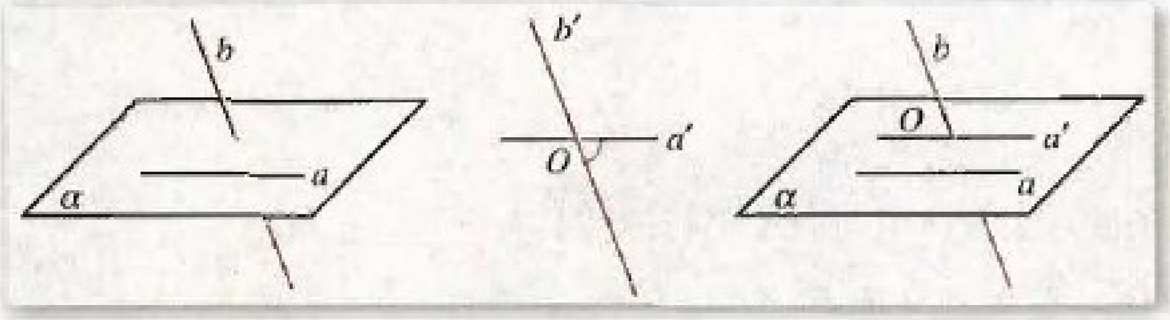


图 2.1-19

研究异面直线所成的角，就是通过平移把异面直线转化为相交直线．这是研究空间图形的一种基本思路，即把空间图形问题转化为平面图形问题．

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上．例如取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a'/\!/a$，a' 和 b 所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角．

如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们就说这两条直线互相垂直．两条互相垂直的异面直线 a，b，记作 $a\perp b$．

探究

(1) 如图 2.1-18，观察长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，有没有两条棱所在的直线是互相垂直的异面直线？

(2) 如果两条平行直线中的一条与某一条直线垂直，那么，另一条直线是否也与这条直线垂直？

(3) 垂直于同一条直线的两条直线是否平行？

例 3　如图 2.1-20，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$．

(1) 哪些棱所在直线与直线 BA' 是异面直线？

(2) 直线 BA' 和 CC' 的夹角是多少？

(3) 哪些棱所在的直线与直线 AA' 垂直？

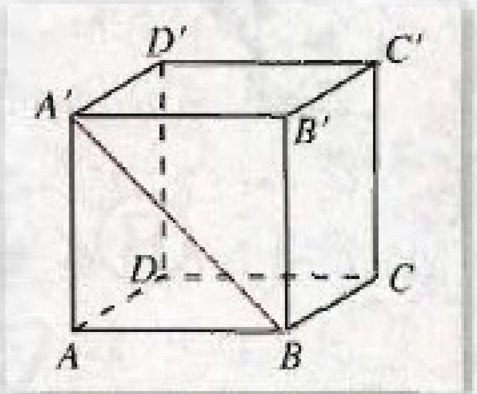


图 2.1-20

解： (1) 由异面直线的定义可知，棱 AD，DC，CC'，DD'，$D'C'$，$B'C'$ 所在直线分别与直线 BA' 是异面直线．

(2) 由 $BB'/\!/CC'$ 可知，$\angle B'BA'$ 为异面直线 BA' 与 CC' 的夹角，$\angle B'BA'=45°$，所以直线 BA' 与 CC' 的夹角为 $45°$．

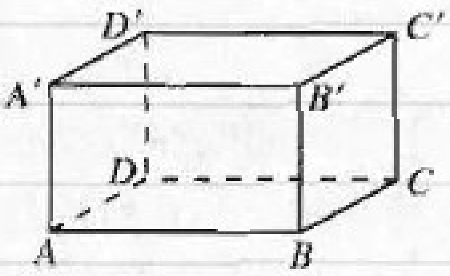
(3) 直线 AB，BC，CD，DA，$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$ 分别与直线 AA' 垂直．

练　习

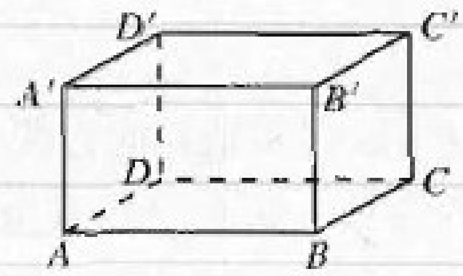
1. 填空题.

(1) 如图，AA'是长方体的一条棱，长方体中与AA'平行的棱共有________条.

(2) 如果$OA/\!/O'A'$，$OB/\!/O'B'$，那么$\angle AOB$和$\angle A'O'B'$________.



（第1(1)题）



（第2题）

2. 如图，已知长方体$ABCD$-$A'B'C'D'$中，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{3}$，$AA'=2$.

(1) BC和$A'C'$所成的角是多少度？

(2) AA'和BC'所成的角是多少度？

2.1.3　空间中直线与平面之间的位置关系

思考？

(1) 一支笔所在的直线与一个作业本所在的平面，可能有几种位置关系？

(2) 如图2.1-21，线段$A'B$所在直线与长方体$ABCD$-$A'B'C'D'$的六个面所在平面有几种位置关系？

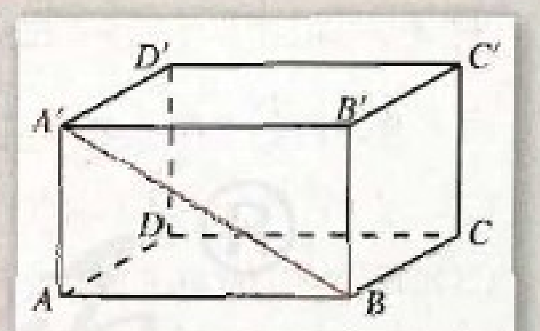


图2.1-21

通过生活实例以及对长方体模型的观察、思考，我们可以看出，直线与平面的位置关系有且只有三种：

(1) 直线在平面内——有无数个公共点；

(2) 直线与平面相交——有且只有一个公共点；

(3) 直线与平面平行——没有公共点.

直线与平面相交或平行的情况统称为直线在平面外.

图 2.1-22 表示直线与平面的三种位置关系.

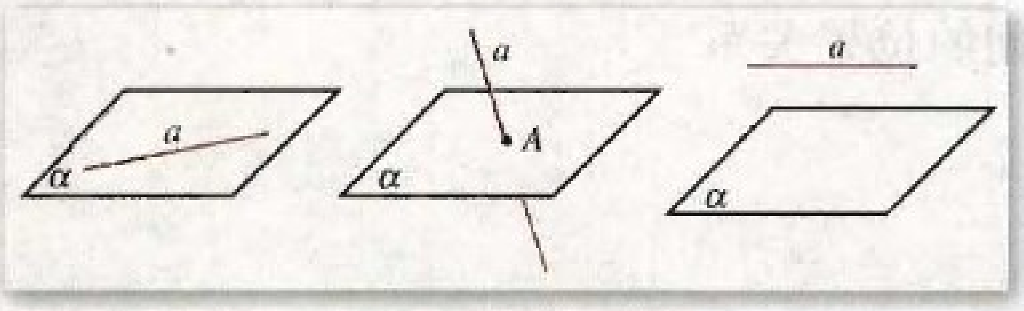


图 2.1-22

一般地，直线 a 在平面 α 内，应把直线 a 画在表示平面 α 的平行四边形内；直线 a 在平面 α 外，应把直线 a 或它的一部分画在表示平面 α 的平行四边形外.

直线 a 与平面 α 相交于点 A，记作

$$a\cap\alpha=A;$$

直线 a 与平面 α 平行，记作

$$a/\!/\alpha.$$

例 4　下列命题中正确的个数是（　　）

① 若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l/\!/\alpha$.

② 若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都平行.

③ 如果两条平行直线中的一条与一个平面平行，那么另一条也与这个平面平行.

④若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都没有公共点.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解：如图 2.1-23，我们借助长方体模型，棱 AA_1 所在直线有无数点在平面 $ABCD$ 外，但棱 AA_1 所在直线与平面 $ABCD$ 相交，所以命题①不正确；A_1B_1 所在直线平行于平面 $ABCD$，A_1B_1 显然不平行于 BD，所以命题②不正确；$A_1B_1/\!/AB$，A_1B_1 所在直线平行于平面 $ABCD$，但直线 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以命题③不正确；l 与平面 α 平行，则 l 与 α 无公共点，l 与平面 α 内所有直线都没有公共点，所以命题④正确，应选 B.

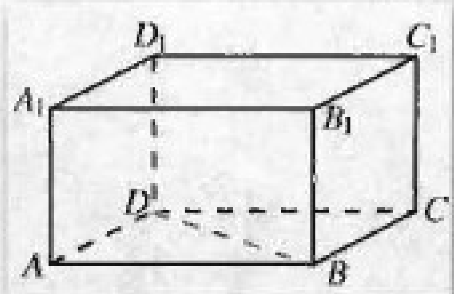


图 2.1-23

练　习

若直线 a 不平行于平面 α，且 $a\not\subset\alpha$，则下列结论成立的是（　　）

(A) α 内的所有直线与 a 异面

(B) α 内不存在与 a 平行的直线

(C) α 内存在唯一的直线与 a 平行

(D) α 内的直线与 a 都相交

2.1.4 平面与平面之间的位置关系

思考

(1) 拿出两本书，看作两个平面，上下、左右移动和翻转，它们之间的位置关系有几种？

(2) 如图 2.1-24，围成长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的六个面，两两之间的位置关系有几种？

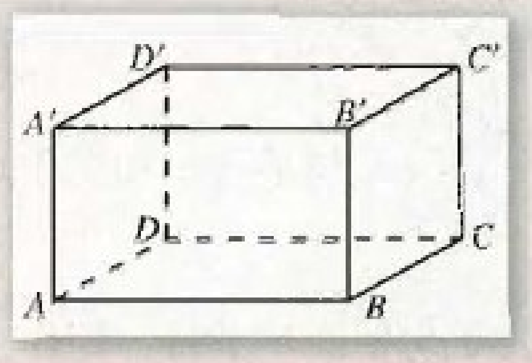


图 2.1-24

通过生活实例以及对长方体模型的观察、思考，我们可以看出，两个平面之间的位置关系有且只有以下两种：

(1) 两个平面平行——没有公共点；

(2) 两个平面相交——有一条公共直线.

画两个互相平行的平面时，要注意使表示平面的两个平行四边形的对应边平行，如图 2.1-25.

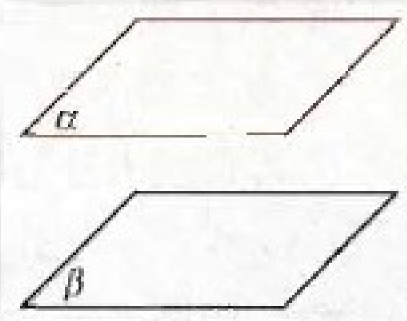


图 2.1-25

平面 α 与平面 β 平行，记作

$$\alpha /\!/ \beta.$$

探究

已知平面 α，β，直线 a，b，且 $\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则直线 a 与直线 b 具有怎样的位置关系？

练 习

如果三个平面两两相交，那么它们的交线有多少条？画出图形表示你的结论.

习题2.1

A 组

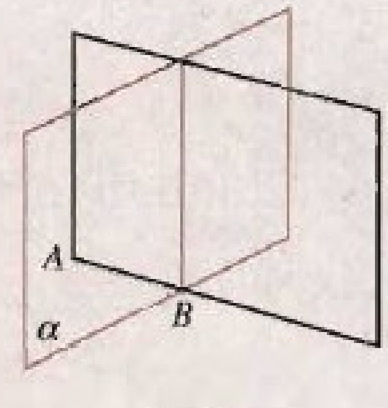
1. 画出满足下列条件的图形：

$$\alpha\cap\beta=l，AB\subset\alpha，CD\subset\beta，AB/\!/l，CD/\!/l.$$

2. 如图，试根据下列要求，把被遮挡的部分改为虚线：

（1）AB 没有被平面 α 遮挡；

（2）AB 被平面 α 遮挡.



（第 2 题）

3. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画"√"，错误的画"×".

（1）梯形可以确定一个平面.（　　）

（2）圆心和圆上两点可以确定一个平面.（　　）

（3）已知 a，b，c，d 是四条直线，若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，$c/\!/d$，则 $a/\!/d$.（　　）

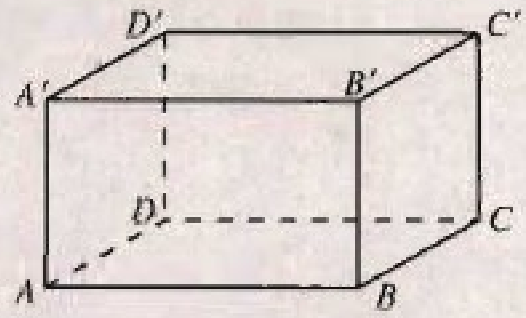
（4）两条直线 a，b 没有公共点，那么 a 与 b 是异面直线.（　　）

（5）若 a，b 是两条直线，α，β 是两个平面，且 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 a，b 是异面直线.（　　）

4. 填空题.

（1）已知 a，b，c 是三条直线，且 $a/\!/b$，a 与 c 的夹角为 θ，那么 b 与 c 夹角为______；

（2）如图，AA' 是长方体的一条棱，这个长方体中与 AA' 垂直的棱共____条；



（第 4(2)题）

（3）如果 a，b 是异面直线，直线 c 与 a，b 都相交，那么这三条直线中的两条所确定的平面共有____个.

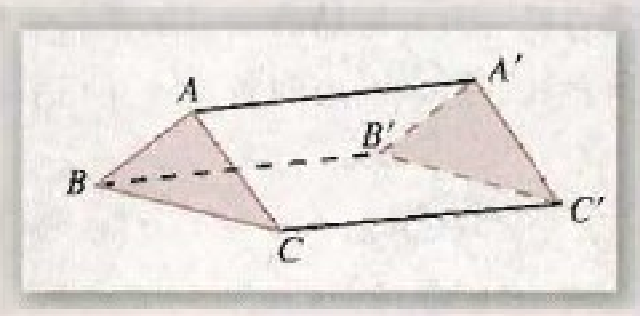
（4）若一条直线与两个平行平面中的一个平面平行，则这条直线与另一个平面的位置关系是______.

（5）已知两条相交直线 a，b，$a/\!/$平面 α，则 b 与 α 的位置关系是______.

（6）设直线 a，b 分别是长方体相邻两个面的对角线所在的直线，则 a 与 b 的位置关系是______.

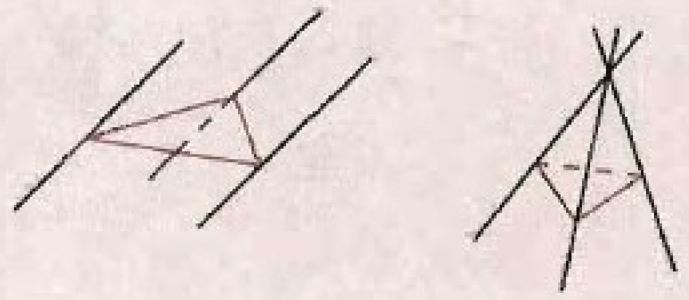
5. 如果一条直线与两条平行直线都相交，那么这三条直线是否共面？

6. 如图，已知 AA'，BB'，CC' 不共面，且 $AA'/\!/BB'$，$AA'=BB'$，$BB'/\!/CC'$，$BB'=CC'$．求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.



（第 6 题）

7. 如图，三条直线两两平行且不共面，每两条直线确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，它们最多可以确定几个平面？



（第7题）

8. 正方体各面所在平面将空间分成几部分？

B 组

1. 选择题.

（1）如图是正方体的平面展开图，则在这个正方体中：

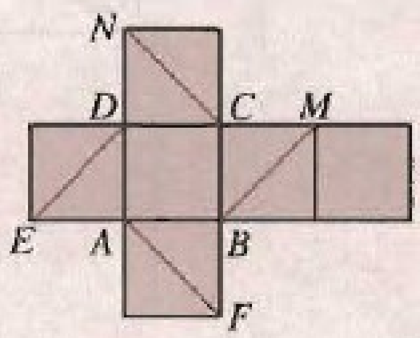
① BM 与 ED 平行.　　② CN 与 BE 是异面直线.

③ CN 与 BM 成 60°角.　　④ DM 与 BN 是异面直线.

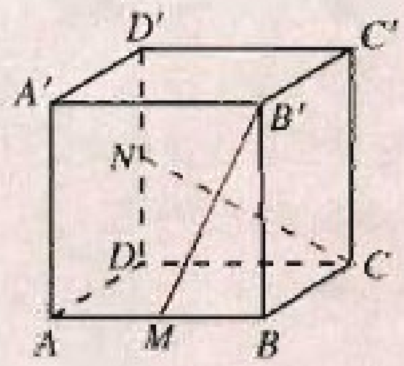
以上四个命题中，正确命题的序号是（　　）

(A) ①②③　　(B) ②④

(C) ③④　　(D) ②③④



（第1(1)题）



（第1(2)题）

（2）如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，AB 的中点为 M，DD' 的中点为 N，则异面直线 $B'M$ 与 CN 所成的角是（　　）

(A) 0°　　(B) 45°　　(C) 60°　　(D) 90°

（3）给出三个命题：

① 若两条直线和第三条直线所成的角相等，则这两条直线互相平行.

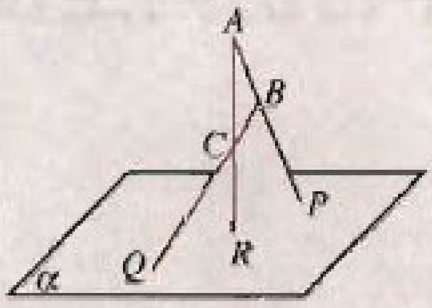
② 若两条直线都与第三条直线垂直，则这两条直线互相平行.

③ 若两条直线都与第三条直线平行，则这两条直线互相平行.

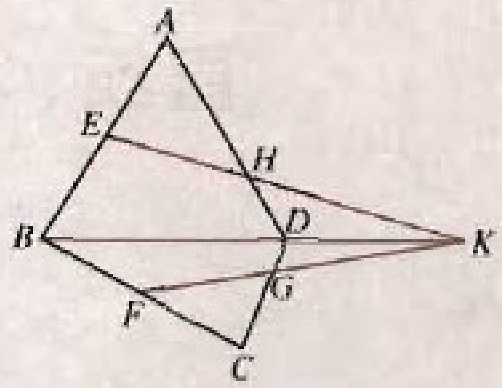
其中不正确命题的个数是（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 如图，$\triangle ABC$ 在平面 α 外，$AB \cap \alpha = P$，$BC \cap \alpha = Q$，$AC \cap \alpha = R$，求证：P，Q，R 三点共线.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 CB 上的点，G，H 分别是 CD 和 AD 上的点，且 EH 与 FG 相交于点 K．求证：EH，BD，FG 三条直线相交于同一点.

2.2 直线、平面平行的判定及其性质

2.2.1 直线与平面平行的判定

直线与平面的位置关系中，平行是一种非常重要的关系. 它不仅应用较多，而且是学习平面与平面平行的基础.

怎样判定直线与平面平行呢？

根据定义，判定直线与平面是否平行，只需判定直线与平面有没有公共点. 但是，直线无限伸长，平面无限延展，如何保证直线与平面没有公共点呢？

在生活中，我们注意到门扇的两边是平行的. 当门扇绕着一边转动时，另一边始终与门框所在的平面没有公共点，此时门扇转动的一边与门框所在的平面给人以平行的印象.

观察

如图 2.2-1，将一本书平放在桌面上，翻动书的封面，封面边缘 AB 所在直线与桌面所在平面具有什么样的位置关系？

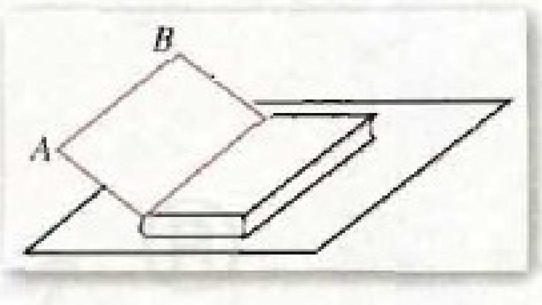


图 2.2-1

如图 2.2-2，直线 a 与平面 α 平行吗？

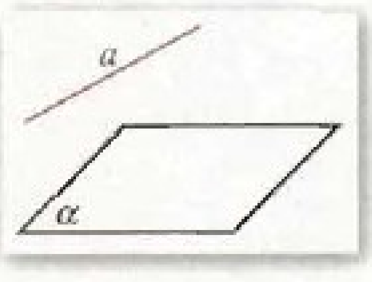


图 2.2-2

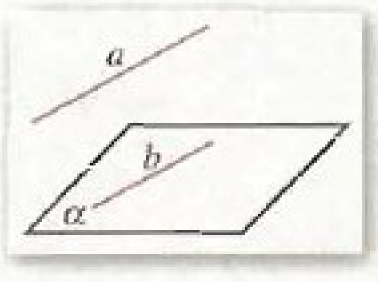


图 2.2-3

如图 2.2-3，如果在平面 α 内有直线 b 与直线 a 平行，那么直线 a 与平面 α 的位置关系如何？是否可以保证直线 a 与平面 α 平行？

探究

如图 2.2-4，平面 α 外的直线 a 平行于平面 α 内的直线 b.

（1）这两条直线共面吗？

（2）直线 a 与平面 α 相交吗？

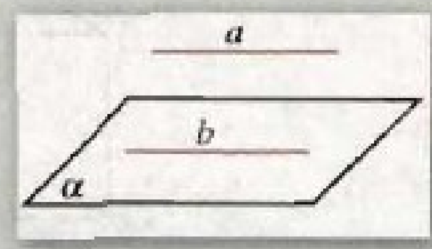


图 2.2-4

通过探究，我们发现，直线 a 与直线 b 共面，直线 a 与平面 α 不可能相交，直线 a 与平面 α 平行.

一般地，我们可以证明下面的结论.

定理　**平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.**

上述定理通常称为直线与平面平行的判定定理，它可以用符号表示：$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a/\!/b \Rightarrow a/\!/\alpha$.

> 定理告诉我们，可以通过直线间的平行，推证直线与平面平行. 这是处理空间位置关系一种常用方法，即将直线与平面平行关系（空间问题）转化为直线间平行关系（平面问题）.

例 1　求证：空间四边形相邻两边中点的连线平行于经过另外两边所在的平面.

已知：如图 2.2-5，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点.

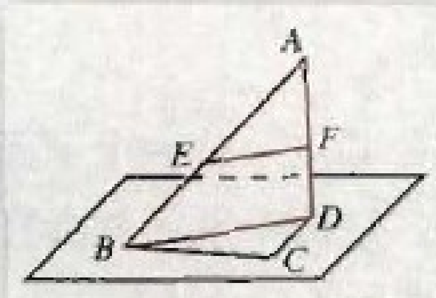


图 2.2-5

求证：$EF/\!/$平面 BCD.

证明：连接 BD.

因为 $AE=EB$，$AF=FD$，

所以 $EF/\!/BD$（三角形中位线的性质）.

因为 $EF\not\subset$平面 BCD，$BD\subset$平面 BCD，

由直线与平面平行的判定定理得

$$EF/\!/\text{平面 } BCD.$$

> 今后要证明一条已知直线与一个平面平行，只要在这个平面内找出一条直线与已知直线平行，就可断定已知直线与这个平面平行.

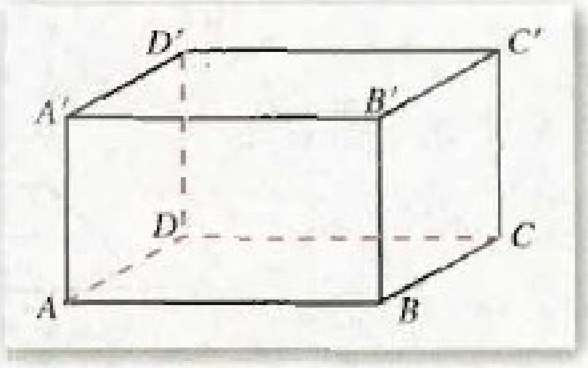
练习

1. 如图，长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，

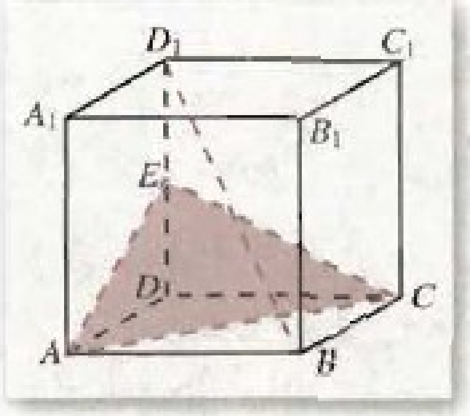
（1）与 AB 平行的平面是________；

（2）与 AA' 平行的平面是________；

（3）与 AD 平行的平面是________.



（第1题）



（第2题）

2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 DD_1 的中点，试判断 BD_1 与平面 AEC 的位置关系，并说明理由.

2.2.2 平面与平面平行的判定

观察

三角板的一条边所在直线与桌面平行，这个三角板所在平面与桌面平行吗？三角板的两条边所在直线分别与桌面平行，情况又如何呢？

下面我们讨论平面与平面平行的判定问题.

根据定义可知，判定平面与平面平行的关键在于判定它们有没有公共点. 若一个平面内的所有直线都与另一个平面平行，那么这两个平面一定平行. 否则，这两个平面就会有公共点，这样在一个平面内通过这个公共点的直线就不平行于另一个平面了.

由上所述，两个平面平行的问题可转化为一个平面内的直线与另一个平面平行的问题. 实际上，判定两个平面平行不需要判定一个平面内的所有直线都平行于另一个平面.

探究

(1) 平面 β 内有一条直线与平面 α 平行，α，β 平行吗？

(2) 平面 β 内有两条直线与平面 α 平行，α，β 平行吗？

探究 (1) 中的平面 α 和平面 β 不一定平行. 如图2.2-6，借助长方体模型，我们可以看出，平面 $A'ADD'$ 中直线 $AA' \parallel$ 平面 $DCC'D'$，但平面 $A'ADD'$ 与平面 $DCC'D'$ 相交.

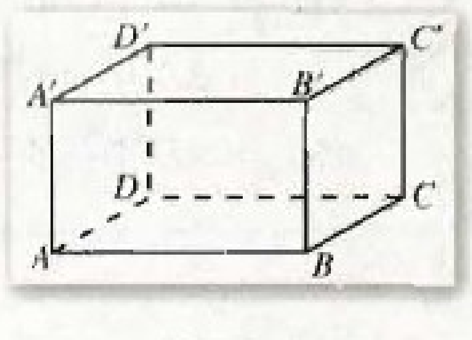


图 2.2-6

对于探究 (2)，我们分两种情况考虑.

如果平面 β 内的两条直线是平行直线，平面 α 和平面 β 不一

定平行．如图 2.2-7，借助长方体模型，在平面$A'ADD'$内，有一条与AA'平行的直线EF，显然，AA'与EF都平行于平面$DCC'D'$，但这两条平行直线所在的平面$A'ADD'$与平面$DCC'D'$相交.

如果平面β内有两条相交直线与平面α平行，情况如何呢？

如图 2.2-8，借助长方体模型，平面$ABCD$内两条相交直线AC，BD分别与平面$A'B'C'D'$内两条相交直线$A'C'$，$B'D'$平行，由直线与平面平行的判定定理可知，这两条相交直线AC，BD都与平面$A'B'C'D'$平行. 此时，平面$ABCD$平行于平面$A'B'C'D'$.

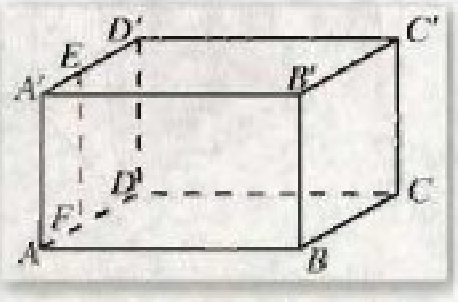


图 2.2-7

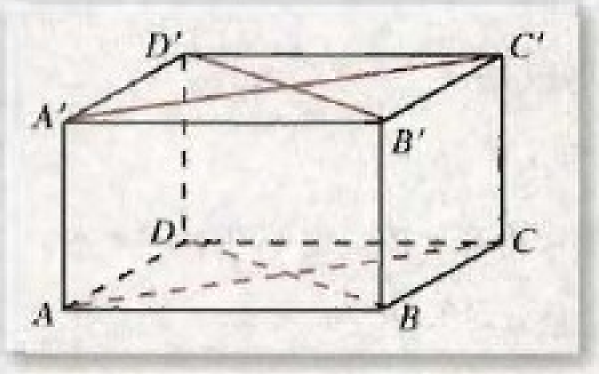


图 2.2-8

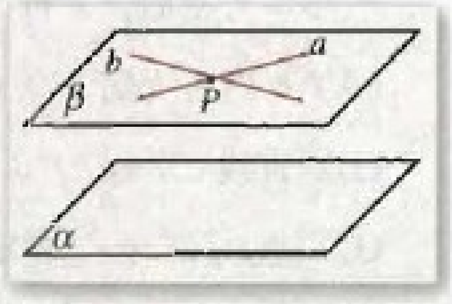


图 2.2-9

一般地，我们有如下判定平面与平面平行的定理（图 2.2-9）.

定理 **一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.**

上述定理通常称为平面与平面平行的判定定理，它告诉我们，可以由直线与平面平行判定平面与平面平行.

平面与平面平行的判定定理可以用符号表示：

$$a\subset\beta,\ b\subset\beta,\ a\cap b=P,\ a/\!/\alpha,\ b/\!/\alpha\Rightarrow\beta/\!/\alpha.$$

例 2 已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$（图 2.2-10），求证：平面AB_1D_1 // 平面C_1BD.

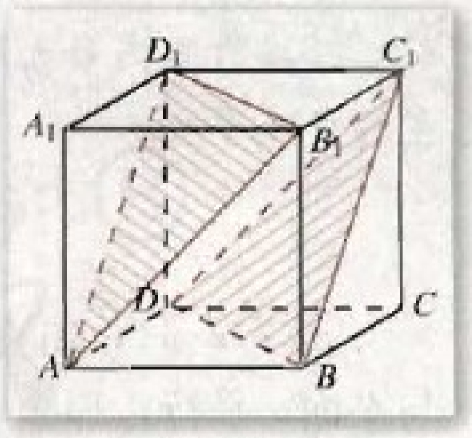


图 2.2-10

证明：因为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$为正方体，

所以 $D_1C_1/\!/A_1B_1$，$D_1C_1=A_1B_1$，

又$AB/\!/A_1B_1$，$AB=A_1B_1$，

所以 $D_1C_1/\!/AB$，$D_1C_1=AB$，

所以 D_1C_1BA为平行四边形.

所以 $D_1A/\!/C_1B$.

又$D_1A\not\subset$平面C_1BD，$C_1B\subset$平面C_1BD，

由直线与平面平行的判定定理得

$$D_1A/\!/\text{平面}\ C_1BD,$$

同理

$$D_1B_1/\!/\text{平面}\ C_1BD,$$

又

$$D_1A\cap D_1B_1=D_1,$$

所以

$$\text{平面}\ AB_1D_1/\!/\text{平面}\ C_1BD.$$

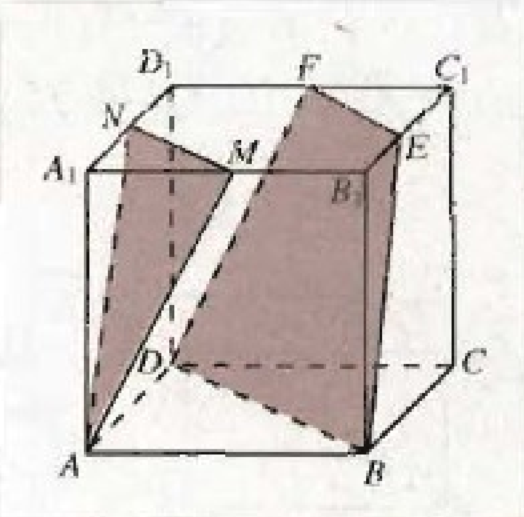
练 习

1. 判断下列命题是否正确，正确的说明理由，错误的举例说明：

(1) 已知平面 α，β 和直线 m，n，若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$；

(2) 一个平面 α 内两条不平行的直线都平行于另一平面 β，则 $\alpha/\!/\beta$.

2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，E，F 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点. 求证：平面 $AMN/\!/$平面 $EFDB$.



(第 2 题)

3. 平面 α 与平面 β 平行的条件可以是（　　）

(A) α 内有无穷多条直线都与 β 平行

(B) 直线 $a/\!/\alpha$，$a/\!/\beta$，且直线 a 不在 α 内，也不在 β 内

(C) 直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$，且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\alpha$

(D) α 内的任何直线都与 β 平行

2.2.3 直线与平面平行的性质

思考

(1) 如果一条直线与一个平面平行，那么这条直线与这个平面内的直线有哪些位置关系？

(2) 教室内日光灯管所在的直线与地面平行，如何在地面上作一条直线与灯管所在的直线平行？

如图 2.2-11，由直线与平面平行的定义，如果一条直线 a 与平面 α 平行，那么 a 与 α 无公共点，即 a 上的点都不在 α 内，α 内的任何直线与 a 都无公共点. 这样，平面 α 内的直线与平面 α 外的直线 a 只能是异面直线或者平行直线. 那么，在什么条件下，平面 α 内的直线与直线 a 平行呢？

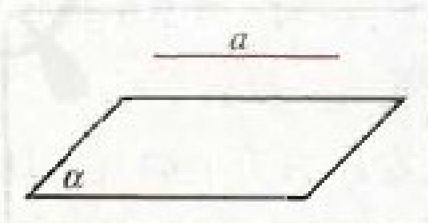


图 2.2-11

由于 a 与平面 α 内的任何直线无公共点，所以，过直线 a 的某一平面，若与平面 α 相交，则直线 a 就平行于这条交线.

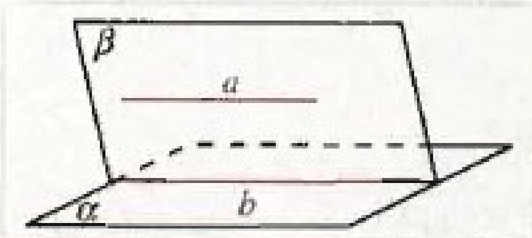


图 2.2-12

下面，我们来证明这一结论.

如图 2.2-12，$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$.

求证：$a/\!/b$.