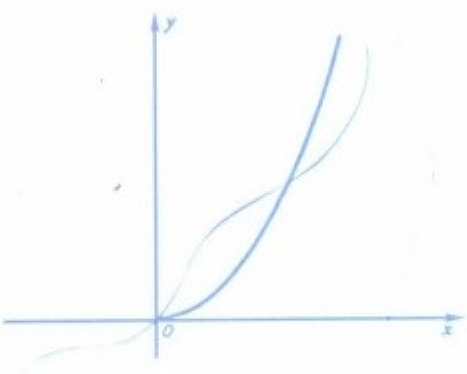
- 详尽的数学公式
- 丰富的函数图形
- 巧妙的计算方法
- 独特的解题技巧

高等数学学习手册

徐小湛　编著



高等数学
定义　定理　公式
图形　方法　技巧
速查

科学出版社
www.sciencep.com

(O-2300.0101)

■ 详尽的数学公式 ■ 丰富的函数图形
■ 巧妙的计算方法 ■ 独特的解题技巧

公式详尽 难易结合 本手册既有高等数学教材中的基本内容和公式、常见解题方法和步骤，以满足读者的基本学习需要，又有大量一般教材中没有的，但在解题中有用的公式、特殊的解题方法和技巧，以满足读者提高解题能力和技巧的需要。

方法巧妙 技巧独特 本手册精心收集了一些参考文献中巧妙的解题方法和独特的解题技巧，这些方法和技巧是高等数学各类考试中的重要考点，掌握它们有助于提高读者的解题能力和考试成绩。

例题权威 立竿见影 本手册精心挑选了一些例题，它们绝大多数选自历届研究生入学考试题和优秀教材同济大学的《高等数学》中一些有代表性的习题，使读者有针对性地掌握各种解题方法和技巧。

图文并茂 编排新颖 本手册有550多幅函数图形和大量的表格，这些图形使得抽象的数学概念、定理、性质和公式变得十分直观、形象、易于理解和记忆，大量的表格使得全书内容一目了然。

叙述简洁 记忆方便 本手册使用了大量形象、直观的语言对艰涩的数学公式和结论进行了总结，不少公式和性质还以口诀的形式进行描述和说明，便于读者记忆和掌握。

ISBN 7-03-015916-0

9 787030 159168 >

ISBN 7-03-015916-0
定 价：26.00 元

高等数学学习手册

徐小湛 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本手册以高等数学的公式为主线，以简洁的形式分门别类地详细介绍了高等数学的主要公式、定义、定理、图形以及各种题型的解题方法和技巧．除了高等数学教材中的基本内容和公式、常见解题方法和技巧外，本手册还大量收集了一般教材中没有的，但在解题中有用的公式、特殊的解题方法和技巧．

使用本手册可以帮助读者迅速复习、回忆和掌握高等数学的公式、解题方法和技巧，以提高高等数学的学习效率、解题能力和考试成绩．

本手册适合学习高等数学（微积分）的大学一年级学生，也适合复习高等数学并准备考研究生的高年级学生．对学习和复习高等数学的其他读者也有参考价值．

本手册还可作为高等数学教师的一本方便的教学参考书和工具书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习手册/徐小湛编著．—北京：科学出版社，2005
ISBN 7-03-015916-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．高等数学-高等学校-自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 078023 号

责任编辑：胡华强　赵　靖　祖翠娥/责任校对：鲁　素
责任印制：安春生/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005 年 12 月第　一　版　　开本：B5(720×1000)
2005 年 12 月第一次印刷　　印张：23 1/2
印数：1—4 000　　字数：436 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前言

高等数学是高等院校许多专业的一门重要的基础课，它对于大学很多课程的学习、对于培养和提高学生的素质都具有十分重要的作用．此外，高等数学也是研究生入学考试的重要内容．

在多年的高等数学教学中，作者感到无论是正在学习高等数学的大学一年级学生，还是在准备研究生入学考试的大学高年级学生都需要一本能帮助他们系统复习高等数学公式、提高解题方法和解题技巧的工具书．针对这种需求，作者编写了这本《高等数学学习手册》．

本手册对于正在学习高等数学并希望提高解题能力和技巧的大学生，以及正在复习高等数学准备考研究生的读者都具有极大的参考价值．本手册对曾经学过高等数学，并希望在短时间迅速复习和回忆高等数学的读者也具有较大的帮助．

除了高等数学教材中的基本内容和公式、常见解题方法和技巧外，本手册还大量收集了一般教材中没有的，但在解题中有用的公式、特殊的解题方法和技巧．例如，2.3.1 节介绍了**分段函数的导数的简便求法**，3.6.3 节给出了**求渐近线的一些特殊方法**，9.2.4 节讲了如何**利用对称性化简二重积分**，10.6.3 节介绍了**计算曲面积分的一个方便的公式**．

在作者多年的高等数学教学过程中，经常遇到喜欢思考的同学提出的一些具有代表性的问题．例如：

1．无穷小可以进行比较，那么无穷大是否也可以进行比较(见 1.7.10 节)？

2．等价无穷小只能在乘积因子之间进行代换吗？能不能在加减项之间进行等价无穷小代换？在什么情况下才可以进行这样的代换(见 1.7.8 节、1.8.5 节)？

3．分段函数在分段点处的导数一定要用定义去求吗？有没有更简便的方法(见 2.3.1 节)？

4．奇(偶、周期)函数的导数是偶(奇、周期)函数，那么奇(偶、周期)函数的原函数(或不定积分)是否一定是偶(奇、周期)函数(见 5.3.5 节)？

5．如何求一般柱面(锥面、旋转曲面)的方程(见 7.3.6 节、7.3.9 节、7.3.10 节)？

6．教材上有两平面之间的关系的讨论，请问如何讨论三平面之间的关系(见 7.5.4 节)？

7．教材上只有求二元函数的极值的方法，请问如何求三元函数或多元函数的极值(见 8.8.4 节)？

8. 什么是三重积分的"先二后一"积分法(见 9.4.2 节)?

9. 如何利用对称性化简重积分和曲线(曲面)积分(见 9.2.4 节、9.4.4 节、10.1.5 节、10.5.4 节)?

10. 级数的绝对收敛和条件收敛都是收敛,它们究竟有什么区别(见 11.3.5 节)?

这些问题是同学们在学习高等数学或在解题过程中时常遇到或想到的.它们都是同学们在学习教材内容的基础上提出的更加深入的问题.但是,高等数学教材对于同学们提出的这些问题一般都没有给予正面或直接的回答.本手册回答了以上问题,以及很多读者关心的其他问题.因此,本书将有助于加深读者对高等数学的理解和认识,并提高解决各种数学问题的能力.

本手册精心挑选了一些例题,以说明各种公式和技巧在解题中的应用.这些例题绝大多数选自历届研究生入学考试题和同济大学编写的优秀教材的《高等数学》中的一些有代表性的习题.这些例子将有助于读者掌握各种解题方法和技巧,并使读者的解题能力在本科水平的基础上提高到一个更高的层次,从而为今后打算考研究生的同学打下坚实的数学基础.

为了便于读者记忆和掌握艰涩的数学公式和结论,本手册使用了大量形象、直观的语言对这些公式和结论进行了总结,不少结论还用便于记忆的口诀形式予以描述(见 1.1.9 节、1.7.4 节、11.3.3 节).

本手册根据高等数学的内容和各种问题及题型编写了详细的目录,以便于读者查阅.读者将会发现这是一本十分方便查阅的手册.

为了便于读者查阅有关的初等数学公式,我们将高等数学中常用的初等数学公式作为附录列入手册之中.

本手册虽经作者反复检查和校对,但错误和疏漏在所难免,诚请读者予以批评指正.读者可以与作者交流学习高等数学的心得,并提出您的宝贵意见和建议.电子邮箱:xuxzmail@163.com,个人主页:http://xuxz.nease.net.

作者对在本书准备过程中给予作者以支持和鼓励,并提出中肯建议的同事表示衷心的感谢.作者还特别感谢科学出版社的编辑和排版人员为本书所付出的辛勤劳动.

徐小湛

2005年8月于川大南园

目 录

第1章　函数　极限　连续性

1.1　集合　映射　函数

1.1.1　几个常用的逻辑符号(表1.1.1)

表1.1.1

逻辑符号	符号名称	符号含意	说　明
$\forall$	全称量词	表示“对于所有的”，“对每一个”	这个倒写的A来自英文单词All的第一个字母
$\exists$	存在量词	表示“存在”，“至少有一个”	这个反写的E来自英文单词Exist的第一个字母
$\Rightarrow$	蕴涵符号	“$A\Rightarrow B$”表示“由命题A可以推出命题B”	“$A\Rightarrow B$”读作“若A则B”
$\Leftrightarrow$	等价符号	“$A\Leftrightarrow B$”表示“$A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow A$”，即A与B是等价命题	“$A\Leftrightarrow B$”读作“A当且仅当B”或“A等价于B”

例1.1.1　试用逻辑符号表示下列命题：

(1) 对任意实数x，都存在比x更大的实数y；(2) 任意两个实数之间都存在一个实数.

解　(1) $\forall x\in\mathbf{R},\exists y\in\mathbf{R}(y>x)$；(2) $\forall x,y\in\mathbf{R}(x<y)\Rightarrow\exists z\in\mathbf{R}(x<z<y)$.

1.1.2　数集的记号(表1.1.2)

表1.1.2

数集记号	数集名称	集　合
$\mathbf{N}$	自然数集	$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$
$\mathbf{Z}$	整数集	$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$
$\mathbf{Q}$	有理数集	$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle\vert\, p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}\text{，且}p\text{与}q\text{互质}\right\}$
$\mathbf{R}$	实数集	$\mathbf{R}=\{x\mid-\infty<x<+\infty\}$

1.1.3 集合及其运算

1. 集合的概念

集合 所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体. 例如, 全体实数集合, 全体正整数集合.

组成集合的事物称为该集合的元素(简称元). 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A, 记作 $a\in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A, 记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in} A$.

有限集与无限集 只含有有限个元素的集合称为有限集, 含有无限个元素的集合称为无限集.

例如, 全体英文字母构成的集合是有限集, 全体整数构成的集合是无限集.

一个集合是无限集的充分必要条件是该集合可以与它的一个真子集建立一一对应. 有限集不可能与它的任何真子集建立一一对应.

可数集与不可数集 能与自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 建立一一对应的无限集称为可数集, 不能与自然数集建立一一对应的无限集称为不可数集.

例如, 自然数集、整数集、有理数集都是可数集(这 3 个集合的元素是一样多的), 而无理数集和任何区间 $(a,b)(a<b)$ 都是不可数集.

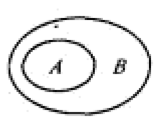


图 1.1.1

子集 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 是集合 B 的子集(图 1.1.1), 记作 $A\subset B$(读作"A 包含于 B")或 $B\supset A$(读作"B 包含 A"). $A\subset B\Leftrightarrow(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$.

如果 A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不属于 A, 则称 A 为 B 的真子集, 记作 $A\subsetneqq B$.

注 有的教材用 $A\subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集, 用 $A\subset B$ 表示 A 是 B 的真子集.

空集 不包含任何元素的集合称为空集, 记作 $\varnothing$. 空集是任何集合 A 的子集: $\varnothing\subset A$.

全集 全集就是所研究的对象的全体. 全集一般记作 U. 例如, 当我们研究的对象是实数时, 可以将实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集. 全集是一个相对概念, 我们所研究的对象所组成的任何集合 A 都是全集 U 的子集: $A\subset U$.

集合的相等 如果集合 A 与集合 B 含有完全相同的元素, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A=B$. $A=B$ 的充分必要条件是 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

2. 集合的运算

并集: $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$(图 1.1.2(a));

交集: $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$(图 1.1.2(b));

差集：$A-B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$（图 1.1.2(c)）；
补集：$A^C=\{x \mid x\in U$ 且 $x\notin A\}=U-A$（图 1.1.2(d)）.

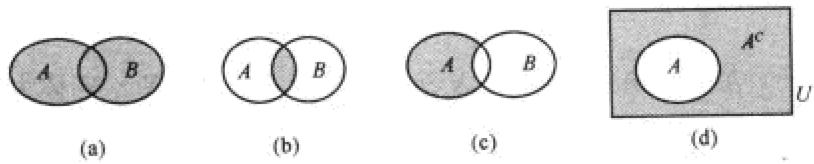


图 1.1.2

3. 集合的运算律

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.
结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

1.1.4 直积与关系

1. 直积

集合 A 与集合 B 的直积（或笛卡儿乘积）是由 A 的元素 x 和 B 的元素 y 组成的有序对 (x,y) 的集合，记作 $A\times B$（图 1.1.3），即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

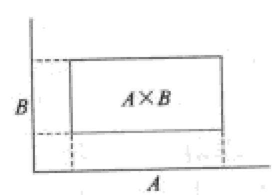


图 1.1.3

n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的直积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 表示 xOy 面（二维空间）上全体点的集合，记作 $\mathbf{R}^2$.

同理，$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbf{R}\}$ 表示三维空间 $Oxyz$ 中全体点的集合，$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$ 表示 n 维空间中全体点的集合.

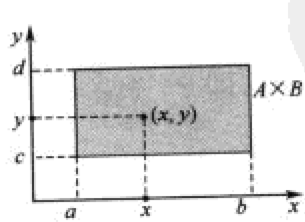


图 1.1.4

例 1.1.2 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$，求 $A\times B$，$B\times A$ 和 $B\times B$.

解 $A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$，$B\times A=\{(x,a),(y,a),(x,b),(y,b),(x,c),(y,c)\}$，$B\times B=\{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}$.

点评 一般 $A\times B\neq B\times A$.

例 1.1.3 设 $A=[a,b]$，$B=[c,d]$，求 $A\times B$.

解 $A\times B=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$,其图形为一矩形区域(图 1.1.4).

2. 关系

设 X 和 Y 是非空集合,则直积 $X\times Y$ 的任一子集 $R\subset X\times Y$ 称为 X 和 Y 的一个关系.若 $(x,y)\in R$,则称 x 和 y 有关系 R,记作 xRy;若 $(x,y)\notin R$,则称 x 和 y 没有关系 R,记作 $x\bar{R}y$. $R\subset X\times X$ 称为 X 上的一个关系.

例如,设 $X=\{2,4,6,8\}$,则 X 上的大于关系 $R_1=\{(x,y)\mid x$ 大于 $y\}=\{(4,2),(6,2),(8,2),(6,4),(8,4),(8,6)\}$. X 上的等于关系 $R_2=\{(x,y)\mid x=y\}=\{(2,2),(4,4),(6,6),(8,8)\}$. X 上的整除关系 $R_3=\{(x,y)\mid x$ 能整除 $y\}=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(4,4),(4,8),(6,6),(8,8)\}$.

1.1.5 映射与函数

映射 设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每一个元素 x,根据法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f:X\to Y$,其中 y 称为元素 x 在映射 f 下的象,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$,而元素 x 称为 y 在映射 f 下的一个原象.集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f;X 中所有元素的象所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即 $R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

满射 设有映射 $f:X\to Y$,如果 $R_f=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某个元素 x 的象:$y=f(x)$,则称 f 为 X 到 Y 的满射.

$f:X\to Y$ 是满射 $\Leftrightarrow \forall y\in Y, \exists x\in X(y=f(x))$.

单射 设有映射 $f:X\to Y$,如果对集合 X 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$,它们的象也不同:$f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射.

$f:X\to Y$ 是单射 $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X(x_1\neq x_2)\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

双射 如果映射 $f:X\to Y$ 既是单射,又是满射,则称 f 为 X 到 Y 的双射(或一一映射).

如果 $f:X\to Y$ 是单射,则 $f:X\to R_f$ 为双射.

逆映射 设 $f:X\to Y$ 是单射(则 $f:X\to R_f$ 为双射),则对每一个 $y\in R_f$,有唯一的 $x\in X$,使得 $f(x)=y$.因此,我们可以定义一个映射 $\varphi:R_f\to X$,使 $\varphi(y)=x\ (y=f(x))$.这个映射 φ 称为 f 的逆映射,记作 $f^{-1}:R_f\to X$,即 $f^{-1}(y)=x\ (y=f(x))$. f^{-1} 的定义域为 R_f,值域为 X.

设 $f:X\to Y$ 为双射,则 f 的逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 也是双射,且 $f^{-1}[f(x)]=x\ (\forall x\in X)$, $f[f^{-1}(y)]=y\ (\forall y\in Y)$.

映射 $f:X\to Y$ 有逆映射(可逆)的充分必要条件是 f 为单射.

函数 设 $X\subset \mathbf{R}$，则称映射 $f:X\to\mathbf{R}$ 为定义在 X 上的函数. 函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 常简记为 $y=f(x)(x\in X)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，f 称为对应法则，X 称为函数 f 的定义域，记作 D_f 或 D，即 $D_f=X$. $R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为函数 f 的值域.

函数的两个要素 确定一个函数 $f:D_f\to\mathbf{R}$ 的两个要素是：定义域 D_f 和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同(在两个对应法则下，相同的自变量对应于相同的因变量)，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的函数.

1.1.6 常见函数的定义域

定义域的约定 如果函数 $y=f(x)$ 是由一个数学表达式给出的，则约定函数的定义域是使该表达式有意义的一切实数组成的集合.

函数的定义域一般有以下要求(表 1.1.3).

表 1.1.3

函 数	定义域的限制	说 明
$y=\dfrac{1}{u}$	$u\neq 0$	分母不能为零
$y=\sqrt{u}$, $y=\sqrt[2n]{u}$	$u\geqslant 0$	开偶次方时，被开方数必须大于或等于零
$y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{u}}$	$u>0$	
$y=\ln u$, $y=\log_a u$	$u>0$	真数必须大于零
$y=\dfrac{1}{\ln u}$, $y=\dfrac{1}{\log_a u}$	$u>0$ 且 $u\neq 1$	真数大于零，且不能等于 1(因为 $\ln 1=0$)
$y=\tan u$	$u\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$\tan u=\dfrac{\sin u}{\cos u}(\cos u\neq 0)$
$y=\cot u$	$u\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$\cot u=\dfrac{\cos u}{\sin u}(\sin u\neq 0)$
$y=\arcsin u$ $y=\arccos u$	$-1\leqslant u\leqslant 1$	反正弦函数和反余弦函数的定义域为$[-1,1]$

1.1.7 邻域

设 a 为任意实数，δ 是一个很小的正实数.

点 a 的 δ 邻域(图 1.1.5(a))为

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

$U(a,\delta)$ 是到点 a 的距离小于 δ 的所有点 x 的集合.

点 a 的 δ 去心邻域(图 1.1.5(b))为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

邻域以点 a 为中心, δ 为半径

图 1.1.5

1.1.8 几个重要的分段函数

1. 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

性质 1.1.1　$|x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0$, $|x| = -x \Leftrightarrow x \leqslant 0$(图 1.1.6(a)).

2. 取整函数

$$y = [x] = \text{小于或等于 } x \text{ 的最大整数}.$$

用分段函数表示为

$$y = [x] = n, \qquad n \leqslant x < n + 1 (n \text{ 是整数}),$$

其图形是阶梯曲线(图 1.1.6(b)).

性质 1.1.2　$[x] \leqslant x < [x] + 1$, $[x] = x \Leftrightarrow x$ 是整数, $[x + y] \geqslant [x] + [y]$, $[x + n] = [x] + n$(n 是整数).

3. 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{图 } 1.1.6(\text{c})).$$

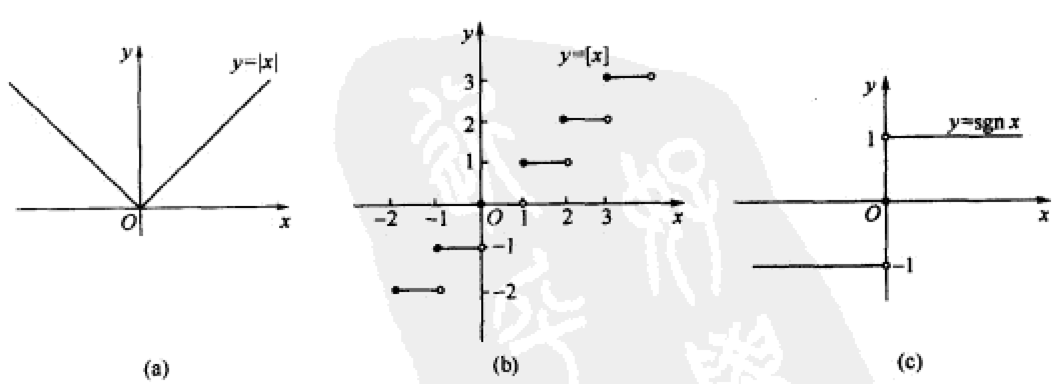


图 1.1.6

性质 1.1.3 $\operatorname{sgn}x=1\Leftrightarrow x>0$, $\operatorname{sgn}x=-1\Leftrightarrow x<0$;
$\operatorname{sgn}(x-a)=1\Leftrightarrow x>a$, $\operatorname{sgn}(x-a)=-1\Leftrightarrow x<a$;
$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$, $|x|=\operatorname{sgn}x\cdot x$.

4. 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

性质 1.1.4（狄利克雷函数有很多“糟糕的”性质）

(1)狄利克雷函数没有图形(没有任何曲线段).

(2)狄利克雷函数是以任何正有理数为周期的周期函数,因此它没有最小的正周期.

(3)狄利克雷函数处处无极限、处处不连续、处处不可导、在任何区间上不可积.

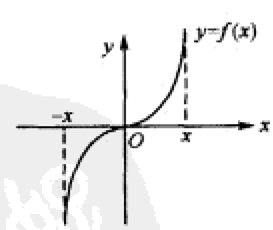
狄利克雷函数常用来举反例和构造具有某种特殊性质的函数.例如,函数 $y=xD(x)$仅在原点连续,在其他点处间断;函数 $y=x^2D(x)$仅在原点可导,在其他点处间断(从而不可导).

注 狄利克雷函数可以用极限定义为 $D(x)=\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)]$.

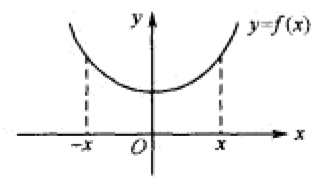
1.1.9 函数的奇偶性

1. 奇(偶)函数的定义(表 1.1.4)

表 1.1.4

定 义	图形特征
奇函数 $f(-x)=-f(x)(\forall x\in D)$ 定义域 D 关于原点对称	 图形关于原点对称

续表

定　义	图形特征
偶函数 $f(-x)=f(x)(\forall x\in D)$ 定义域 D 关于原点对称	 图形关于 y 轴对称

2. 常见的奇(偶)函数

偶函数：$C, x^2, x^{2n}, |x|, \cos x, \sec x, e^{x^2}, \sin x^2, \operatorname{ch} x$.

奇函数：$x, x^3, x^{2n+1}, \frac{1}{x}, \sqrt[3]{x}, \sin x, \tan x, \cot x, \csc x, \arcsin x, \arctan x, \operatorname{sh} x,$ $\operatorname{th} x, \operatorname{arsh} x, \operatorname{arth} x$.

一些较难的奇函数：$\ln\frac{1+x}{1-x}, \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \frac{a^x+1}{a^x-1}$.

注　$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\operatorname{arth}x=\ln(1+x)-\ln(1-x), \ln(x+\sqrt{x^2+1})=\operatorname{arsh}x$.

3. 奇(偶)函数的运算性质(表 1.1.5)

表 1.1.5

运算性质	记忆口诀
奇函数与奇函数的和(差)仍是奇函数 例如，$x^3+\sin x, x^3-x$	奇±奇=奇
奇函数与奇函数的积(商)是偶函数 例如，$x^3\sin x, \frac{\tan x}{x}$	奇×奇=偶 奇÷奇=偶
偶函数与偶函数的和、差、积、商仍是偶函数 例如，$x^2+\cos x, \|x\|\cos x, \frac{e^{x^2}}{\cos x}$	偶±偶=偶 偶×偶=偶 偶÷偶=偶
奇函数与偶函数的积(商)是奇函数 例如，$\|x\|\sin x, \frac{\cos x}{x}$	奇×偶=奇 奇÷偶=奇
奇函数与偶函数的和(差)一般是非奇非偶的函数 例如，$x^2+\sin x$	奇±偶=非奇非偶

4. 复合函数的奇偶性(表 1.1.6)

表 1.1.6

性　质	记忆口诀
若内函数 $\varphi(x)$是偶函数,则无论外函数 $f(u)$是否具有奇偶性,复合函数 $f[\varphi(x)]$都是偶函数 例如,e^{x^2},$\sin x^2$,$\ln\|x\|$	内偶则偶
若内函数 $\varphi(x)$是奇函数,外函数 $f(u)$是偶函数,则复合函数 $f[\varphi(x)]$是偶函数 例如,$\cos(\sin x)$,$\|\sin x\|$,$\sin^2 x$	内奇外偶=偶
若内函数 $\varphi(x)$和外函数 $f(u)$都是奇函数,则复合函数 $f[\varphi(x)]$也是奇函数 例如,$\sin\frac{1}{x}$,$\sqrt[3]{\tan x}$,$\sin^3 x$	内奇外奇=奇

点评　由以上性质可知:①若内函数 $\varphi(x)$和外函数 $f(u)$具有相同的奇偶性,则复合函数 $f[\varphi(x)]$也具有相同的奇偶性;②若内函数 $\varphi(x)$与外函数 $f(u)$具有不同的奇偶性,则复合函数 $f[\varphi(x)]$必为偶函数(记忆口诀:同类复合奇偶不变,异类复合必为偶).

5. 一类特定形式的奇(偶)函数

设 $f(x)$的定义域关于原点对称,则

(1) $f(x)+f(-x)$总是偶函数.

例如,$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,$\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$.

(2) $f(x)-f(-x)$总是奇函数.

例如,$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,$\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

(3) 任何函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数与一个偶函数之和:

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

1.1.10　函数的有界性

1. 有界集与无界集

设 X 是实数集,如果存在 $M>0$,使

$$|x|\leqslant M \qquad (\forall x\in X),$$

则称 X 是有界集,否则称 X 为无界集.

$$X\text{ 有界}\Leftrightarrow \exists M>0,\ \forall x\in X(|x|\leqslant M).$$
$$X\text{ 无界}\Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x\in X(|x|>M)$$
$$\Leftrightarrow \forall\text{ 自然数 } n,\ \exists x_n\in X(|x_n|>n).$$

有界集的等价定义 X 有界的充分必要条件是存在 $A,B(A<B)$,使 $A\leqslant x\leqslant B(\forall x\in X)$. A 和 B 分别称为 X 的下界和上界.

实数集的确界定理 (1)若 X 有上界,则 X 没有最大的上界(因为比上界更大的数也是上界),但 X 一定有最小的上界,称为 X 的上确界,记作 $\sup X$.(2)若 X 有下界,则 X 没有最小的下界(因为比下界更小的数也是下界),但 X 一定有最大的下界,称为 X 的下确界,记作 $\inf X$.

例如,集合 $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots\right\}$ 有上确界 1,下确界 $\frac{1}{2}$.

2. *有界函数与无界函数*

函数 $f(x)$ 在集合 $X(X\subset R_f)$ 上有界是指集合 $f(X)$ 是有界集,即存在 $M>0$,使

$$|f(x)|\leqslant M \qquad (\forall x\in X)(\text{图 } 1.1.7(\text{a})).$$

如果 $f(X)$ 是无界集,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

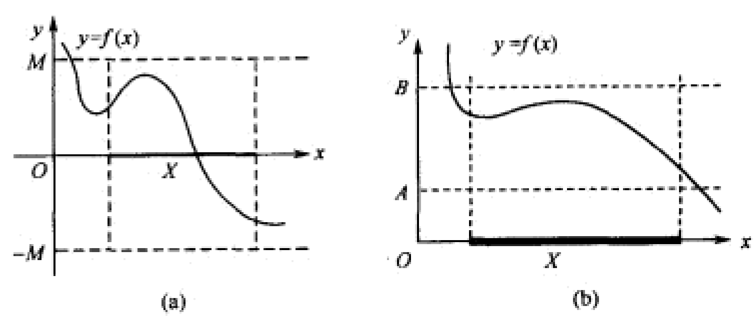


图 1.1.7

$$f(x)\text{ 在 } X \text{ 上有界}\Leftrightarrow \exists M>0,\ \forall x\in X(|f(x)|\leqslant M).$$
$$f(x)\text{ 在 } X \text{ 上无界}\Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists x\in X(|f(x)|>M)$$
$$\Leftrightarrow \forall\text{ 自然数 } n,\ \exists x_n\in X(|f(x_n)|>n).$$

有界性的等价刻画 函数 $f(x)$ 在集合 X 上有界的充分必要条件是存在 A, $B(A<B)$,使 $A\leqslant f(x)\leqslant B(\forall x\in X)$(图 1.1.7(b)). A 和 B 分别称为 $f(x)$ 在 X 上的下界和上界.

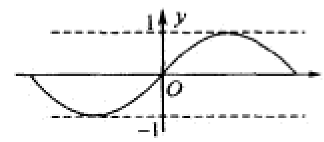
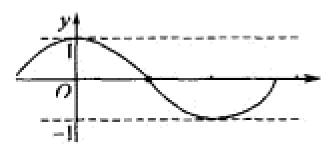
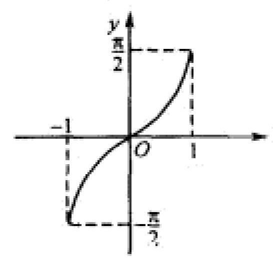
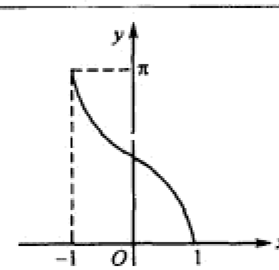
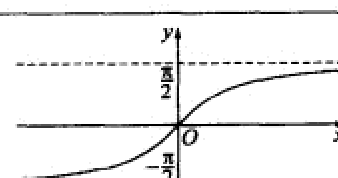
要证明 $f(x)$ 在 X 上有界,必须找到一个 $M>0$,使 $\forall x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant$

M;要证明 $f(x)$在 X 上无界,只须找到一个数列$\{x_n\}\subset X$,使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

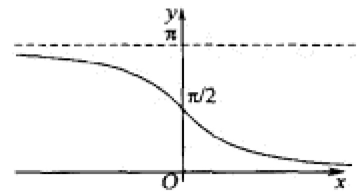
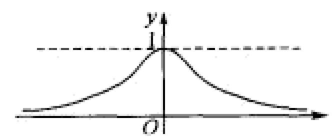
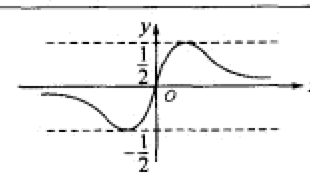
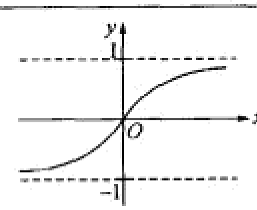
3. 常见的有界函数

下列函数在其定义域内是有界的(整体有界函数)(表 1.1.7).

表 1.1.7

函　数	有界性刻画	函数图形
$\sin x$	$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$	
$\cos x$	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	
$\arcsin x$	$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$	
$\arccos x$	$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$	
$\arctan x$	$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$	

续表

函　数	有界性刻画	函数图形
$\operatorname{arccot} x$	$0<\operatorname{arccot} x<\pi$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$0<\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant 1$	
$\dfrac{x}{1+x^2}$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$	
$\operatorname{th} x$	$\lvert \operatorname{th} x\rvert<1$	

注 如果外函数 $f(u)$是整体有界函数,则复合函数 $f[\varphi(x)]$也是整体有界的.例如,$\sin\dfrac{1}{x}$,$\arctan e^{x^2}$等都是整体有界的(记忆口诀:外函数有界,复合函数必有界).

例 1.1.4 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

证 因为$(|x|-1)^2=x^2-2|x|+1\geqslant 0$,所以 $x^2+1\geqslant 2|x|$,得$\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

例 1.1.5 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上无界.

证 $\forall M>0$,取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1)$使得 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M\left(\text{取正整数 } n>\dfrac{1}{2\pi}\left(M-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$,则$|f(x_n)|=\dfrac{1}{x_n}\sin\dfrac{1}{x_n}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$.所以 $f(x)$在$(0,1)$上无界.

点评 $\{x_n\}$是$(0,1)$中使 $f(x_n)$趋于无穷大的数列.所取的 x_n 满足 $\sin\dfrac{1}{x_n}=$

1,这是证明成功的关键.

1.1.11 函数的周期性

1. 周期函数的定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 l,使

$$f(x+l)=f(x) \qquad (\forall x \in D),$$

则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数(图 1.1.8).

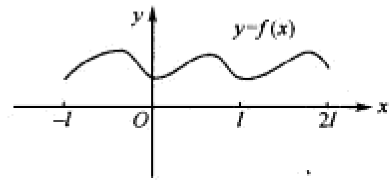


图 1.1.8

2. 常见的周期函数

$y=\sin x$, $y=\cos x$, 最小正周期为 2π.

$y=\tan x$, $y=\cot x$, 最小正周期为 π.

3. 周期函数的性质

性质 1.1.5 若函数 $f(x)$ 以 l 为周期,则 $f(x)$ 也以 $kl\,(k\in \mathbf{N})$ 为周期(周期的整倍数仍为周期).通常我们说的周期是最小正周期.

性质 1.1.6 若函数 $f(x)$ 以 l 为周期,则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{l}{|a|}$ 为周期.

例如, $\sin(3x+2)$ 以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期, $3\tan\frac{x}{4}$ 以 4π 为周期.

性质 1.1.7 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 l_1 和 $l_2\,(l_1\neq l_2)$ 为周期,则 $f(x)\pm g(x)$ 以 l_1 和 l_2 的最小公倍数为周期.

例如, $\sin 2x+\cos 3x$ 以 π 和 $\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数 2π 为周期.

性质 1.1.8 若 $\varphi(x)$ 是周期函数,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 也是周期函数.

例如, $e^{\sin x}$, $\sin^2 x$ 都是周期函数.

记忆 内函数是周期函数,则复合函数也是周期函数.

1.1.12 反函数

1. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,值域为 J.如果 $f: I\to J$ 是单射,则称逆映射 $f^{-1}: J\to I$ 为函数 f 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)\,(y=f(x))$.

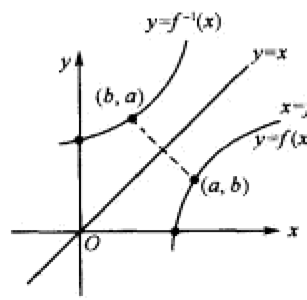
如果仍用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,则函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 有反函数的充分必要条件是 f 是单射($x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$).

注意　单调函数(是单射)一定有反函数,但不是单调的函数也可能有反函数.对于连续函数,只有单调函数才有反函数.

2. 反函数的图形

$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形重合,而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.1.9(a)).例如,$y=x^3$ 与 $x=\sqrt[3]{y}$ 的图形重合,而 $y=\sqrt[3]{x}$ 与 $y=x^3$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.1.9(b)).



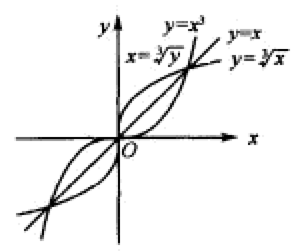


图 1.1.9

3. 求反函数的步骤

求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤如下:

(1) 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$;

(2) 交换变量 x 和 y,即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

4. 常见的一些互反的函数

$u^\lambda=v\Leftrightarrow u=\sqrt[\lambda]{v}$,

$a^u=v\Leftrightarrow u=\log_a v$, $e^u=v\Leftrightarrow u=\ln v$,

$\sin u=v\Leftrightarrow u=\arcsin v$, $\cos u=v\Leftrightarrow u=\arccos v$,

$\tan u=v\Leftrightarrow u=\arctan v$.

例 1.1.6　设 $y=f(x)=\begin{cases}\tan x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x<2,\\ e^x, & 2<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

解　分段求出各区间段上的反函数表达式:

$$y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)\Rightarrow x=\arctan y(-\infty<y<0);$$

$$y=x^2(0\leqslant x<2)\Rightarrow x=\sqrt{y}(0\leqslant y<4);$$

$$y=e^x(2<x<+\infty)\Rightarrow x=\ln y(e^2<y<+\infty).$$

所以 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\arctan x, & -\infty<x<0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<4,\\ \ln x, & e^2<x<+\infty.\end{cases}$

1.1.13 复合函数

1. 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$的值域为 R_g,若 $D_f\cap R_g\neq\varnothing$,则称函数 $y=f[g(x)]$为 $g(x)$与 $f(u)$的复合函数,其中 x 为自变量,u 为中间变量,y 为因变量.称 $g(x)$为内函数,$f(u)$为外函数.函数 g 与 f 的复合函数也记作 $f\circ g$,即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

两个函数可以复合的条件是内函数的值域与外函数的定义域的交集不是空集.例如,$y=\sqrt{u}$ 的定义域为$[0,+\infty)$,$u=x^2-1$ 的值域为$[-1,+\infty)$.因为$[0,+\infty)\cap[-1,+\infty)=[0,+\infty)\neq\varnothing$,故这两个函数可以复合成 $y=\sqrt{x^2-1}$.又如,$y=\ln u$ 的定义域为$(0,+\infty)$,而 $u=-x^2$ 的值域为$(-\infty,0]$,因为$(0,+\infty)\cap(-\infty,0]=\varnothing$,故这两个函数不能构成复合函数.

2. 有关复合函数的两类问题

(1)正问题.已知 $y=f(x)$和 $y=g(x)$的表达式,求复合函数 $y=f[g(x)]$的表达式.对这类问题可用代入法或填空法解.

例如,已知 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$,$g(x)=x+\frac{1}{x}$,则 $f[g(x)]=[g(x)]^2+\frac{1}{g(x)}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}+2.$

(2)反问题.已知复合函数 $f[g(x)]$和内函数 $g(x)$的表达式,求外函数$f(x)$的表达式.

解法:设 $f[g(x)]=\varphi(x)$.令 $g(x)=u$,解出 $x=g^{-1}(u)$,得 $f(u)=\varphi[g^{-1}(u)]$,于是 $f(x)=\varphi[g^{-1}(x)]$.

例 1.1.7 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$的表达式.

解 解法一.令 $e^x+1=u$,解得 $x=\ln(u-1)$,于是原式化为

$$f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1,$$

所以 $f(x)=x^2-x+1$.

解法二. 将原式右端凑成 e^x+1 的表达式：

$$f(e^x+1)=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1,$$

再将 e^x+1 换成 x, 得 $f(x)=x^2-x+1$.

例 1.1.8 (1997 年 2[①]) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$ 又 $f(x)\leqslant 0\Rightarrow f(x)=-x(x\geqslant 0)$, $f(x)>0\Rightarrow f(x)=x^2(x<0)$. 所以 $g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$

1.1.14 基本初等函数

以下 5 类函数称为基本初等函数：幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数.

1. *幂函数*

(1) $y=x^\mu$(μ 是实数).

(2) $y=x^\mu$ 的定义域和值域取决于 μ 的值. 当 $x>0$ 时, $y=x^\mu$ 都有定义.

(3) 常用的幂函数(图 1.1.10(a)~(c)).

$$y=x,\quad y=x^2,\quad y=\sqrt{x}(\text{或 } x=y^2),\quad y=x^3,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=\frac{1}{x}.$$

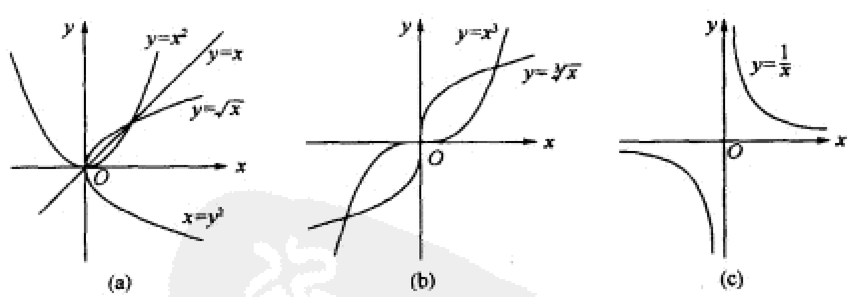


图 1.1.10

注 幂函数 $y=x^\mu$ 的反函数 $y=\sqrt[\mu]{x}$ 仍是幂函数.

2. *指数函数*

(1) $y=a^x(a>0, a\neq 1)$(图 1.1.11(a)).

(2) 定义域:$(-\infty,+\infty)$;值域:$(0,+\infty)$.

① 1997 年 2 指 1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二的试题. 下同.

(3) 单调性：$a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；$a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少.

(4) 常用的指数函数：$y=e^x$（图 1.1.11(b)），$y=2^x$.

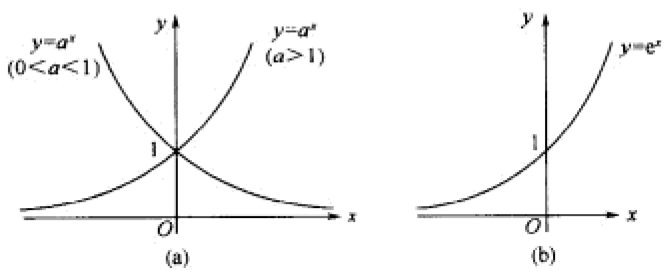


图 1.1.11

(5) 极限：

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}2^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty.$$

(6) 特殊函数值：$a^0=1,e^0=1$.

3. 对数函数

(1) $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$（图 1.1.12(a)）是 $y=a^x$ 的反函数.

(2) 定义域：$(0,+\infty)$；值域：$(-\infty,+\infty)$.

(3) 单调性：$a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调增加；$a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调减少.

(4) 常用的对数函数：$y=\ln x$（自然对数：$\ln x=\log_e x$，$e=2.71828\cdots$）（图 1.1.12(b)）.

(5) 特殊函数值：$\log_a 1=0,\log_a a=1,\ln 1=0,\ln e=1$.

(6) 极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

(7) 常用公式：$x=e^{\ln x}$，$u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$.

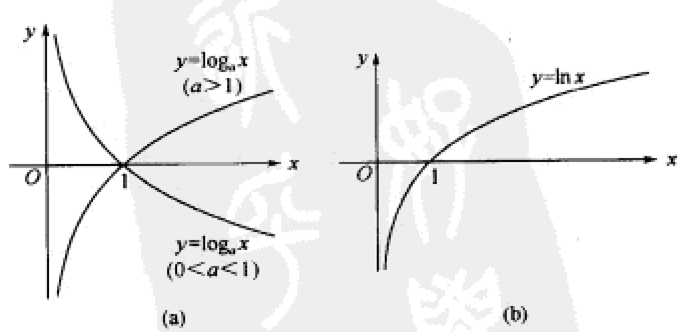


图 1.1.12

4. 三角函数

(1) 正弦函数与余弦函数.

① 正弦函数 $y=\sin x$(图 1.1.13(a)),余弦函数 $y=\cos x$(图 1.1.13(b)).

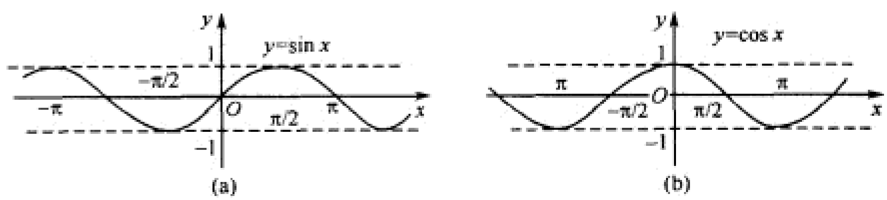


图 1.1.13

② 定义域:$(-\infty,+\infty)$;值域:$[-1,1]$.

③ 奇偶性:$y=\sin x$ 是奇函数, $y=\cos x$ 是偶函数.

④ 周期性:$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 均以 2π 为周期.

⑤ 有界性:在其定义域内有界,即 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$.

⑥ 特殊函数值:

$$\sin 0=0,\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1,\quad \sin 2\pi=0,$$

$$\cos 0=1,\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0,\quad \cos 2\pi=1.$$

(2) 正切函数与余切函数.

① 正切函数 $y=\tan x$(图 1.1.14(a)),余切函数 $y=\cot x$(图 1.1.14(b)).

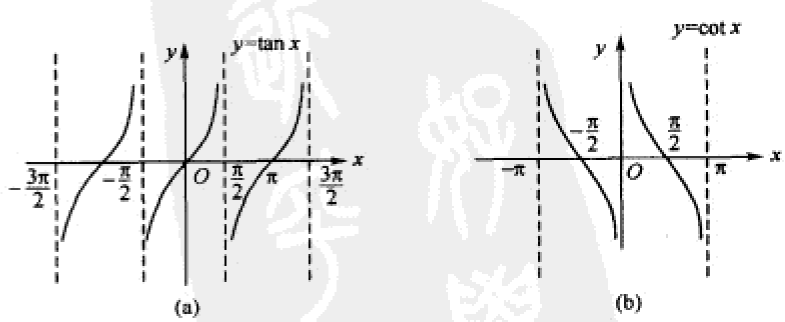


图 1.1.14

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}.$

② 定义域：$y=\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 的一切实数 x，

$y=\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi$ 的一切实数 x.

值域：$(-\infty, +\infty)$.

③ 奇偶性：$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均为奇函数.

④ 周期性：$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均以 π 为周期.

⑤ 特殊函数值：

$$\begin{array}{llll}
\tan 0=0, & \tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, & \tan\dfrac{\pi}{4}=1, & \tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}, \\
\tan\dfrac{\pi}{2}=\infty, & \tan\pi=0, & \tan\dfrac{3\pi}{2}=\infty, & \tan 2\pi=0, \\
\cot 0=\infty, & \cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}, & \cot\dfrac{\pi}{4}=1, & \cot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\
\cot\dfrac{\pi}{2}=0, & \cot\pi=\infty, & \cot\dfrac{3\pi}{2}=0, & \cot 2\pi=\infty.
\end{array}$$

(3) 正割函数与余割函数.

① 正割函数 $y=\sec x$（图 1.1.15(a)），余割函数 $y=\csc x$（图 1.1.15(b)）.

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \dfrac{1}{\sin x}.$

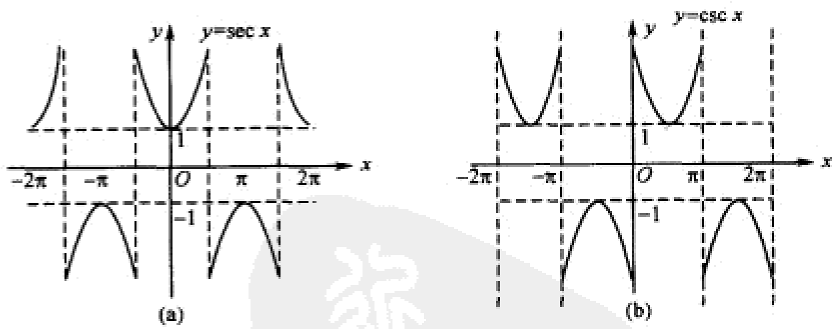


图 1.1.15

② 定义域：$y=\sec x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 的一切实数 x，

$y=\csc x$ 的定义域为 $x \neq k\pi$ 的一切实数 x.

值域：$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

③ 奇偶性：$y=\sec x$ 为偶函数，$y=\csc x$ 为奇函数.

④ 周期性：$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 均以 2π 为周期.

5. 反三角函数

(1) 反正弦函数与反余弦函数.

① 反正弦函数 $y=\arcsin x$(图 1.1.16(a)),反余弦函数 $y=\arccos x$(图 1.1.16(b)).

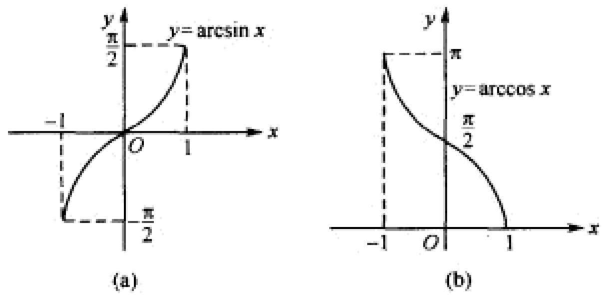


图 1.1.16

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,

$y=\arccos x$ 是 $y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$的反函数.

② 定义域:$[-1,1]$.

值域:$y=\arcsin x$ 的值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y=\arccos x$ 的值域为$[0,\pi]$.

③ 单调性:$y=\arcsin x$ 单调增加, $y=\arccos x$ 单调减少.

④ 奇偶性:$y=\arcsin x$ 为奇函数.

⑤ 有界性:两个函数在其定义域内有界:$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$.

⑥ 性质:$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant1)$.

⑦ 特殊函数值:

$\arcsin 0=0$, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$,

$\arccos 1=0$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

(2) 反正切函数与反余切函数.

① 反正切函数 $y=\arctan x$(图 1.1.17(a)),反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$(图 1.1.17(b)).

$y=\arctan x$ 是 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,

$y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x(0<x<\pi)$的反函数.

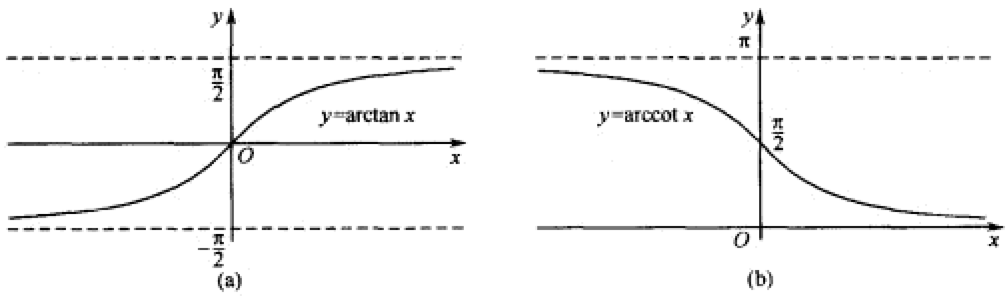


图 1.1.17

② 定义域：$(-\infty,+\infty)$. 值域：$y=\arctan x$ 的值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\operatorname{arccot}x$ 的值域为$(0,\pi)$.

③ 单调性：$y=\arctan x$ 单调增加，$y=\operatorname{arccot}x$ 单调减少.

④ 奇偶性：$y=\arctan x$ 为奇函数.

⑤ 有界性：两个函数在其定义域内有界：$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，$0<\operatorname{arccot}x<\pi$.

⑥ 性质：$\arctan x+\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2}(-\infty<x<+\infty)$.

⑦ 特殊函数值：

$$\arctan 0=0,\quad \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6},\quad \arctan 1=\frac{\pi}{4},\quad \arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arccot}0=\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{arccot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{arccot}1=\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}.$$

⑧ 极限：

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi,\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0.$$

1.1.15 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=x\sqrt{1-x^2}$，$y=\frac{\sin^2 x}{x}+\cos x$，$y=\ln\cos x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$等都是初等函数.

由于分段函数一般不能用一个式子表示，所以分段函数一般不是初等函数.

例如，符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$，取整函数 $y=[x]$，狄利克雷函数 $y=D(x)$都不是初等函数. 但是，绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$既是分段函数，也是初等函数.

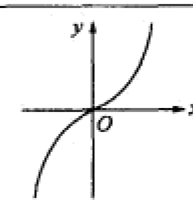
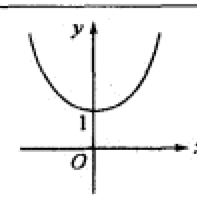
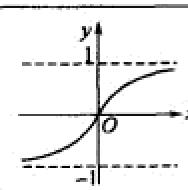
幂指函数 $x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x}$是初等函数.

有的函数无法用有限次的四则运算和有限次的复合运算表示,因此它们不是初等函数.例如,$\int e^{-x^2}dx$,$\int\frac{\sin x}{x}dx$ 等都不是初等函数(见 4.5.3 节)(这些函数往往可以表示成无穷级数(幂级数)的形式).

1.1.16 双曲函数

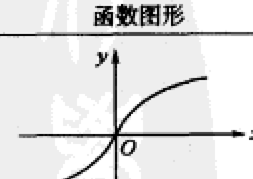
1. *双曲函数*(表 1.1.8)

表 1.1.8

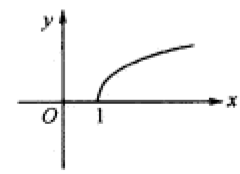
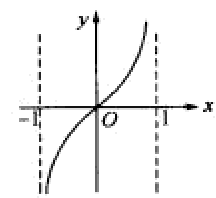
函数定义	奇偶性	函数图形
双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}(-\infty<x<+\infty)$	奇函数	
双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}(-\infty<x<+\infty)$	偶函数	
双曲正切 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$	奇函数	

2. *反双曲函数*(表 1.1.9)

表 1.1.9

函数定义	奇偶性	函数图形
反双曲正弦 $\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-\infty<x<+\infty)$	奇函数	

续表

函数定义	奇偶性	函数图形
反双曲余弦 $\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})(x\geqslant 1)$		
反双曲正切 $\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}(-1<x<1)$	奇函数	

3. 双曲函数的性质(与三角函数的性质比较)(表 1.1.10)

表 1.1.10

双曲函数的性质	比较三角函数的性质	说明
$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$ $\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$	$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$	相同
$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$ $\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$	±号相反
$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$	$\sin 2x=2\sin x\cos x$	相同
$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$	$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$	±号相反
$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$	$\cos^2x+\sin^2x=1$	±号相反

● 1.2 数列的极限

1.2.1 数列的概念

1. 数列

数列$\{x_n\}$：$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，其中 x_n 称为数列的一般项(或通项).

2. 整标函数

数列$\{x_n\}$可以看成一个定义在自然数集 **N** 上的函数 $f:n\to x_n=f(n)(n\in$

$\mathbf{N}$)，称为整标函数，即

$$x_n = f(n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

3. 数列的单调性

单增数列$\{x_n\}$：$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant \cdots$.

例如，$\{n\}$，$\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$是单增数列.

单减数列$\{x_n\}$：$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{n-1} \geqslant x_n \geqslant \cdots$.

例如，$\{-n\}$，$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$是单减数列.

4. 数列的有界(无界)性

有界数列$\{x_n\}$：$\exists M>0$，使$|x_n| \leqslant M (n=1,2,\cdots)$.

例如，$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\{(-1)^n\}$是有界数列.

无界数列$\{x_n\}$：$\forall M>0$，$\exists n \in \mathbf{N}$，使$|x_n|>M$.

例如，$\{n\}$，$\{(-1)^n 2^n\}$是无界数列.

数列有界性的等价定义：数列$\{x_n\}$有界的充分必要条件是：$\exists A, B (A<B)$，使得 $A \leqslant x_n \leqslant B (n \in \mathbf{N})$. A 和 B 分别称为数列的下界和上界.

数列有界的充分必要条件是它既有上界，又有下界.

1.2.2　数列的极限

1. 数列极限的直观定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 是指：当 n 无限增大($n\to\infty$)时，一般项 x_n 无限地趋于数 a ($x_n \to a$).

例如，当 $n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}\to 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

2. 数列极限的严格定义(ε-N 定义)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 是指：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式$|x_n - a|<\varepsilon$ 都成立.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N \Rightarrow |x_n - a|<\varepsilon)$.

注　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a \Leftrightarrow \exists \varepsilon>0, \forall N, \exists n>N$ 使得$|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则称数列$\{x_n\}$收敛，且以 a 为极限；若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在，则称数列$\{x_n\}$发散.

3. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何解释

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表明：$\forall\epsilon>0$，$\exists N$，使得 $n>N$ 时 $x_n\in(a-\epsilon,a+\epsilon)$，即 $\{x_{N+1},x_{N+2},\cdots\}\subset(a-\epsilon,a+\epsilon)$（图 1.2.1）.

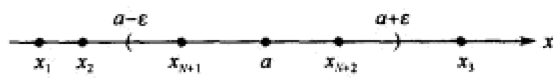


图 1.2.1

4. 用定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的方法（ϵ-N 法）

对于任意给定的 $\epsilon>0$，从不等式 $|x_n-a|<\epsilon$ 出发，去分析一个不等式 $n>\varphi(\epsilon)$（一个与 ϵ 有关的很大的数），然后取 $N=[\varphi(\epsilon)]$（$\varphi(\epsilon)$的整数部分）.

最后给出证明：$\forall\epsilon>0$，$\exists N=[\varphi(\epsilon)]$，当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-a|<\epsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.2.1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

证 $\forall\epsilon>0$，要 $\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{4n+2}<\epsilon$，只要 $4n+2>\dfrac{1}{\epsilon}$ 或 $n>\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\epsilon}-2\right)$ $\left(\text{限制 }\epsilon<\dfrac{1}{2}\right)$. 于是取 $N=\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\epsilon}-2\right)\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\epsilon$. 所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

1.2.3 一些重要的数列极限（表 1.2.1）

表 1.2.1

数列极限	说明
$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(\lvert q\rvert<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty(\lvert q\rvert>1)$	例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0(k>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^k=\infty(k>0)$	例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^3=\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$	例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0(a>1,k>0)$	此极限说明 a^n 是 n^k 的高阶无穷大
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>1)$	此极限说明 $n!$ 是 a^n 的高阶无穷大

续表

数列极限	说　明
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$	此极限说明 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$	
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$	见例 1.2.2
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$	重要极限，e 的定义
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$	e 的无穷级数展开式
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$	调和级数发散
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$	$C=0.5772\cdots$是欧拉常数

1.2.4　数列极限的斯托尔茨定理

斯托尔茨(Stolz)定理可以用来计算一些难度较大的数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\left(\frac{\infty}{\infty}型\right)$.

1．斯托尔茨定理

设数列$\{y_n\}$单调增加且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在或为$\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

2．斯托尔茨定理的推论

由斯托尔茨定理可得下列结论：

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$(数列前 n 项的算术平均值的极限等于数列的极限).

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在($x_n>0$)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$(正项数列前 n 项的几何平均值的极限等于数列的极限).

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在($x_n>0$)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

例 1.2.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$

1.2.5 数列极限的性质

由极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何解释(见 1.2.2 节)可以得出数列极限的若干性质(表 1.2.2).

表 1.2.2

数列极限的性质	说明
唯一性 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限是唯一的	极限存在必唯一
有界性 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 是有界数列	收敛数列必有界 例如,$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 收敛,因此它是有界数列
推论 若数列 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{x_n\}$ 发散	无界数列必发散 例如,$\{n\}$ 无界,因此它是发散数列
注 有界数列不一定收敛	**经典反例** 数列 $\{(-1)^n\}$ 有界,但它不收敛
保号性 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$(或 $a<0$),则存在 N,使得当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)	收敛于正数(负数)的数列最终将成为正的(负的)数列(最多有有限项例外)

1.2.6 数列与子数列的敛散性关系(表 1.2.3)

表 1.2.3

敛散性关系	说明
命题 1 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,则它的任何子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a	整体收敛,部分收敛
推论 1 若数列 $\{x_n\}$ 有一个发散的子数列 $\{x_{n_k}\}$,则 $\{x_n\}$ 也发散	部分发散,整体发散
推论 2 若数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限,则 $\{x_n\}$ 必发散	例如,数列 $\{(-1)^n\}$ 有两个子数列 $\{(-1)^{2n-1}\}$ 和 $\{(-1)^{2n}\}$ 分别收敛于不同的极限 -1 和 1,故数列发散
命题 2 若子数列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$ 都收敛于 a,则数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 a	奇次项子数列和偶次项子数列都收敛于同一极限,则数列收敛(重要结论)

1.2.7 数列收敛的两个准则

1. 夹逼准则

夹逼准则 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$(图 1.2.2).

图 1.2.2

常用特例：若 $|x_n| \leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

注意 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n < \lim\limits_{n\to\infty} z_n$，则不能形成夹逼.

夹逼准则的用法：当极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 很难计算时，可将 x_n 适当缩放成 y_n 和 $z_n(y_n \leqslant x_n \leqslant z_n)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

例 1.2.3 (1995 年 2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 因为

$$\frac{i}{n^2+n+n} \leqslant \frac{i}{n^2+n+i} \leqslant \frac{i}{n^2+n+1} \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1},$$

得

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} \leqslant x_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\dfrac{1}{2}$，所以原极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2}$.

2. 单调有界准则

单调有界准则 单调有界数列必有极限.

具体地说，

(1) 单调增加的数列 $\{x_n\}$ 若有上界，则 $\{x_n\}$ 必有极限且

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sup\{x_n\}(\{x_n\} \text{ 的最小上界(上确界)}).$$

(2) 单调减少的数列 $\{x_n\}$ 若有下界，则 $\{x_n\}$ 必有极限且

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\inf\{x_n\}(\{x_n\} \text{ 的最大下界(下确界)}).$$

例如，数列 $\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调增加且有上界，于是它收敛于它的最小上界 1；数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调减少且有下界，于是它收敛于它的最大下界 0.

经典例子 数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增加且有上界 3, 故此数列收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

注 单调增加的数列$\{x_n\}$若无上界,则它发散到正无穷大:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$;单调减少的数列$\{x_n\}$若无下界,则它发散到负无穷大:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

单调有界准则的用法:如果能判定数列$\{x_n\}$单调增加(或单调减少),并且能判定$\{x_n\}$有上界(或下界),则$\{x_n\}$收敛.

例 1.2.4 (1996 年 1) 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ ($n=1,2,\cdots$), 试证数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

证 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对某个正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$, 则有 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$, 故由归纳法知, 对一切正整数 n, 都有 $x_n>x_{n+1}$, 即$\{x_n\}$为单调减少数列. 又显见 $x_n>0$ ($n=1,2,\cdots$), 即$\{x_n\}$有下界. 由数列极限的单调有界准则知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由 $x_{n+1}^2=6+x_n$, 两边取极限得 $a^2=6+a$. 解得 $a=3$, $a=-2$. 因为 $x_n>0$ ($n=1,2,\cdots$), 所以 $a\geqslant 0$, 舍去 $a=-2$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

1.2.8* 数列极限的运算法则

设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛, 则数列$\{x_n\pm y_n\}$, $\{cx_n\}$, $\{x_ny_n\}$和$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$) 也收敛, 且有下列运算法则(表 1.2.4).

表 1.2.4

运算法则	说明	
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$	和(差)的极限等于极限的和(差)	数列极限的线性性质
$\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ (c 为常数)	倍数的极限等于极限的倍数	
$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$	积的极限等于极限的积	
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$)	商的极限等于极限的商	
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$)	倒数的极限等于极限的倒数	

1.2.9 数列敛散性的若干性质(表 1.2.5)

表 1.2.5

性　质	说　明
设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛,则$\{x_n+y_n\}$也收敛	收敛+收敛=收敛
设$\{x_n\}$收敛,但$\{y_n\}$发散,则$\{x_n+y_n\}$必发散	收敛+发散=发散 **证明**　用反证法
设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散,则$\{x_n+y_n\}$不一定发散	发散+发散$\nRightarrow$发散 **经典反例**　$\{(-1)^n\}$和$\{(-1)^{n+1}\}$都发散, 但$\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}=\{0\}$(常数列)收敛

● 1.3 函数的极限

1.3.1 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

1. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的直观定义

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 是指:当自变量 x 无限地趋于 $x_0(x\to x_0)$时,相应的函数值 $f(x)$无限地趋于数 $A(f(x)\to A)$,即$|x-x_0|\to 0\Rightarrow|f(x)-A|\to 0$.

例如,当 $x\to 2$ 时,$3x+1\to 7$,所以$\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的严格定义(ϵ-δ 定义)

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 是指:对于任意给定的 $\epsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有$|f(x)-A|<\epsilon$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow(\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\epsilon).$$

注　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与函数值 $f(x_0)$无关.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何解释

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 表明:$\forall\epsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得 $A-\epsilon<f(x)<A+\epsilon(x\in\mathring{U}(x_0,$

δ)),即对于任意的 $\varepsilon>0$,都能确定 x_0 的一个 δ 去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,使得在这个去心邻域内,函数 $y=f(x)$ 的图形位于水平直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间的一个宽为 2ε 的条形区域内(图 1.3.1).

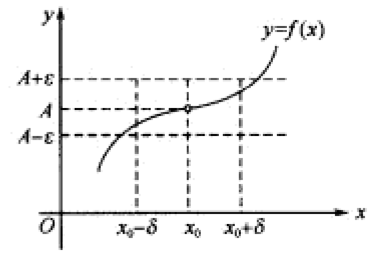


图 1.3.1

4. 用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的方法(ε-δ 法)

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发,去分析出一个不等式 $|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$(一个与 ε 有关的很小的正数),然后取 $\delta=\varphi(\varepsilon)$.

最后给出证明: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varphi(\varepsilon)>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 1.3.1 证明 $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.

证 $\forall\varepsilon>0$,要 $|(3x+1)-7|=3|x-2|<\varepsilon$,只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$.于是取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时,就有 $|(3x+1)-7|<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.

1.3.2 单侧极限

1. 单侧极限的定义

左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 是指: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得当 x 满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$(图 1.3.2(a)).

右极限 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 是指: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得当 x 满足不等式 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$(图 1.3.2(b)).

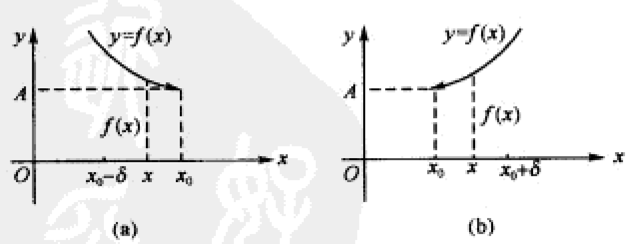


图 1.3.2

2. 极限与单侧极限的关系

定理 1.3.1 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极

限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在并且相等,即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

推论 1.3.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

注 这是证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的一个重要方法.

1.3.3 函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 处的单侧极限和极限(表 1.3.1)

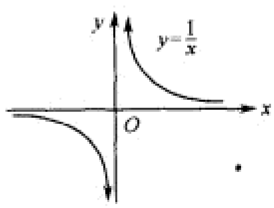
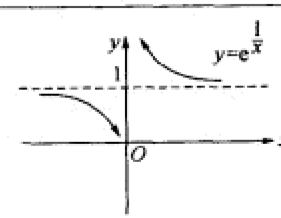
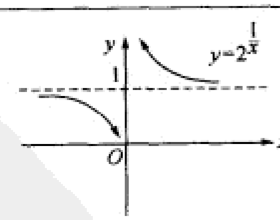
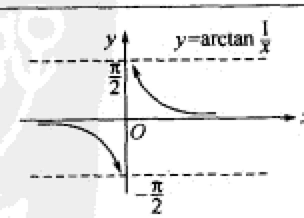


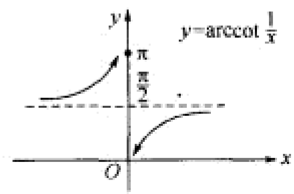
图 1.3.3

两个基本极限:$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$,$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$(图 1.3.3).

表 1.3.1

函数	单侧极限	极限	函数图形
$y=e^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在	
$y=2^{\frac{1}{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ 不存在	
$y=\arctan\frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x}$ 不存在	

续表

函　数	单侧极限	极　限	函数图形
$y=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}=\pi$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$不存在	

注　以上结果可以进一步推广. 例如, 由 $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to a^-}e^{\frac{1}{x-a}}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+}e^{\frac{1}{x-a}}=+\infty$等.

例 1.3.2 (2000 年 1)　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, 所以

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}=\frac{2+0}{1+0}-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+1=\frac{0+0}{0+1}+1=1,$$

因此, 原式 = 1.

1.3.4　函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的直观定义

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 是指: 当自变量 x 的绝对值无限增大($x\to\infty$)时, 相应的函数值 $f(x)$无限地趋于数 $A(f(x)\to A)$, 即 $|x|\to+\infty\Rightarrow|f(x)-A|\to 0$.

例如, 当 $x\to\infty$时, $\dfrac{1}{x}\to 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的严格定义(ε-X 定义)

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 是指: 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总存在 $X>0$, 使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时, 就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:|x|>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$.

3. 单向极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的定义

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:x<-X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:x>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$.

点评 $x\to\infty$ 表示 x 的绝对值无限增大(x 可正可负),$x\to+\infty$ 表示 x 是正数且其绝对值无限增大,$x\to-\infty$ 表示 x 是负数且其绝对值无限增大.

4. 极限与单向极限的关系

定理 1.3.2 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是单向极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在并且相等,即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

推论 1.3.2 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

注 这是证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在的一个重要方法.

5. 用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的方法(ε-X 法)

对任意给定的 $\varepsilon>0$,从不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发,去分析一个不等式 $|x|>\varphi(\varepsilon)$(一个与 ε 有关的很大的正数),然后取 $X=\varphi(\varepsilon)$.

最后给出证明:$\forall\varepsilon>0,\exists X=\varphi(\varepsilon)$,当 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

注 如果要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,只需将 $|x|>X$ 改为 $x>X$;如果要证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,只需将 $|x|>X$ 改为 $x<-X$.

例 1.3.3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

证 $\forall\varepsilon>0$,要 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,只要 $2|x|^3>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 或 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$.于是取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时,就有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

例 1.3.4(1993 年 2) 设 $f(x)=x(\sqrt{x^2+100}+x)$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

解 $f(x)=x(\sqrt{x^2+100}+x)=\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\dfrac{100x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-x}$,

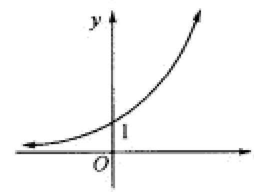
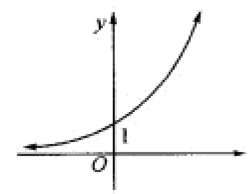
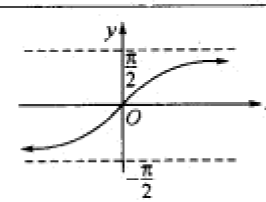
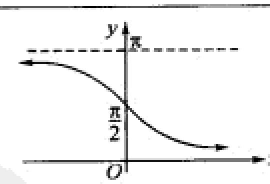
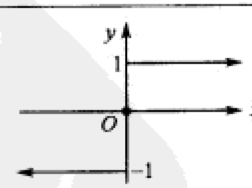
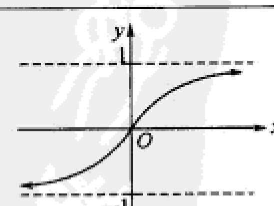
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{100x}{x\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{-x\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1}=-50,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

1.3.5 一些单向极限存在但极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在的函数(表 1.3.2)

表 1.3.2

函　数	单向极限	极　限	函数图形
$y=e^x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在	
$y=2^x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在	
$y=\arctan x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在	
$y=\mathrm{arccot}\,x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arccot}\,x=\pi$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arccot}\,x=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arccot}\,x$ 不存在	
$y=\mathrm{sgn}\,x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{sgn}\,x=-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sgn}\,x=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{sgn}\,x$ 不存在	
$y=\mathrm{th}\,x$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{th}\,x=-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}\,x=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{th}\,x$ 不存在	

1.3.6　函数极限的6种定义

为便于使用和比较,现将6种函数极限的定义列于表1.3.3中.

表1.3.3

极　限	对任意给定的	都存在	当……时	就　有
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$			$x_0-\delta<x<x_0$	
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$			$x_0<x<x_0+\delta$	
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$		$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$			$x<-X$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$			$x>X$	

点评　自变量的变化过程 $x\to x_0(x\to x_0^-, x\to x_0^+)$分别用 $0<|x-x_0|<\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0, x_0<x<x_0+\delta)$刻画,$x\to\infty(x\to-\infty, x\to+\infty)$分别用 $|x|>X(x<-X, x>X)$刻画;函数的变化趋势 $f(x)\to A$ 则用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 刻画.

1.3.7　函数极限的性质

由极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的几何解释(见1.3.1节)可以得出函数极限的若干性质(表1.3.4).

表1.3.4

函数极限的性质	说　明
唯一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限是唯一的	极限存在必唯一
局部有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域内是有界的	有极限的函数在 x_0 附近一定有界(局部有界)
局部保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或 $A<0$),则在 x_0 的某个去心邻域内函数 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)	以正数(负数)为极限的函数在 x_0 附近一定是正函数(负函数)

续表

函数极限的性质	说　明
若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$,则在 x_0 的某个去心邻域内函数 $f(x)>\dfrac{A}{2}$	取$\dfrac{A}{2}$是为了便于叙述,实际上在 x_0 的某个去心邻域内函数 $f(x)>kA(0<k<1)$
不等式性 若在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant 0$(或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant 0$)	非负函数的极限一定是非负的

注 对于极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$也有相应的性质.

1.3.8 函数极限与数列极限的关系(表 1.3.5)

表 1.3.5

函数极限与数列极限的关系	说　明
海涅定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是对任何收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$	任意方式都收敛,特殊方式也收敛
推论 1 若存在收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$	特殊方式不收敛,任意方式也不收敛
推论 2 若存在收敛于 x_0 的两个数列$\{x_n\}$和$\{x'_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在	两种特殊方式有不同极限,则极限不存在
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	将数列极限转化为函数极限的公式(常用方法)

例 1.3.5 (经典例子) 证明$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

证 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$. 取 $x'_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x'_n}$,由海涅定理的推论 2,极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

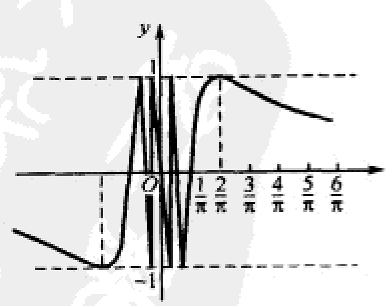


图 1.3.4

(图 1.3.4).

注　用类似的方法可以证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

● 1.4　无穷小与无穷大

1.4.1　无穷小

定义 1.4.1　无穷小就是在自变量的某个变化过程中以零为极限的函数或变量.若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则 $f(x)$ 就是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

例如, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$, 所以函数 $(x-1)^2$ 为当 $x\to 1$ 时的无穷小.

无穷小是以零为极限的特殊函数.以下定理表明任何有极限的函数都与一个无穷小相联系.

定理 1.4.1 (收敛函数与无穷小的关系)

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha,$$

其中 α 是无穷小: $\lim\alpha=0$.

命题 1.4.1　$\lim f(x)=A \Leftrightarrow \lim[f(x)-A]=0$(即 $f(x)-A$ 是无穷小).

1.4.2　无穷小的运算性质(表 1.4.1)

表 1.4.1

性　质	说　明
两个无穷小的和(差)仍是无穷小 $\lim\alpha=0$ 且 $\lim\beta=0 \Rightarrow \lim(\alpha\pm\beta)=0$	直观记忆: $0+0=0$
推论 1　有限个无穷小的和(差)仍是无穷小	但无限个无穷小的和不一定是无穷小 **经典反例**　n 个无穷小 $\frac{1}{n}(n\to\infty)$ 的和为 1, 不是无穷小
有界函数与无穷小的乘积是无穷小 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 且 $\lim\alpha=0 \Rightarrow \lim f(x)\alpha=0$	直观记忆: $M\cdot 0=0$ 这是一个很有用的性质, 常用于极限的计算
推论 2　常数与无穷小的乘积是无穷小 $\lim\alpha=0 \Rightarrow \lim c\alpha=0$	直观记忆: $c\cdot 0=0$
两个无穷小的乘积仍是无穷小 $\lim\alpha=0$ 且 $\lim\beta=0 \Rightarrow \lim\alpha\beta=0$	直观记忆: $0\cdot 0=0$
推论 3　有限个无穷小的乘积仍是无穷小	但无限个无穷小的乘积不一定是无穷小(反例比较复杂, 从略)

注　两个无穷小的商是 $\frac{0}{0}$ 型未定式 $\lim\frac{\alpha}{\beta}$, 它不一定是无穷小.

例 1.4.1 (1998 年 2)　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$, 则下列断言正确的是(　　).

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散; (B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界;

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小; (D) 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

解 (A) 不一定正确.取 $x_n=n, y_n=0$.(B) 不一定正确.取$\{x_n\}$为 $1,0,2,0,3,\cdots,0,n,\cdots$,取$\{y_n\}$为 $0,1,0,2,0,3,\cdots,0,n,\cdots$,则 x_n 和 y_n 都无界.(C) 不一定正确.取 $x_n=0, y_n=n$.(D) 正确.因为若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n\cdot\frac{1}{x_n}=0\cdot 0=0$,即 y_n 为无穷小.故选(D).

1.4.3 无穷大

1. *无穷大的直观定义*

无穷大就是在自变量的某个变化过程中绝对值无限增大的函数或变量.若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$是无穷大(其绝对值$|f(x)|$无限增大),则记$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

例如,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$.

2. *无穷大的严格定义*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是指:对于任意给定的 $M>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow(\forall M>0, \exists\delta>0, \forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M)$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$是指:对于任意给定的 $M>0$,总存在 $X>0$,使得当 x 满足不等式$|x|>X$ 时,就有$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow(\forall M>0, \exists X>0, \forall x:|x|>X\Rightarrow|f(x)|>M)$.

注 将$|f(x)|>M$ 分别换成$f(x)>M$ 和$f(x)<-M$,便得到正无穷大$\lim f(x)=+\infty$和负无穷大$\lim f(x)=-\infty$的定义.

3. *用定义证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$的方法($M$-$\delta$ 法)*

对于任意给定的 $M>0$,从不等式$|f(x)|>M$ 出发,去分析出一个不等式$|x-x_0|<\varphi(M)$(一个与 M 有关的很小的正数),然后取 $\delta=\varphi(M)$.

最后给出证明:$\forall M>0$, $\exists\delta=\varphi(M)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有$|f(x)|>M$.所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

例 1.4.2 证明$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$.

证 $\forall M>0$,要$\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right|=\frac{1}{(x-1)^2}>M$,只要$(x-1)^2<\frac{1}{M}$或$|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$.于是取

$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{M}}$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,就有 $\left|\dfrac{1}{(x-1)^2}\right|>M$. 所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$.

1.4.4　无穷大定义一览表

为便于使用和比较,现将无穷大的 18 种定义列于表 1.4.2 中.

表 1.4.2

无穷大	对任意给定的	都存在	当……时	就　有
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$M>0$	$\delta>0$	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|>M$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$				$f(x)<-M$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$				$f(x)>M$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$			$x_0-\delta<x<x_0$	$\|f(x)\|>M$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$				$f(x)<-M$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$				$f(x)>M$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$			$x_0<x<x_0+\delta$	$\|f(x)\|>M$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$				$f(x)<-M$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$				$f(x)>M$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$		$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)\|>M$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$				$f(x)<-M$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$				$f(x)>M$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$			$x<-X$	$\|f(x)\|>M$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$				$f(x)<-M$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$				$f(x)>M$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$			$x>X$	$\|f(x)\|>M$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$				$f(x)<-M$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$				$f(x)>M$

点评　自变量的变化过程 $x\to x_0(x\to x_0^-, x\to x_0^+)$分别用 $0<|x-x_0|<\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0, x_0<x<x_0+\delta)$刻画,$x\to\infty(x\to-\infty, x\to+\infty)$分别用 $|x|>X(x<-X, x>X)$刻画;函数的变化趋势 $f(x)\to\infty(f(x)\to-\infty, f(x)\to+\infty)$分别用 $|f(x)|>M(f(x)<-M, f(x)>M)$刻画.

1.4.5 无穷大的运算性质(表 1.4.3)

表 1.4.3

性质	说明
两个无穷大的乘积仍是无穷大 $\lim u=\infty$ 且 $\lim v=\infty \Rightarrow \lim uv=\infty$	直观记忆:$\infty\cdot\infty=\infty$
无穷大与有界函数的和是无穷大 $\lim u=\infty$ 且 $\vert f(x)\vert\leqslant M \Rightarrow \lim[u+f(x)]=\infty$	直观记忆:$\infty+M=\infty$
注 两个无穷大的和不一定是无穷大	$\infty+\infty\not\Rightarrow\infty$ **经典反例** $n\to\infty$ 时,n 与 $-n$ 都是无穷大,但 $n+(-n)=0$ 不是无穷大
两个正无穷大(或负无穷大)的和仍是正无穷大(或负无穷大)	直观记忆:$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
无穷大与一个具有非零极限的函数之积是无穷大 $\lim u=\infty$ 且 $\lim f(x)=c\neq0 \Rightarrow \lim uf(x)=\infty$	直观记忆:$\infty\cdot c=\infty(c\neq0)$

例 1.4.3 (2003 年 1) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立;　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在;　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

解 由于极限值与数列前有限项的数值无关,故(A)和(B)都没有根据(正确的说法是:不等式从某一项起成立).(C)中的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型极限,它可能存在.例如,取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, $c_n=n$.(D) 由于 $\{c_n\}$ 是无穷大,而 $\{b_n\}$ 收敛于非零极限,故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$,极限不存在.选(D).

1.4.6 无穷大与无穷小的倒数关系(表 1.4.4)

表 1.4.4

无穷大与无穷小的倒数关系	说明
无穷大的倒数是无穷小 $\lim f(x)=\infty\Rightarrow\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$	直观记忆:$\dfrac{1}{\infty}=0$
无穷小的倒数是无穷大 $\lim\alpha=0(\alpha\neq0)\Rightarrow\lim\dfrac{1}{\alpha}=\infty$	直观记忆:$\dfrac{1}{0}=\infty$

由无穷大与无穷小的关系,可得分式极限的以下三种情况:

(1) 若$\lim f(x)=0$但$\lim g(x)\neq 0$,则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

(2) 若$\lim f(x)\neq 0$但$\lim g(x)=0$,则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

(3) 若$\lim f(x)=0$且$\lim g(x)=0$,则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{0}{0}$型未定式,应作进一步讨论.

以下结论在极限的反问题中常用.

若$\lim g(x)=0$且$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在,则必有$\lim f(x)=0$.

例 1.4.4　设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+bx+c}{x^2-1}=2$,求 b,c.

解　这是极限的反问题.因为分母的极限$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$,而分式的极限存在,故分子的极限也必须为 0(否则分式的极限为∞).由$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+bx+c)=3+b+c=0$,得 $c=-3-b$.所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+bx+c}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+bx-3-b}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1)+b(x-1)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)+b}{x+1}=\frac{6+b}{2}=2,\end{aligned}$$

得 $b=-2,c=-1$.

1.4.7　无穷大与无界函数的关系

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则 $f(x)$在 x_0 的任何去心邻域内是无界函数.同理,若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$,则 $f(x)$在任何集合$\{x\mid |x|>X\}$内是无界函数(记忆口诀:无穷大必无界).

若 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内无界,则不能断定$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(记忆口诀:无界不一定无穷大).

无穷大与无界函数的区别:对于任意给定的 $M>0$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$要求 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域的所有点 x 都满足不等式$|f(x)|\geqslant M$,而 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内无界只要求有个别点 x 满足不等式$|f(x)|\geqslant M$,而对其他点 x 则可能有$|f(x)|<M$.

以下是几个无界但非无穷大的经典例子.

$y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界,但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\neq\infty$(图 1.4.1(a)).

同理,$y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界,但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}\neq\infty$.

$y=x\sin x$ 在$(0,+\infty)$内无界,但$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x\neq\infty$(图 1.4.1(b)).

同理，$y=x\cos x$ 在$(0,+\infty)$内无界，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cos x\neq\infty$.

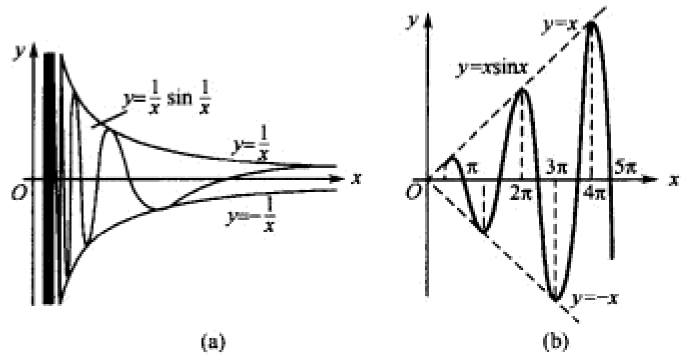


图 1.4.1

证明函数不是无穷大的方法：欲证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$，只需找出一个收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}$，使得$\{f(x_n)\}$是收敛数列或有界数列. 同理，欲证 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq\infty$，只需找出一个趋于$\infty$的数列$\{x_n\}$，使得$\{f(x_n)\}$是收敛数列或有界数列.

证明函数无界的方法：欲证函数 $f(x)$ 在集合 X 上无界，只需找出一个数列$\{x_n\}\subset X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

例 1.4.5 (1993 年 2) 当 $x\to 0$ 时，变量 $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小；

(B) 无穷大；

(C) 无界的，但不是无穷大；

(D) 有界的，但不是无穷小.

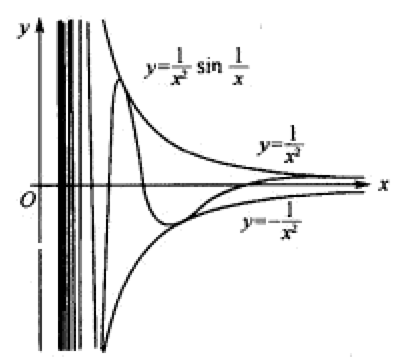


图 1.4.2

解 $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，使得 $f(x_n)=\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>n$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$. 所以，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界的.

另一方面，取 $x_n'=\frac{1}{2n\pi}$，有 $f(x_n')=\frac{1}{x_n'^2}\sin\frac{1}{x_n'}=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$，而$\{f(x_n')\}$有界. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\neq\infty$(图 1.4.2). 选(C).

1.5　极限的运算法则

1.5.1　极限的四则运算法则

设极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 存在，则极限 $\lim[f(x)\pm g(x)]$，$\lim[cf(x)]$，$\lim[f(x)\cdot g(x)]$，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$($\lim g(x)\neq 0$)也存在，且有下列运算法则(表 1.5.1)．

表 1.5.1

运算法则	说　明	
$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$	和(差)的极限等于极限的和(差)	函数极限的线性性质
$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$	倍数的极限等于极限的倍数	
$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$	积的极限等于极限的积	
$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$	商的极限等于极限的商	
$\lim\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$	倒数的极限等于极限的倒数	
$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$($n$ 是正整数)	幂的极限等于极限的幂	

1.5.2　一些基本极限

以下是一些最基本的极限(n 是正整数)：

$\lim c=c$(c 是常数)，$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}=\infty$．

1.5.3　多项式函数与有理函数的极限

1．多项式函数的极限

设有多项式函数 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)\qquad(\text{将 } x_0 \text{ 代入多项式即可})．$$

例如，$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4x-6)=3\cdot 2^2+4\cdot 2-6=14$．

2. 有理函数的极限

设有理函数(多项式与多项式之商)

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}.$$

(1)极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

① 若 $Q(x_0)\neq 0$,则由极限的商的运算法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\qquad(\text{将 } x_0 \text{ 代入即可}).$$

② 若 $Q(x_0)=0$ 且 $P(x_0)=0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}\ \text{为}\frac{0}{0}\ \text{型极限},$$

这是常见的类型.通常的解法是设法约去分子、分母中趋于零的因子或用洛必达法则处理.

③ 若 $Q(x_0)=0$ 但 $P(x_0)\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty.$$

例 1.5.1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{x^3-1}=\infty$,这是 $\infty-\infty$ 型极限.这类极限可以通过通分化为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.\end{aligned}$$

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限.对这类极限有下列重要公式:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

由这个公式可知,这类极限的结果只取决于分子和分母中的最高次幂 a_0x^m 和 b_0x^n(它们分别是分子和分母中的最高阶无穷大),其他低次幂的项对结果没有任何影响.因此,我们可以略去低次幂的各项,而保留分子和分母中的最高次幂来计算极限,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

这种方法称为"保留最大项法"或"抓大项法".

例如, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+4}{7x^3+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3}{7x^3}$(保留最大项)$=\dfrac{3}{7}$.

例 1.5.2(1990 年 2) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$, 求 a 和 b.

解 由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$$

知分子的次数小于分母的次数 1, 于是分子是零次多项式, 即 $1-a=0$, $a+b=0$, 得 $a=1$, $b=-1$.

● 1.6 函数极限存在准则 两个重要极限

1.6.1 函数极限存在的两个准则

1. 夹逼准则

夹逼准则 若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\ (0<|x-x_0|<\delta)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(图 1.6.1).

常用特例: 若 $|f(x)|\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

注 对极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 也有相应的结论.

夹逼准则的用法: 当极限 $\lim f(x)$ 很难计算时, 可将 $f(x)$ 适当缩放成 $g(x)$ 和 $h(x)$ $(g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x))$, 使得 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$, 则 $\lim f(x)=A$.

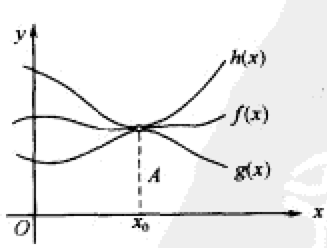


图 1.6.1

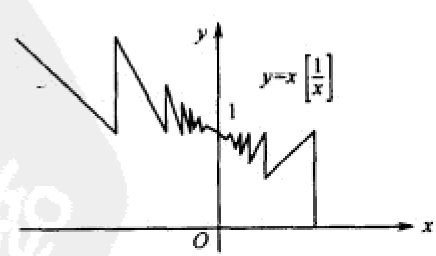


图 1.6.2

例 1.6.1 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, 其中 $[\cdot]$ 是取整函数.

解 因为 $\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$. 当 $x>0$ 时, $x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant x\cdot\dfrac{1}{x}$, 即 $1-x<$

$x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，所以由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. 当 $x<0$ 时，$x\left(\frac{1}{x}-1\right)>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant x\cdot\frac{1}{x}$，即 $1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant 1$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$，所以由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$（图 1.6.2）.

例 1.6.2（2000 年 3） 设对任意的 x，总有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（ ）.

(A) 存在且一定等于零； (B) 存在但不一定为零；

(C) 不一定存在； (D) 一定不存在.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$ 只能说明 $g(x)$ 与 $h(x)$ 无限接近，但不能说明它们有极限，故夹逼准则的条件不满足. 因此极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在. 选(C).

例如，设 $h(x)=x$，$f(x)=x+\frac{1}{x^2}$，$g(x)=x+\frac{2}{x^2}$，则它们满足题设条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\infty$（极限不存在）.

2. 单调有界准则

单调有界准则 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调有界，则极限 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 都存在（图 1.6.3(a)）.

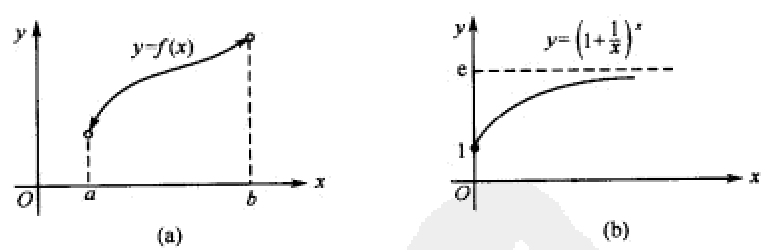


图 1.6.3

例如，$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加且有界，故极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 都存在（事实上，$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$）（图 1.6.3(b)）.

1.6.2 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数（图 1.6.4）. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型极限.

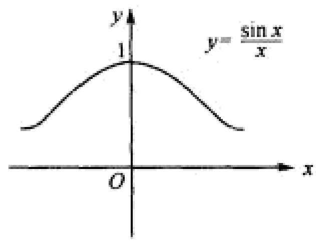


图 1.6.4

基本形式：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

一般形式：$\lim\limits_{[\ ]\to 0}\frac{\sin[\quad]}{[\quad]}=1$.

一般形式：$\lim\alpha=0\Rightarrow\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

特例：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

有关极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{x}{n}=x$.

注意 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，这不是重要极限.

点评 与重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$有关的极限都是$\frac{0}{0}$型的极限，因此它们都可以用无穷小等价代换或洛必达法则处理.

例 1.6.3 求$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=1\cdot x=x$.

另解 利用等价无穷小代换：$\sin\frac{x}{2^n}\sim\frac{x}{2^n}(n\to\infty)$. 所以原式$=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\frac{x}{2^n}=x$.

1.6.3 重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

函数$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$是幂指函数，其定义域为$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$，值域为$(1,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},+\infty)$. 函数在$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$内分别是单调增加的. 曲线$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$有水平渐近线$y=\mathrm{e}$和铅直渐近线$x=-1$(图 1.6.5).

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$是$1^\infty$型极限.

基本形式：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ ($\mathrm{e}=2.718281\cdots$).

等价形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

数列形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

一般形式：$\lim\limits_{[\ ]\to 0}(1+[\quad])^{\frac{1}{[\ ]}}=\mathrm{e}$.

一般形式：$\lim\alpha=0\Rightarrow\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

重要公式：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{lx}=\mathrm{e}^{kl}$.

等价形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{l}{x}}=\mathrm{e}^{kl}$.

常用形式：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}=\mathrm{e}^{a-b}$.

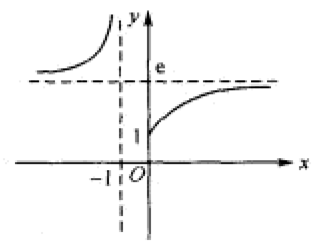


图 1.6.5

推广形式：$\lim\varphi(x)=\infty\Rightarrow\lim\left[\dfrac{\varphi(x)+a}{\varphi(x)+b}\right]^{\varphi(x)+c}=\mathrm{e}^{a-b}$.

有关极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+c}=\mathrm{e}$($c$ 是常数), $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x}=\mathrm{e}$.

例 1.6.4 (1996 年 1)　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$, 则 $a=$______.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{2a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2a}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$, 得 $3a=\ln 8$, $a=\ln 2$.

1.6.4　其他重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

● 1.7　无穷小的比较

1.7.1　无穷小比较的定义

设 α,β 无穷小：$\lim\alpha=0$, $\lim\beta=0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta=o(\alpha)$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小, 记作 $\beta=O(\alpha)$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\beta\sim\alpha$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^{k}}=c\neq 0\ (k>0)$, 则称 β 是 α 的 k 阶无穷小;

若$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k}=c\neq 0(k>0)$，则称 α 是x 的k 阶无穷小.

点评 并非每两个无穷小都可以比较. 例如, 当 $x\to 0$ 时, 无穷小 $x\sin\frac{1}{x}$ 与 x 就不能比较, 因为极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在. 又因为对任何 $k>0$, 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^k}\neq c(c\neq 0)$, 因此 $x\sin\frac{1}{x}$不是x 的任何阶无穷小.

当 $x\to 0^+$ 时, $\frac{1}{\ln x}$是比 x 的任何正幂 $x^k(k>0)$ 更低阶的无穷小(因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^k\ln x=0$), 而 $e^{-\frac{1}{x}}$是比 x 的任何正幂 $x^k(k>0)$ 更高阶的无穷小(因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^k e^{\frac{1}{x}}=+\infty$).

1.7.2 高阶无穷小的运算律

当 $x\to 0$ 时, $x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots$都是无穷小, 且阶数递增. 若 $n>m$, 则 $x^n=o(x^m)$. 例如, $x^2=o(x)$, $x^3=o(x)$, $x^3=o(x^2)$.

高阶无穷小有下列运算律($x\to 0$)(表 1.7.1).

表 1.7.1

高阶无穷小的运算律	说　明
$o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$	x^n 的两个高阶无穷小的和仍是x^n 的高阶无穷小
当 $m>n$ 时, $o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)$.	高阶 + 低阶 = 低阶
$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$	无穷小相乘, 阶数相加
$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$	
若 $f(x)$为有界函数, 则 $f(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$	高阶无穷小乘以有界函数, 仍为高阶无穷小

注意 不能认为$o(x^n)-o(x^n)=0$ 和$\frac{o(x^m)}{o(x^n)}=o(x^{m-n})$, 也不能由 $\alpha(x)=o(x^n)$, $\beta(x)=o(x^n)$, 得出 $\alpha(x)=\beta(x)$.

例 1.7.1 利用泰勒公式求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

解 由泰勒公式(见 3.1.8 节), $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)$, $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$, $\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 得

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]$$

$$=-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\quad(\text{其中 } o(x^5)+o(x^4)=o(x^4)),$$

$$x^2[x+\ln(1-x)]=x^2\left[-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]=-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\quad(\text{其中 } x^2\cdot o(x^2)=o(x^4)),$$

所以，原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)}{-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^4}{12}}{-\dfrac{x^4}{2}}=\dfrac{1}{6}$.

1.7.3 无穷小的阶的运算律

设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是 $x-x_0$ 的 m 阶无穷小，$\beta(x)$是 $x-x_0$ 的 n 阶无穷小，则有下列运算律(表 1.7.2).

表 1.7.2

无穷小阶的运算律	说　明
当 $m=n$ 时，$\alpha(x)\pm\beta(x)$的阶数不低于 n	同阶无穷小相加，阶数不降低
当 $m>n$ 时，$\alpha(x)\pm\beta(x)$为 n 阶无穷小	高阶 + 低阶 ~ 低阶
$\alpha(x)\beta(x)$为 $m+n$ 阶无穷小	无穷小相乘，阶数相加
当 $m>n$ 时，$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$为 $m-n$ 阶无穷小	无穷小相除，阶数相减

注　对 $x\to\infty$，也有类似的结论.

无穷小的复合：若 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$是 $x-x_0$ 的 m 阶无穷小；当 $u\to0$ 时，$\beta(u)$是 u 的 n 阶无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，$\beta[\alpha(x)]$是 $x-x_0$ 的 mn 阶无穷小(记忆：无穷小复合，阶数相乘).

1.7.4 等价无穷小的性质(表 1.7.3)

表 1.7.3

性　质	说　明
若 $\beta\sim\alpha$，则 $\beta-\alpha=o(\alpha)$	两个等价无穷小的差一定是一个更高阶的无穷小
若 $\beta-\alpha=o(\alpha)$，则 $\beta\sim\alpha$ (或 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则 $\beta\sim\alpha$)	若两个无穷小的差是一个更高阶的无穷小，则它们一定等价
$\alpha+o(\alpha)\sim\alpha$	低阶无穷小 + 高阶无穷小等价于低阶无穷小(记忆：低阶 + 高阶 ~ 低阶). 这是一个常用的性质，它说明在极限的加减运算中，高阶无穷小可以略去
自反性　$\alpha\sim\alpha$ **对称性**　$\alpha\sim\beta\Rightarrow\beta\sim\alpha$ **传递性**　$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$	等价无穷小的三个性质 **注**　无穷小的同阶关系也具有这三个性质

注 两个同阶但非等价的无穷小之差是与这两个无穷小同阶的无穷小. 事实上, 设 α 与 β 是同阶但非等价的无穷小, 即 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c(c \neq 0, 1)$, 则

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = c - 1 \neq 0,$$

故 $\alpha - \beta$ 与 β 同阶.

1.7.5 常见的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时, 我们有下列常见的等价无穷小:

$$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, \ln(1 + x) \sim x, \log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a},$$

$$(1 + x)^\mu - 1 \sim \mu x, \sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{n}, \sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}.$$

点评 以上公式中的 x 可以换成任何一个无穷小 $\alpha(x)$. 例如, $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}(x \to \infty)$, $e^{(x-1)^2} - 1 \sim (x - 1)^2 (x \to 1)$.

另外两个常用的等价无穷小: (1) $\ln x \sim x - 1 (x \to 1)$; (2) $x^x - 1 \sim x \ln x (x \to 1)$.

证 (1) $\ln x = \ln[1 + (x - 1)] \sim x - 1 (x \to 1)$; (2) $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x$.

1.7.6 更高阶的等价无穷小

利用泰勒公式可以得出下列更高阶的等价无穷小(见 3.1.8 节), 它们都是两个等价无穷小的差的形式(两个等价无穷小的差等价于更高阶的无穷小).

当 $x \to 0$ 时, 我们有下列等价无穷小:

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6},\ \tan x - x \sim \frac{x^3}{3},\ \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2},$$

$$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6},\ x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3},\ x - \ln(1 + x) \sim \frac{x^2}{2}.$$

点评 前 5 个都是两个等价无穷小奇函数之差, 它们都是 x 的三阶无穷小. 记住这些等价无穷小会给极限计算带来一些方便.

例 1.7.2 (1992 年 2) 当 $x \to 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的( ).

(A) 低阶无穷小; (B) 高阶无穷小;

(C) 等价无穷小; (D) 同阶但非等价无穷小.

解 因为 $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} (x \to 0)$, 故 $x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小, 从而是 x^2 的高阶无穷小. 选(B).

例 1.7.3 (1991 年 1) 已知当 $x \to 0$ 时, $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数

$a=$______.

解 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{ax^2}{3}$，$\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$. 所以 $\frac{ax^2}{3}\sim-\frac{x^2}{2}$，得 $a=-\frac{3}{2}$.

例 1.7.4 (1992 年 3) 当 $x\to 0$ 时，下列 4 个无穷小量中，哪一个是比其他 3 个更高阶的无穷小量？

(A) x^2； (B) $1-\cos x$； (C) $\sqrt{1-x^2}-1$； (D) $x-\tan x$.

解 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{x^2}{2}$，它们都是 x 的二阶无穷小，而 $x-\tan x\sim-\frac{x^3}{3}$ 是 x 的三阶无穷小. 选(D).

1.7.7 等价无穷小代换定理

定理 1.7.1 极限式子中的无穷小乘积因子可以用等价无穷小代换.

具体地说，

(1) 设 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$ 且 $\beta\sim\alpha$，则

$$\lim f(x)\alpha=\lim f(x)\beta.$$

(2) 设 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，则

$$\lim\frac{f(x)\alpha}{g(x)\beta}=\lim\frac{f(x)\alpha_1}{g(x)\beta_1}.$$

点评 等价无穷小代换一般不能在加减运算中进行. 但在某些条件下可以在加减项之间进行等价无穷小代换(见 1.7.8 节).

例 1.7.5 (1994 年 1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{x-\sin x}{x\sin x}$. 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$，所以，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^3}{6}}{x^2}=\frac{1}{6}$.

1.7.8 在加减项之间进行等价无穷小代换

等价无穷小代换一般只能在乘积因子之间进行，但在某些条件下，等价无穷小代换也可以在加减项之间进行.

命题 1.7.1 设 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=c\,(c\neq 0,1)$(即 α 与 β 是同阶但非等价的无穷小)，则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$.

证 因为 $\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}=1$，$\lim\frac{\beta}{\beta_1}=1$，所以

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha_1-\beta_1}=\lim\frac{\frac{\alpha}{\beta}-1}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}-1}\cdot\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{c-1}{c-1}\cdot 1=1,$$

故 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$.

此命题说明，两个同阶但非等价的无穷小之差的每一项都可以用与之等价的无穷小代换.

例如，当 $x\to0$ 时，$\tan3x-\sin x\sim3x-x=2x$.

注　两个等价无穷小之差的各项不能进行上述等价无穷小代换. 例如，$\tan x-\sin x$ 不等价于 $x-x=0$. 这是因为两个等价无穷小之差是一个更高阶的无穷小(甚至为零)，而两个同阶但非等价的无穷小之差仍是与这两个无穷同阶的无穷小(见1.7.4节).

命题1.7.2　设 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且 α 和 β 同号(即 $\alpha\beta\geqslant0$)(称为同号无穷小)，则 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$.

此命题说明，两个同号无穷小之和的每一项都可以用与之等价的无穷小代换.

例如，当 $x\to0$ 时，$\tan3x+\sin x\sim3x+x=4x$.

例1.7.6　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}-1-\sin^2x}{\sin^22x}$.

解　因为 $x\to0$ 时，$e^{-x^2}-1\sim-x^2$，$\sin^2x\sim x^2$ 且 $-x^2$ 与 x^2 同阶但不等价，故 $e^{-x^2}-1-\sin^2x\sim-x^2-x^2=-2x^2$. 又 $\sin^22x\sim(2x)^2=4x^2$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-1-\sin^2x}{\sin^22x}=\lim_{x\to0}\frac{-2x^2}{4x^2}=-\frac{1}{2}.$$

1.7.9　几个有用的等价无穷小代换

(1) 设 α,β 是无穷小，则 $e^\alpha-e^\beta\sim\alpha-\beta$.

证　$e^\alpha-e^\beta=e^\beta(e^{\alpha-\beta}-1)\sim e^{\alpha-\beta}-1\sim\alpha-\beta$.

(2) 设 α,β 是无穷小，则 $(1+\alpha)^\beta-1\sim\alpha\beta$.

证　$(1+\alpha)^\beta-1=e^{\beta\ln(1+\alpha)}-1\sim\beta\ln(1+\alpha)\sim\alpha\beta$.

(3) 设 $\lim u=1$，则 $\ln u\sim u-1$.

证　$\ln u=\ln[1+(u-1)]\sim u-1(u\to1)$.

例1.7.7(1997年2)　设 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　).

(A) 1;　　(B) 2;　　(C) 3;　　(D) 4.

解　当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^x\sim\tan x-x\sim\dfrac{x^3}{3}$. 所以 $n=3$. 选(C).

例1.7.8　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3+\sin x)^x-3^x}{1-\cos x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}3^x\cdot\dfrac{\left(1+\dfrac{\sin x}{3}\right)^x-1}{1-\cos x}$. 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\left(1+\dfrac{\sin x}{3}\right)^x-1\sim\dfrac{\sin x}{3}\cdot x\sim\dfrac{x^2}{3}$. 所以，原式 $=\lim\limits_{x\to0}3^x\cdot\dfrac{\dfrac{x^2}{3}}{\dfrac{x^2}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

1.7.10 无穷大的比较

设 $f(x)$和 $g(x)$是无穷大：$\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$.

若$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\left(\text{或}\lim\dfrac{g(x)}{f(x)}=0\right)$，则称 $f(x)$是比 $g(x)$高阶的无穷大；

若$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则称 $f(x)$与 $g(x)$是同阶无穷大；

若$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷大；

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^k}=c\neq 0(k>0)$，则称 $f(x)$是 x 的k 阶无穷大.

点评 由于无穷小的倒数是无穷大，因此由无穷小的比较可得上述无穷大的比较. 例如，若 α 与β 是等价无穷小，则$\dfrac{1}{\alpha}$与$\dfrac{1}{\beta}$是等价无穷大.

当 $x\to+\infty$时，指数函数 $e^{\lambda x}(\lambda>0)$是比任何正幂函数 $x^k(k>0)$更高阶的无穷大，而任何正幂函数 x^k 又是比对数函数 $\ln^\mu x(\mu>0)$更高阶的无穷大.

当 $x\to+\infty$时，以下无穷大趋于无穷的速度由慢到快(或其阶数由低变高)：

$$\ln^\mu x,\quad x^k,\quad a^{\lambda x},\quad x^x,$$

其中 $\mu,k,\lambda>0$, $a>1$.

当 $x\to+\infty$时，x，e^x，e^{e^x}都是无穷大，且它们增加的速度依次递增.

当 $x\to+\infty$时，x，$\ln x$，$\ln(\ln x)$都是无穷大，但它们增加的速度依次递减. 例如，$x=10^{100}$时，$\ln x\approx 230$，$\ln(\ln x)\approx 5.4$.

在$\dfrac{\infty}{\infty}$型的分式的极限中，我们可以略去分子、分母中的低阶无穷大，而保留最高阶无穷大. 例如：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^{\frac{n}{2}}+1]^{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot x^2\cdots x^n}{[(nx)^{\frac{n}{2}}]^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

● 1.8 函数的连续性与间断点

1.8.1 函数的连续性

1. 连续的定义

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续是指(图 1.8.1(a))

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0.$$

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的等价定义是(图 1.8.1(b))

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0).$$

$f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$.

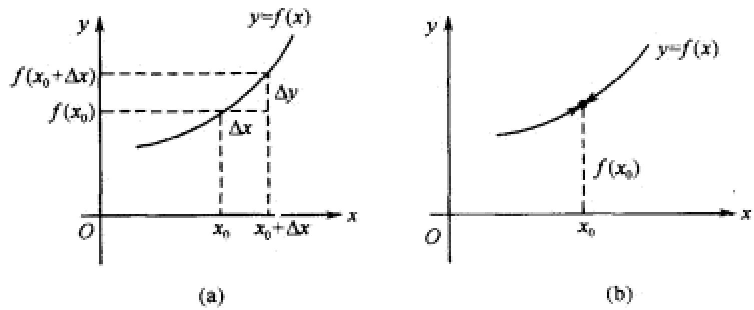


图 1.8.1

2. 单侧连续

$f(x)$在 x_0 处左连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$或 $f(x_0-0)=f(x_0)$;

$f(x)$在 x_0 处右连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$或 $f(x_0+0)=f(x_0)$.

连续与单侧连续的关系:$f(x)$在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 处既左连续,又右连续.

3. 函数在一点连续的三个条件

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的三个条件是:① $f(x)$在点 x_0 处有定义;②极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在;③等式 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$成立.

4. 函数在一点间断的三种可能

函数 $f(x)$在点 x_0 处间断的三种可能:

(1) $f(x)$在 x_0 处无定义(但在 x_0 的某个去心邻域内有定义);

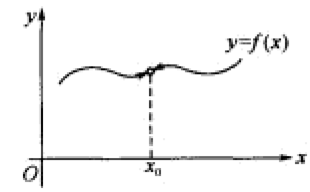
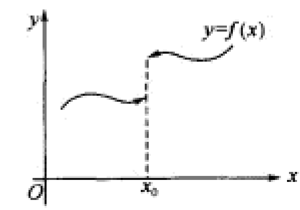
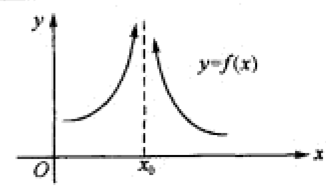
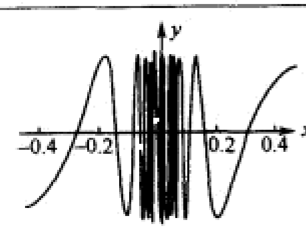
(2) 虽然 $f(x_0)$有定义,但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(3) 虽然 $f(x_0)$有定义,且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

1.8.2 间断点的分类

设 x_0 是函数 $f(x)$的间断点(表 1.8.1).

表 1.8.1

两大类	大类的特征	小类	小类的特征	图示
第一类间断点	左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 都存在	可去间断点	$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在	
		跳跃间断点	$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$	
第二类间断点	左极限 $f(x_0-0)$ 和右极限 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在	无穷间断点	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$	
		振荡间断点	例如，$\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处	
		其他间断点	例如，狄利克雷函数的间断点	

如何去掉可去间断点？如果 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点，定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & x=x_0, \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

1.8.3 连续函数的运算

1. 连续函数的四则运算

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x 处连续，则

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$$

也在 x 处连续(连续函数的和、差、积、商也是连续函数).

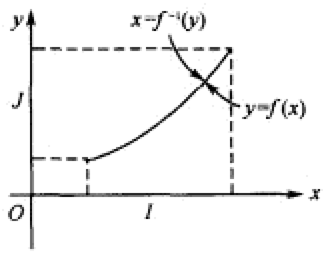


图 1.8.2

2. 反函数的连续性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调且连续，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间 $J=f(I)$ 上也单调且连续(连续函数的反函数也是连续函数)(图 1.8.2).

3. 复合函数的连续性

设 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 都是连续函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也是连续函数(连续函数的复合函数也是连续函数).

4. 连续函数与极限的交换性

设极限 $\lim\varphi(x)=u_0$ 且 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，则

$$\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]=f(u_0).$$

这说明极限运算与连续函数运算可以交换，即极限可以穿过连续函数，取到内函数上.

常见的题型有：

$$\lim[\varphi(x)]^k=[\lim\varphi(x)]^k, \quad \lim\sqrt[n]{\varphi(x)}=\sqrt[n]{\lim\varphi(x)},$$
$$\lim e^{\varphi(x)}=e^{\lim\varphi(x)}, \quad \lim\ln\varphi(x)=\ln[\lim\varphi(x)].$$

5. 连续函数的其他运算性质(表 1.8.2)

表 1.8.2

性　质	说　明
若 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 不连续，则 $f(x)+g(x)$ 一定不连续	连续 + 间断 = 间断
若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不连续，则 $f(x)+g(x)$ 可能连续	间断 + 间断 $\not\Rightarrow$ 间断
若 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 至少有一个不连续，则 $f[\varphi(x)]$ 也可能连续	
若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 至少有一个不连续，则 $f(x)g(x)$ 和 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也可能连续	
若 $f(x)$ 在 x_0 处连续且 $f(x_0)\neq 0$，$g(x)$ 在 x_0 处间断，则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处必间断	不连续的函数与非零的连续函数之积一定是不连续的函数 **证**　用反证法

例 1.8.1 (1998 年 3,4) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$的间断点，其结论为(　　).

(A) 不存在间断点；　(B) 存在间断点 $x=1$；

(C) 存在间断点 $x=0$；　(D) 存在间断点 $x=-1$.

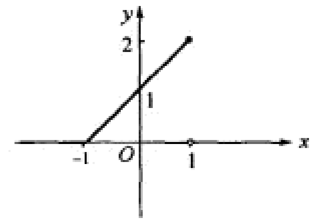


图 1.8.3

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \infty, & |x|>1,\end{cases}$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}\quad 或\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1 或 x>1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

易见 $x=1$ 是 $f(x)$的间断点(图 1.8.3). 选(B).

例 1.8.2 (1995 年 2) 设 $f(x)$和 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)$为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$有间断点，则(　　).

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点；　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点；　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.

解 (A) 不一定成立. 例如，取 $f(x)\equiv 1$，则 $\varphi[f(x)]\equiv\varphi(1)$为常值函数，无间断点. (B)不一定成立. 例如，设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $\varphi(x)$有间断点 $x=0$，但$[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 无间断点. (C)不一定成立. 例如，取 $f(x)\equiv 1$，则 $f[\varphi(x)]\equiv 1$ 无间断点. (D)成立. 因为如果$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$没有间断点，则它是连续函数，于是 $\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$也是连续函数，矛盾. 选(D).

例 1.8.3 (2002 年 3,4) 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right]^n$.

解 由 $\ln u$ 的连续性，原式$=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{(1-2a)n}\right]^n=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\dfrac{1}{1-2a}$.

1.8.4 幂指函数的极限

利用恒等式 $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$，幂指函数的极限 $\lim u^v$ 可用以下公式转换：

$$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}.$$

1. 确定型

设 $\lim u=a>0$，$\lim v=b$，则

$$\lim u^v=a^b=(\lim u)^{\lim v},$$

即底和幂分别求极限即可.

2. 1^∞型未定式

设 $\lim u=1$, $\lim v=\infty$, 则

$$\lim u^v = e^{\lim v\ln u} = e^{\lim(u-1)v} \quad (\text{因为} \ln u \sim u-1),$$

即

$$\lim u^v = e^{\lim(u-1)v}.$$

注　这是计算 1^∞型极限的最方便的公式.

特例　设 $\lim\alpha=0$, $\lim\beta=0$, $\lim v=\infty$, 则

$$\lim(1+\alpha)^v = e^{\lim\alpha v}, \qquad \lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = e^{\lim\frac{\alpha}{\beta}}.$$

注　这两个公式常用.

例 1.8.4 (1995 年 1)　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解　这是 1^∞型极限.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

另解　原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}3x\cdot\frac{2}{\sin x}}=e^{6\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^6$.

例 1.8.5 (2003 年 1)　求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解　这是 1^∞型极限.

原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$,

其中利用了等价无穷小代换 $\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$, $\ln(1+x^2)\sim x^2\ (x\to 0)$.

1.8.5　幂指函数极限中的等价无穷小代换

一般说来加减项中的等价无穷小不能互相代换. 但是对于幂指函数的极限, 我们有下列无穷小等价代换公式(表 1.8.3).

表 1.8.3

等价无穷小代换公式	说　明
1^∞型未定式 $\lim(1+\alpha)^v$ 若 $\alpha\sim\alpha_1$, $\lim v=\infty$, 则 $\lim(1+\alpha)^v=\lim(1+\alpha_1)^v$	证　$\lim(1+\alpha)^v=e^{\lim\alpha v}=e^{\lim\alpha_1 v}=\lim(1+\alpha_1)^v$
1^∞型未定式 $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ 若 $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim(1+\alpha_1)^{\frac{1}{\beta_1}}$	证　$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=e^{\lim\frac{\alpha}{\beta}}=e^{\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}}=\lim(1+\alpha_1)^{\frac{1}{\beta_1}}$
∞^0 型未定式 $\lim u^\beta$ 若 $\lim u=\infty$, $\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim u^\beta=\lim u^{\beta_1}$	证　$\lim u^\beta=e^{\lim\beta\ln u}=e^{\lim\beta_1\ln u}=\lim u^{\beta_1}$

续表

等价无穷小代换公式	说　明
0^0 型未定式 $\lim\alpha^{\beta}$ 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，则 $\lim\alpha^{\beta}=\lim{\alpha_1}^{\beta_1}$	**证** $\lim\alpha^{\beta}=e^{\lim\beta\ln\alpha}=e^{\lim\beta_1\ln\alpha}=\lim\alpha^{\beta_1}$ $=\lim\left(\dfrac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\cdot{\alpha_1}^{\beta_1}=1^0\cdot\lim{\alpha_1}^{\beta_1}=\lim{\alpha_1}^{\beta_1}$

点评 以上公式表明:幂指函数的底和幂中出现的无穷小都可用等价无穷小代换.

例 1.8.6 (2003 年 4) $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$____.

解 因为 $\ln(1+x)\sim x(x\to0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$.

1.8.6 初等函数的连续性

1. 基本初等函数的连续性

定理 1.8.1 基本初等函数在其定义域内是连续的.

2. 初等函数的连续性

定理 1.8.2 一切初等函数在其定义区间内是连续的.

注意 ①初等函数的间断点一般出现在使函数表达式的分母为零的点处;②分段函数一般不是初等函数,因此分段函数的间断点往往出现在分段点处.

典型例子:(1) 绝对值函数 $f(x)=|x|$ 处处连续(图 1.8.4).

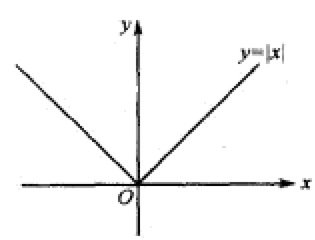


图 1.8.4

(2) 若 $f(x)$是连续函数,则 $|f(x)|$ 也是连续函数.

(3) 若 $f(x)$和 $g(x)$是连续函数,则$\max\{f(x),g(x)\}$和 $\min\{f(x),g(x)\}$也是连续函数.因为

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2},$$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}.$$

例 1.8.7 (2001 年 2) 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$.记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$的间断点并指出其类型.

解 这是 1^{∞}型极限.

$$f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

$f(x)$有间断点 $x=k\pi$(k 是整数). 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^1=e$, 所以 $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点(为可去间断点). 当 $k\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}=\infty$, 所以 $x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(x)$的第二类间断点(为无穷间断点).

1.8.7　闭区间上连续函数的性质

函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续是指: $f(x)$在开区间(a, b)内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

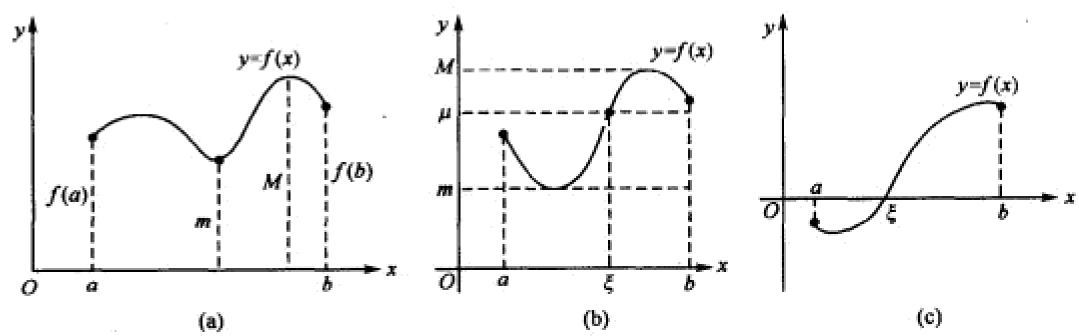


图 1.8.5

最值定理　在闭区间上连续的函数一定能在该区间上取到最大的函数值 M 和最小的函数值 m(图 1.8.5(a)).

有界性定理　在闭区间上连续的函数在该区间上有界(因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$).

介值定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, m 和 M 是 $f(x)$在$[a, b]$上的最小值和最大值, 则对任何 $\mu\in[m, M]$, 都存在 $\xi\in[a, b]$, 使得 $f(\xi)=\mu$(即 $f(x)$在$[a, b]$上的值域为$[m, M]$)(图 1.8.5(b)).

零点定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$(图 1.8.5(c)).

第2章 导数与微分

2.1 导数概念

2.1.1 导数的定义(表2.1.1)

表2.1.1

导数的定义	说　明
函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	导数的增量极限形式 若此极限存在,则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导 若此极限不存在,则称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导或导数不存在
$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	导数的函数极限形式
$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$	$x=0$ 处的导数
若 $f(0)=0$, 则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$	$f(0)=0$ 时, $x=0$ 处的导数
导函数 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	任意点 x 处的导数
导数的记号 $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$	

2.1.2 导数的各种形式(表2.1.2)

导数是一种特定的极限形式.有时候我们需要反过来用导数去求这种特定形式的极限.设导数存在.

表2.1.2

导数的形式	说　明
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$	导数的定义
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$	导数的定义
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	$x=0$ 处的导数

续表

导数的形式	说　明
若 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$	$f(0)=0$ 时，$x=0$ 处的导数
$\lim\limits_{[\,]\to 0}\dfrac{f(x+[\,])-f(x)}{[\,]}=f'(x)$	导数的一般形式
若 $\lim\alpha=0$，则 $\lim\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}=f'(x)$	导数的一般形式
$\lim\limits_{[\,]\to x}\dfrac{f([\,])-f(x)}{[\,]-x}=f'(x)$	导数的一般形式
$\lim\limits_{动\to 定}\dfrac{f(动)-f(定)}{动-定}=f'(定)$	导数形式的形象记忆
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+bh)-f(x_0-ah)}{h}=(a+b)f'(x_0)$	常用公式
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{h}=af'(x_0)$	特例
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$	特例
$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0)$	

例 2.1.1 (1994 年 4)　设 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$ ____.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}=\dfrac{1}{(-2+1)f'(x_0)}=\dfrac{1}{-f'(x_0)}=1.$

例 2.1.2 (1989 年 2)　设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$ ____.

解　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)\cdots(x+n)}{x}=n!.$

2.1.3　单侧导数

1. 单侧导数

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. 导数与单侧导数的关系

定理 2.1.1 函数 $f(x)$在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 处的左导数和右导数都存在并且相等,即

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A.$$

推论 2.1.1 如果 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$,则 $f'(x_0)$不存在.

点评 这是证明 $f'(x_0)$不存在的常用方法.

例 2.1.3(1995 年 2) 设 $f(x)$可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,若使 $F(x)$在 $x=0$ 可导,则必有( ).

(A) $f(0)=0$; (B) $f'(0)=0$;

(C) $f(0)+f'(0)=0$; (D) $f(0)-f'(0)=0$.

解

$$\begin{aligned}
F'_-(0) &= \lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} - \lim_{x\to0^-}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\\
&= f'(0)-f(0)\cdot1 = f'(0)-f(0),\\
F'_+(0) &= \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}\\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{x\to0^+}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\\
&= f'(0)+f(0)\cdot1 = f'(0)+f(0).
\end{aligned}$$

若 $F'(0)$存在,则有 $F'_-(0)=F'_+(0)$,即 $f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$,故有 $f(0)=0$.选(A).

2.1.4 导数的几何意义

$f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)(y_0=f(x_0))$处的切线斜率(图 2.1.1(a)).

切线斜率:$k=f'(x_0)=\tan\alpha$.

法线斜率:$k'=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

切线方程:$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程:$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

特例 若 $f'(x_0)=0$,则曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处有水平切线:$y=y_0$,铅直法线:$x=x_0$(图 2.1.1(b)).

特例 若 $f'(x_0)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处有铅直切线:$x=x_0$,水平法线:$y=y_0$(图 2.1.1(c)).

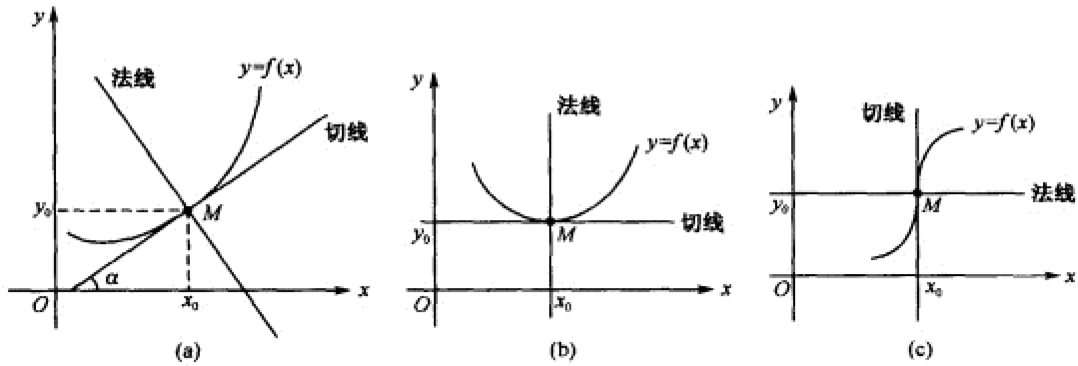


图 2.1.1

可导与有切线的关系：

(1) 若 $f'(x_0)$存在，则曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处有切线(非铅直).

(2) 若 $f'(x_0)$不存在且 $f'(x_0)\neq\infty$，则曲线 $y=f(x)$在 $M(x_0,y_0)$处无切线.

(3) 若 $f'(x_0)$不存在但 $f'(x_0)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$在 $M(x_0,y_0)$处有铅直切线 $x=x_0$.

因此，函数在一点可导与曲线在相应点处有切线不是等价条件. 如果排除铅直切线，我们有下列等价条件.

$f'(x_0)$存在的充分必要条件是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有非铅直的切线.

例 2.1.4 (1995 年 4)　设 $f(x)$为可导函数，且满足条件$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为(　　).

(A)2;　　(B) -1;　　(C)$\dfrac{1}{2}$;　　(D) -2.

解　$-1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$，得 $f'(1)=-2$. 故切线斜率 $k=f'(1)=-2$. 选(D).

2.1.5　可导与连续的关系

定理 2.1.2　若函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，则 $f(x)$在 x_0 处必连续(记忆：可导必连续).

用极限式表示：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在(可导条件)$\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$(连续条件).

推论 2.1.2　若函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续，则 $f(x)$在 x_0 处不可导(记忆：不连续一定不可导).

但是,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,不能保证 $f(x)$在 x_0 处可导(记忆:连续不一定可导).

经典反例 (1) $f(x)=|x|$在 $x=0$ 处连续,但它在 $x=0$ 处不可导(因为 $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$,所以 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$)(图 2.1.2(a)).

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$在$x=0$ 处连续,但它在 $x=0$ 处不可导(因为 $f'(0)=\infty$)(图 2.1.2(b)).

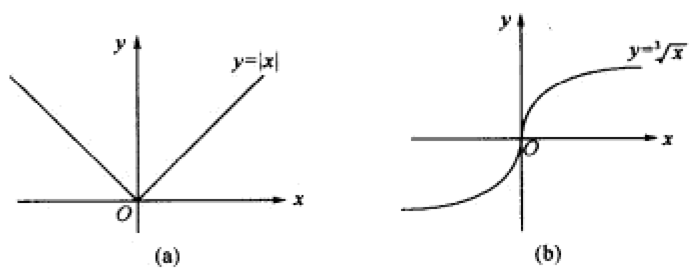


图 2.1.2

可导是连续的充分条件,但不是必要条件.连续是可导的必要条件,但不是充分条件.

函数在一点可导、连续和有极限有下列关系:

可导⇒连续⇒有极限, 无极限⇒不连续⇒不可导.

例 2.1.5 (1993 年 4) 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处( ).

(A) 极限不存在; (B) 极限存在但不连续;

(C) 连续但不可导; (D) 可导.

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$(无穷小与有界函数之积是无穷小),即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

右导数 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x^2}$不存在,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导.选(C).

2.1.6 导数模型一览表

导数,作为变化率,可以刻画自然科学和社会科学中的很多现象(表 2.1.3).

表 2.1.3

学科	函　数	平均变化率(初等数学)	导数(变化率)(高等数学)
几何学	曲线 $y=f(x)$	割线斜率 $\bar{k}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$	切线斜率 $k=\frac{dy}{dx}$
物理学	路程 $s=s(t)$	平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	瞬时速度 $v=\frac{ds}{dt}$
	速度 $v=v(t)$	平均加速度 $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$	加速度 $a=\frac{dv}{dt}$
	旋转角度 $\theta=\theta(t)$	平均角速度 $\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$
	细棒质量 $M=M(x)$	平均线密度 $\bar{\rho}=\frac{\Delta M}{\Delta x}$	线密度 $\rho=\frac{dM}{dx}$
	电量 $Q=Q(t)$	平均电流强度 $\bar{I}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$	电流强度 $I=\frac{dQ}{dt}$
	热量 $Q=Q(\tau)$(τ 是温度)	平均比热容 $\bar{c}=\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$	比热容 $c=\frac{dQ}{d\tau}$
经济学	总成本 $C=C(Q)$(Q 是产量)	平均成本 $\bar{C}=\frac{\Delta C}{\Delta Q}$	边际成本 $M_C=\frac{dC}{dQ}$
	总收益 $R=R(Q)$(Q 是销售量)	平均收益 $\bar{R}=\frac{\Delta R}{\Delta Q}$	边际收益 $M_R=\frac{dR}{dQ}$
化学	浓度 $C=C(t)$	平均化学反应速度 $\bar{\mu}=\frac{\Delta C}{\Delta t}$	化学反应速度 $\mu=\frac{dC}{dt}$
人口学	人口数量 $P=P(t)$	人口平均增长率 $\bar{v}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$	人口增长率 $v=\frac{dP}{dt}$
心理学	知识总量 $L=L(t)$	知识平均增长速度 $\bar{R}=\frac{\Delta L}{\Delta t}$	知识增长率 $R=\frac{dL}{dt}$

注　表中的 t 均表示时间.

2.1.7　基本初等函数的导数公式(表 2.1.4)

表 2.1.4

函数类型	导数公式	说　明
常数	$(C)'=0$	常数的导数为零
幂函数	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$	
	特例　$(x)'=1, (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	常用公式
三角函数	$(\sin x)'=\cos x$,　$(\cos x)'=-\sin x$	三角函数的导数仍是三角函数
	$(\tan x)'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$,　$(\cot x)'=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$	
	$(\sec x)'=\sec x\tan x$,　$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	

续表

函数类型	导数公式	说明	
指数函数	$(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$		
对数函数	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$		
反三角函数	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	两个导数仅相差一个符号	反三角函数的导数是代数函数(不再是反三角函数)
	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arccot}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	同上	
	$(\mathrm{arcsec}\,x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{arccsc}\,x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	同上(这两个导数不常用)	

2.1.8 双曲函数和反双曲函数的导数公式

$$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x,\quad (\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x,\quad (\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x},$$

$$(\mathrm{arsh}x)'=\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(\mathrm{arch}x)'=\left[\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\mathrm{arth}x)'=\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]'=\frac{1}{1-x^2}.$$

● 2.2 函数的求导法则

2.2.1 导数的四则运算法则

设函数 u 和 v 可导，则它们的和、差、积、商也可导，且有下列求导法则(表 2.2.1).

表 2.2.1

导数的四则运算法则	说明
(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$	和(差)的求导法则
(2) $(uv)'=u'v+uv'$	积的求导法则
(3) $(Cu)'=Cu'$(C 为常数)	倍数的求导法则
(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq0)$	商的求导法则
特例 $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v\neq0)$	倒数的求导法则

导数的线性性质：

$$(c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n)'=c_1u'_1+c_2u'_2+\cdots+c_nu'_n,$$

即线性组合的导数等于导数的线性组合.

乘积求导法则的推广：

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw',$$

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u'_1u_2\cdots u_n+u_1u'_2\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u'_n.$$

例 2.2.1 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$，其中所有函数都可导，求 $f'(x)$.

解 因为 $f(x)=a(x)d(x)-b(x)c(x)$，所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= [a'(x)d(x)+a(x)d'(x)]-[b'(x)c(x)+b(x)c'(x)] \\ &= [a'(x)d(x)-b'(x)c(x)]+[a(x)d'(x)-b(x)c'(x)] \\ &= \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

注 这个结果可以推广到高阶行列式函数.

2.2.2 反函数的求导法则

设 $x=\varphi(y)$是函数 $y=f(x)$的反函数($y=f(x)$称为 $x=\varphi(y)$的直接函数)，则有下列求导公式：

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0=f(x_0)).$$

若将 $y=f(x)$的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，则

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0=f(x_0)).$$

反函数 $x=\varphi(y)$的导函数为

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad (y=f(x))$$

或

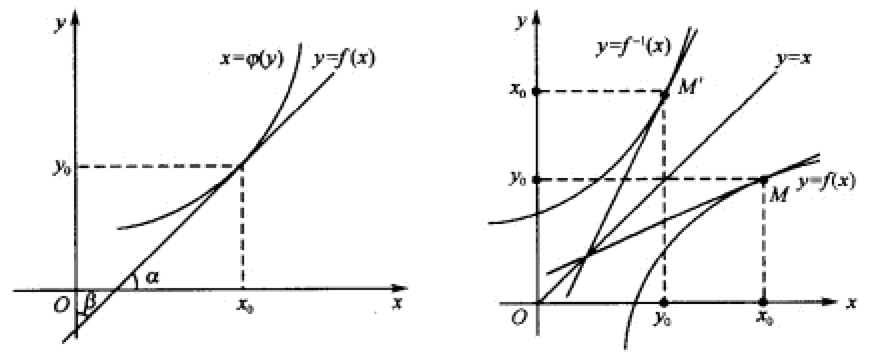
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}},$$

即反函数的导数是直接函数的导数的倒数.

公式 $\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$的几何解释：如图 2.2.1(a)，$\varphi'(y_0)=\tan\beta$，$f'(x_0)=\tan\alpha$. 所以 $\varphi'(y_0)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}$.

公式$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$的几何解释：$y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 2.2.1(b)). 因此曲线 $y=f^{-1}(x)$在点 $M'(y_0,x_0)$处的切线与曲

线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线也关于 $y=x$ 对称. 所以, 两条切线的斜率有倒数关系, 即$(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.



(a)　　(b)

图 2.2.1

公式$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$的直观解释: 我们可以用变化率来解释这个公式. 若在曲线 $y=f(x)$上的一点 $M(x,y)$处, y 的变化速度是 x 的 3 倍$\left(\dfrac{dy}{dx}=3\right)$, 则在同一点处, x 的变化速度是 y 的$\dfrac{1}{3}$倍$\left(\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{3}\right)$, 故$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

例 2.2.2　设 $x=g(y)$是 $f(x)=\ln x+\arctan x$ 的反函数, 求 $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解　当 $x_0=1$ 时, $y_0=f(1)=\dfrac{\pi}{4}$. 因为

$$f'(x)=(\ln x+\arctan x)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2},$$

得 $f'(1)=\dfrac{3}{2}$. 于是 $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{2}{3}$.

[redacted]　这类问题不可能由直接函数 $y=\ln x+\arctan x$ 解出反函数 $x=g(y)$, 再求导数. 只能利用反函数的导数与直接函数的导数的倒数关系$\left(g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}\right)$来求解.

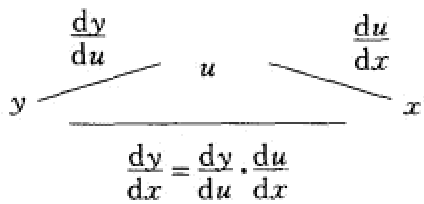
2.2.3　复合函数的求导法则: 链式法则

设 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$可导, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$也可导, 且有下列求

导法则(链式法则):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x),$$

即外函数的导数乘以内函数的导数就等于复合函数的导数.



链式法则的直观解释　我们可以用变化率来解释链式法则.

若 y 的变化速度是 u 的 3 倍:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=3$;又 u 的变化速度是 x 的 2 倍:$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2$,则 y 的变化速度是 x 的 6 倍:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6=3\cdot 2$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

若不引入中间变量 u,复合函数的导数公式为

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

注意区分$\{f[\varphi(x)]\}'$与$f'[\varphi(x)]$. 前者是复合函数 $f[\varphi(x)]$的导数,而后者不是复函数的导数. $f'[\varphi(x)]$是外函数的导数 $f'(u)$在 $u=\varphi(x)$处的导数值,即$f'[\varphi(x)]=[f'(u)]_{u=\varphi(x)}$(或者说它是 $f'(u)$与$u=\varphi(x)$的复合函数).

复合函数的求导法则可以推广到多个函数复合的情形. 例如,设 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$可导,则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$也可导,且有下列求导公式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)$$

或

$$\left(f\{\varphi[\psi(x)]\}\right)'=f'\{\varphi[\psi(x)]\}\varphi'[\psi(x)]\psi'(x).$$

$$
\begin{tikzcd}
 & u \arrow[rr, dash, "\frac{du}{dv}"] & & v \arrow[dr, dash, "\frac{dv}{dx}"] & \\
y \arrow[ur, dash, "\frac{dy}{du}"] \arrow[rrrr, dash, swap, "\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}"] & & & & x
\end{tikzcd}
$$

复合函数求导的方法是:

(1) 弄清复合函数的复合结构和复合顺序;

(2) 从外层向内层逐层求导,一直求到自变量一层为止.

例 2.2.3 求下列函数的导数:(1) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$;(2) $y=\sin[f(x^2)]$,其中 f 可导.

解 (1) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$是由 $y=2^u$, $u=v^2$, $v=\sin w$, $w=\dfrac{1}{x}$复合而成.

$$
\begin{aligned}
y'&=\left(2^{\sin^2\frac{1}{x}}\right)'=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln2\cdot\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln2\cdot2\sin\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'\\
&=2\ln2\cdot2^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\ln2\cdot2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&=-\frac{\ln2}{x^2}2^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}.
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
y'&=\{\sin[f(x^2)]\}'=\cos[f(x^2)][f(x^2)]'=\cos[f(x^2)]f'(x^2)(x^2)'\\
&=2xf'(x^2)\cos[f(x^2)].
\end{aligned}
$$

例 2.2.4 (1995 年 2) 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$在 $x=0$ 处的连续性.

解 当 $x\neq0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\left(x\arctan\frac{1}{x^2}\right)'=\arctan\frac{1}{x^2}+x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\\
&=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1};
\end{aligned}
$$

当 $x=0$ 时,

$$
f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}.
$$

因为

$$
\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1}\right)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}=f'(0),
$$

所以 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续.

2.2.4 隐函数的求导法则

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}$可以用下列三种方

法求得.

(1) 直接求导法. 方程 $F(x, y)=0$ 两端同时对 x 求导(此时要将 y 视为 x 的函数 $y(x)$), 然后解出导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

说明 使用直接求导法时一定要记住 y 是 x 的函数. 因此 y 的函数是 x 的复合函数. 例如, y^2, e^y, $\ln y$ 都是 x 的复合函数. 对 x 求导时应按复合函数的求导法则去求它们的导数: $(y^2)'=2yy'$, $(e^y)'=e^y y'$, $(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'$.

(2) 微分法. 利用微分形式不变性, 方程 $F(x, y)=0$ 两端同时微分(此时, x 和 y 均视为地位平等的独立变量), 然后解出微分 $\mathrm{d}y=G(x, y)\mathrm{d}x$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=G(x, y)$.

说明 用微分法求隐函数的导数往往很方便, 是常用方法.

(3) 公式法. 先求出二元函数 $F(x, y)$ 的两个偏导数 $F_x(x, y)$ 和 $F_y(x, y)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

说明 用公式法求隐函数的导数不容易出错, 但这个方法要学了偏导数以后才能使用(见 8.5.1 节). 这个公式说明隐函数的导数总是一个分式.

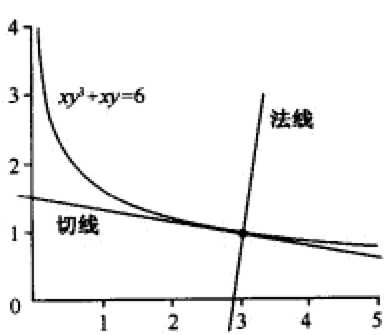


图 2.2.2

例 2.2.5 求曲线 $xy^3+xy=6$ 在点 $(3,1)$ 处的切线和法线方程.

解 曲线方程两边对 x 求导, 得

$$y^3+x\cdot 3y^2y'+y+xy'=0,$$

将 $x=3$, $y=1$ 代入上式, 得 $y'(3)=-\frac{1}{6}$. 因此, 曲线在点 $(3,1)$ 处的切线斜率为 $k=-\frac{1}{6}$, 法线斜率为 $k'=6$.

切线方程: $y-1=-\frac{1}{6}(x-3)$ 或 $y=-\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$;

法线方程: $y-1=6(x-3)$ 或 $y=6x-17$ (图 2.2.2).

2.2.5 对数求导法

对数求导法的基本公式 设有函数 $y=f(x)$. 取对数得 $\ln y=\ln f(x)$ (将显函数化为隐函数), 用隐函数求导法则, 得

$$(\ln y)'=[\ln f(x)]' \quad 或 \quad \frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]',$$

所以

$$f'(x)=f(x)[\ln f(x)]' \quad (对数求导法的基本公式).$$

[redacted] 这个公式的意义在于: 有的时候求 $\ln f(x)$ 的导数比直接求 $f(x)$ 的导

数更容易.

对数求导法主要用来求幂指函数和有多个因子相乘(除)的函数的导数.

1. 幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 的求导法则

幂指函数可用下列3种方法求导.

(1) 对数求导法(有3个步骤).

① 取对数:$\ln y=\ln u^v=v\ln u$(将显函数化为隐函数);

② 求导数:$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'$;

③ 解出 y':$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)$.

幂指函数的导数公式为

$$(u^v)'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right).$$

[redacted] 这个公式可以直接使用.

(2) 指数求导法. 利用恒等式 $u^v=e^{v\ln u}$,得

$$\begin{aligned}(u^v)'&=(e^{v\ln u})'=e^{v\ln u}(v\ln u)'=u^v(v\ln u)'\\&=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right).\end{aligned}$$

(3) 公式法. 利用对数求导法的基本公式,得

$$(u^v)'=u^v(\ln u^v)'=u^v(v\ln u)',$$

即

$$(u^v)'=u^v(v\ln u)'.$$

例如,$(x^{\sin x})'=x^{\sin x}(\sin x\cdot\ln x)'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

2. 有多个因子相乘(除)的函数的导数

设 $y=\frac{u_1^a u_2^b}{v_1^c v_2^d}$,则可用下列对数求导法求其导数:

① 取对数:$\ln y=a\ln u_1+b\ln u_2-c\ln v_1-d\ln v_2$;

② 求导数:$\frac{1}{y}y'=\frac{au_1'}{u_1}+\frac{bu_2'}{u_2}-\frac{c_1v_1'}{v_1}-\frac{dv_2'}{v_2}$;

③ 解出 y':$y'=\frac{u_1^a u_2^b}{v_1^c v_2^d}\left(\frac{au_1'}{u_1}+\frac{bu_2'}{u_2}-\frac{cv_1'}{v_1}-\frac{dv_2'}{v_2}\right)$.

注 也可以利用对数求导法的基本公式求导:

$$y'=\frac{u_1^a u_2^b}{v_1^c v_2^d}\left(\ln\frac{u_1^a u_2^b}{v_1^c v_2^d}\right)'=\frac{u_1^a u_2^b}{v_1^c v_2^d}(a\ln u_1+b\ln u_2-c\ln v_1-d\ln v_2)'.$$

点评　对数求导法对这类函数之所以有效在于：对数可化积为和（$\ln uv=\ln u+\ln v$）、化商为差$\left(\ln\dfrac{u}{v}=\ln u-\ln v\right)$、化指数为系数（$\ln u^c=c\ln u$）.

例 2.2.6　设 $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$，求 y'.

解　利用对数求导法有

$$\ln y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\qquad \ln\ln y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)],$$

对上式两边求导得

$$\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{x^2-1},$$

即

$$y'=y\ln y\cdot\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

2.2.6　由参数方程所确定的函数的导数

由参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$所确定的函数 $y=y(x)$的导数的计算公式是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\quad 或\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

参数方程求导公式的直观解释：我们可以用变化率来解释这个求导公式.

若 y 的变化速度是 t 的 6 倍：$\frac{dy}{dt}=6$；又 x 的变化速度是 t 的 2 倍：$\frac{dx}{dt}=2$，则 y的变化速度是 x 的 3 倍：$\frac{dy}{dx}=3=\frac{6}{2}$. 所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

例 2.2.7（1997 年 2）　设 $y=y(x)$由$\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$. 第二个方程两端对 t 求导，得 $2\frac{dy}{dt}-y^2-2ty\frac{dy}{dt}+e^t=0$，解得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)},$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$$

2.2.7 参数曲线的切线与法线

设曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $M(x_0, y_0)$是参数 t_0 所对应的点，则曲线在点 $M(x_0, y_0)$处的切线斜率 $k = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$，法线斜率 $k' = -\dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}$.

曲线在点 $M(x_0, y_0)$处的切线方程：$\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)}$(对称式)，法线方程：$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) = 0$(点法式).

注 ① 若 $y'(t_0) = 0$，则曲线在点 $M(x_0, y_0)$处有水平切线 $y = y_0$ 和铅直法线 $x = x_0$；② 若 $x'(t_0) = 0$，则曲线在点 $M(x_0, y_0)$处有铅直切线 $x = x_0$ 和水平法线 $y = y_0$.

曲线$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$在点 $M(x_0, y_0)$处的切向量：$\boldsymbol{\tau} = \{x'(t_0), y'(t_0)\}$，法向量：$\boldsymbol{n} = \{-y'(t_0), x'(t_0)\}$(图 2.2.3).

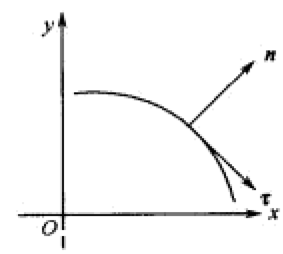


图 2.2.3

例 2.2.8 (1995 年 2) 曲线$\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$在 $t = 2$ 处的切线方程为____.

解 切点$(x_0, y_0) = (x(2), y(2)) = (5, 8)$. 切线斜率

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2} = \left.\frac{3t^2}{2t}\right|_{t=2} = 3,$$

故切线方程为 $y - 8 = 3(x - 5)$或 $y = 3x - 7$.

另解 利用公式，切线方程为$\dfrac{x - x(2)}{x'(2)} = \dfrac{y - y(2)}{y'(2)}$，即$\dfrac{x - 5}{4} = \dfrac{y - 8}{12}$，或 $y = 3x - 7$.

2.2.8 由极坐标方程所确定的函数的导数

由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$所确定的函数 $y = y(x)$就是参数方程

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

所确定的函数. 由参数方程所确定的函数的导数公式，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta},$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho'(\theta)\tan\theta + \rho(\theta)}{\rho'(\theta) - \rho(\theta)\tan\theta}.$$

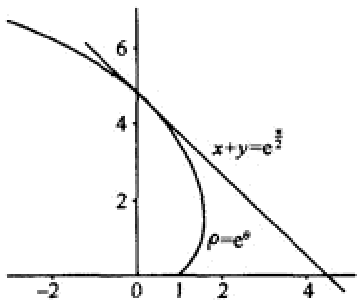


图 2.2.4

例 2.2.9 (1997 年 1) 对数螺线 $\rho = e^{\theta}$ 在点 $(\rho, \theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为____.

解 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta, \end{cases}$ 切点 $(x_0, y_0) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\right) = (0, e^{\frac{\pi}{2}})$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{\theta}\sin\theta)'}{(e^{\theta}\cos\theta)'} = \frac{e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta},$$

切线斜率 $k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$. 故切线方程为

$$y - e^{\frac{\pi}{2}} = (-1)(x - 0) \text{ 或 } y = -x + e^{\frac{\pi}{2}} \text{ 或 } x + y = e^{\frac{\pi}{2}} (\text{图 } 2.2.4).$$

2.2.9 相关变化率

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 而 x 和 y 都是时间 t 的函数: $x = x(t)$, $y = y(t)$. 将 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 代入方程, 得 $F[x(t), y(t)] = 0$. 等式两端对 t 求导, 便得到变化率 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 之间的一个关系式. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 如果已知其中的一个变化率, 则可以从这个关系式中求出另一个变化率. 这就是所谓的相关变化率问题. 相关变化率在实际问题中有大量的应用.

例 2.2.10 将水注入深 8m, 上顶直径为 8m 的正圆锥形容器中, 注水速率为 $4\text{m}^2/\text{min}$. 求当水深为 5m 时, 水面上升的速率.

解 如图 2.2.5 所示, 当水面高为 h 时, 水面的半径为 $r = \frac{h}{2}$. 水的体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$, $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot 3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$.

由题意知注水速率 $\frac{dV}{dt} = 4$, 又 $h = 5$, 从而得 $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{25\pi}$.

所以, 当水深为 5m 时, 水面上升的速率为 $\frac{16}{25\pi}$ m/min.

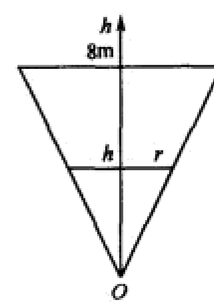


图 2.2.5

2.3 一些特殊的求导方法

2.3.1 分段函数的导数

1. 用定义求分段函数在分段点处的导数

设有分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & a < x < x_0, \\ c, & x = x_0, \\ h(x), & x_0 < x < b, \end{cases}$ 其中 $x = x_0$ 是分段点.

若 x 不是分段点，则用公式求导：

$f'(x)=g'(x)\quad(a<x<x_0),\quad f'(x)=h'(x)\quad(x_0<x<b).$

在分段点 x_0 处，一般须用导数的定义求导.

首先检查 $f(x)$在 x_0 处的连续性：

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}g(x)=f(x_0)=c,$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}h(x)=f(x_0)=c.$$

如果这两个等式成立，则 $f(x)$在 x_0 处连续；否则 $f(x)$在 x_0 处不连续，从而$f(x)$在 x_0 处不可导.

然后用定义求 $f(x)$在 x_0 处的单侧导数：

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{g(x)-c}{x-x_0},$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{h(x)-c}{x-x_0}.$$

若 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，则 $f(x)$在 x_0 处可导且 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$；若 $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$，则 $f(x)$在 x_0 处不可导.

例 2.3.1 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0$（无穷小与有界函数之积为无穷小），且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

（见 1.3.3 节）. 因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

[redacted] $f(x)$是偶函数，而偶函数在 $x=0$ 处可导，则必有 $f'(0)=0$.

2. 分段函数在分段点处的导数的简便求法

利用拉格朗日中值定理可以证明以下定理.

定理 2.3.1 (1) 设函数 $f(x)$在区间$[x_0,b)$上连续，在(x_0,b)内可导，且极

限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$ 存在，则右导数 $f'_+(x_0)$存在，并有

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=A;$$

(2) 设函数 $f(x)$在区间$(a,x_0]$上连续，在(a,x_0)内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=B$ 存在，则左导数 $f'_-(x_0)$存在，并有

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=B.$$

推论 2.3.1　若函数 $f(x)$在 x_0 处连续，则 $f(x)$在 x_0 处的左导数和右导数分别为

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x) \quad 和 \quad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

只要以上极限都存在.

设有分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x), & a<x<x_0, \\ c, & x=x_0, \\ h(x), & x_0<x<b. \end{cases}$ 我们可以用以下方法求 $f(x)$在分段点 x_0 处的导数：

(1) 先确认 $f(x)$在 x_0 处连续(若 $f(x)$在 x_0 处不连续，则 $f(x)$在 x_0 处不可导).

(2) 用公式求出导数 $g'(x)(a<x<x_0)$和 $h'(x)(x_0<x<b)$，再取极限，得 $f(x)$在 x_0 处的左、右导数：

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} g'(x) \text{ 和 } f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} h'(x).$$

(3) 根据 $f'_-(x_0)$和 $f'_+(x_0)$是否相等，可知 $f(x)$在 x_0 处是否可导.

注意　如果不检查 $f(x)$在 x_0 处的连续性，仅由 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$不能得出 $f(x)$在 x_0 处可导的结论. 例如，符号函数 $f(x)=\text{sgn}x$ 在 $x=0$ 处不连续(从而不可导)，但却有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

[illegible]　这种简便方法常用于客观题或填空题. 对于有解题过程的解答题最好用定义求分段点处的导数.

例 2.3.2 (1988 年 4)　确定常数 a 和 b，使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1, \\ x^2, & x\leqslant 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导.

解　若 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，则 $f(x)$在 $x=1$ 处连续. 由 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$，得 $a+b=1$.

由于 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，我们可用简便方法计算单侧导数：

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(x^2)'=\lim_{x\to 1^-} 2x=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)'=\lim_{x\to 1^+}a=a.$$

由 $f'_-(1)=f'_+(1)$，得 $a=2$. 又 $b=1-a=-1$，故当 $a=2,b=-1$时，$f(x)$在 $x=1$ 处可导.

2.3.2　带绝对值的函数的导数

1. $|f(x)|$的可导性

设 $f(x)$在点 x_0 处可导，$g(x)=|f(x)|$，则 $g(x)$在点 x_0 处的导数有以下结论(表 2.3.1).

表 2.3.1

如　果	并　且	则　有
$f(x_0)\neq 0$	$f(x_0)>0$	$g'(x_0)=f'(x_0)$
	$f(x_0)<0$	$g'(x_0)=-f'(x_0)$
$f(x_0)=0$	$f'(x_0)=0$	$g'(x_0)=0$
	$f'(x_0)\neq 0$	$g'(x_0)$不存在

说明　(1) 当 $f(x_0)\neq 0$ 时，在 x_0 附近有

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & f(x_0)>0,\\ -f(x), & f(x_0)<0.\end{cases}$$

(2) 当 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)\neq 0$ 时，$f(x)$在 x_0 的两侧附近异号，因此 $g(x)=|f(x)|$在 x_0 处的左导数和右导数异号：$g'_-(x_0)=-g'_+(x_0)$. 所以 $g'_-(x_0)\neq g'_+(x_0)$，$g(x)$在 x_0 处不可导(图 2.3.1).

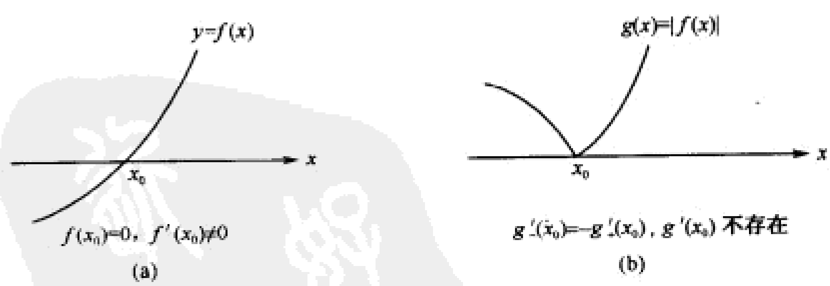


图 2.3.1

经典例子　(1) $y=x$ 在$x=0$ 处可导且 $y'(0)=1\neq 0$(图 2.3.2(a))，因此 $y=|x|$(图 2.3.2(b))在 $x=0$ 处不可导. 一般地，$y=|x-x_0|$在 x_0 处不可导.

(2) $y=\sin x$(图 2.3.2(c))在 $x=0$ 处可导且 $y'(0)=1\neq0$, 因此 $y=|\sin x|$(图 2.3.2(d))在 $x=0$ 处不可导.

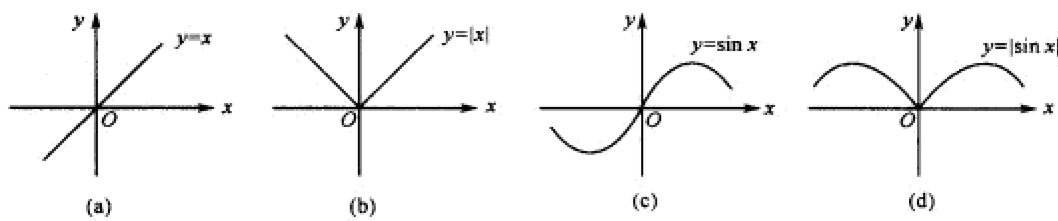


图 2.3.2

2. $f(x)=|x-x_0|g(x)$ 在 x_0 处的可导性

定理 2.3.2　$f(x)=|x-x_0|g(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

推论 2.3.2　设 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x)=|x-x_0|g(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $g(x_0)=0$.

注　若 $f(x)=|x-x_0|g(x)$ 在 x_0 处可导, 则必有 $f'(x_0)=0$.

例如, $y=x|x|$ 在 $x=0$ 处可导, $y=|x-1||x-2|$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处不可导.

经典例子　$y=|x-x_1||x-x_2|\cdots|x-x_n|(x_i\neq x_j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$ 在 x_i 处不可导($i=1,2,\cdots,n$).

例 2.3.3 (2000 年 3, 4)　设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　).

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$;　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq0$;

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$;　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

解　由前面的分析, 当 $f(a)=0$, $f'(a)\neq0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导. 选(B).

例 2.3.4 (1998 年 1, 2)　函数 $f(x)=(x^2-x-2)\cdot|x^3-x|$ 不可导点的个数是(　　).

(A) 3;　　(B) 2;　　(C) 1;　　(D) 0.

解　$f(x)=(x-2)(x+1)|x||x+1||x-1|=(x-2)\cdot(x+1)|x+1|\cdot|x|\cdot|x-1|$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处不可导, 在 $x=-1$ 处可导(图 2.3.3). 选(B).

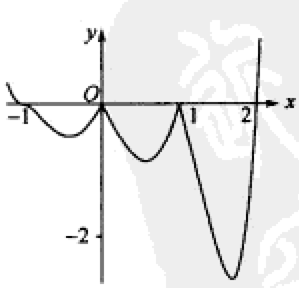
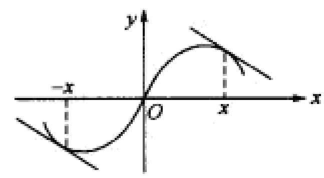
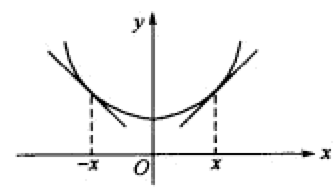
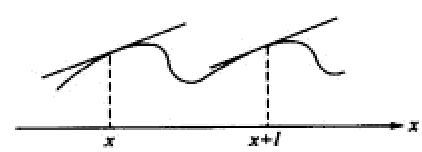


图 2.3.3

2.3.3 奇(偶)函数和周期函数的导数(表 2.3.2)

表 2.3.2

奇(偶)函数和周期函数的导数	图示及说明
奇函数的导数是偶函数 $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f'(-x)=f'(x)$	 关于原点对称的点处斜率相同: $f'(-x)=f'(x)$
偶函数的导数是奇函数 $f(-x)=f(x) \Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$	 关于 y 轴对称的点处斜率相反: $f'(-x)=-f'(x)$
周期函数的导数仍是周期函数 $f(x+l)=f(x) \Rightarrow f'(x+l)=f'(x)$	 一个周期后,斜率重复: $f'(x+l)=f'(x)$

非奇函数的导数也可能是偶函数.例如,$(\sin x+1)'=\cos x$.非周期函数的导数也可能是周期函数.例如,$(\sin x+x)'=\cos x+1$.但是只有偶函数的导数才可能是奇函数.

例 2.3.5 (1997 年 3,4) 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$,则在 $(0,+\infty)$ 内有( ).

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$; (B) $f'(x)>0, f''(x)>0$;

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$; (D) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

解 由条件可知 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f'(x)$ 是奇函数,$f''(x)$ 是偶函数.由 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0(-\infty<x<0)$ 知,$f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0(0<x<+\infty)$.选(C).

例 2.3.6 (1998 年 3,4) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,周期为 4.

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线斜率为(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$;　(B) 0;　(C) -1;　(D) -2.

解　由

$$-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)$$

得 $f'(1)=-2$.因为 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数,故 $f'(x)$也是以 4 为周期的周期函数.所以曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线斜率 $k=f'(5)=f'(1)=-2$.选(D).

● 2.4　高阶导数

2.4.1　高阶导数的定义

函数 $f(x)$在点 x_0 处的二阶导数为

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}\quad 或\quad f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

说明　如果 $f(x)$在点 x_0 处有二阶导数,则 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有一阶导数且 $f'(x)$在 x_0 处连续.

函数 $f(x)$在点 x_0 处的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}.$$

说明　如果 $f(x)$在 x_0 处有 n 阶导数,则 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有 1～$(n-1)$阶的各阶导数.

二阶及二阶以上的导数称为高阶导数,$f'(x)$称为一阶导数.约定 $y=f(x)$的零阶导数为函数本身,即 $f^{(0)}(x)=f(x)$.

高阶导数的记号为

$$y'',y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n},$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),\qquad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

2.4.2　高阶导数的运算法则

$(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$　　(C 是常数);

$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

乘积的高阶导数公式(莱布尼茨公式)为

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

例 2.4.1 (1990 年 1,2) 设 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f^{(n)}(x)=($ $)$.

(A) $n![f(x)]^{n+1}$; (B) $n[f(x)]^{n+1}$; (C) $[f(x)]^{2n}$; (D) $n![f(x)]^{2n}$.

解 $f'(x)=[f(x)]^2$, $f''(x)=\{[f(x)]^2\}'=2f(x)f'(x)=2f(x)[f(x)]^2=2[f(x)]^3$, $f'''(x)=2\{[f(x)]^3\}'=3![f(x)]^2f'(x)=3![f(x)]^4$. 由归纳法可以证明 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$. 选(A).

2.4.3 一些重要的高阶导数公式

$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$.

特例 $(x^n)^{(n)}=n!$, $(x^n)^{(m)}=0(m>n)$.

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$, 特例 $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

特例 $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$.

$\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$.

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

注 $[\ln(1+x)]^{(n)}=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}$, $(\ln x)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}$.

$(x\mathrm{e}^x)^{(n)}=(x+n)\mathrm{e}^x$, $(x^{n-1}\ln x)^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$.

$(\mathrm{sh}x)^{(n)}=\begin{cases}\mathrm{sh}x, & n \text{ 为偶数},\\ \mathrm{ch}x, & n \text{ 为奇数};\end{cases}$ $(\mathrm{ch}x)^{(n)}=\begin{cases}\mathrm{ch}x, & n \text{ 为偶数},\\ \mathrm{sh}x, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$

2.4.4 复合函数的二阶导数

设 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 有二阶导数,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也有二阶导数,且有

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}=f''(u)\varphi'^2(x)+f'(u)\varphi''(x),$$

或

$$\frac{dy}{dx}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''[\varphi(x)]\varphi'^2(x)+f'[\varphi(x)]\varphi''(x)\quad\text{（复合函数的二阶导数）}.$$

注意　$y=f'[\varphi(x)]$是$y=f'(u)$与$u=\varphi(x)$的复合函数，它的导数仍然要用链式法则：

$$\{f'[\varphi(x)]\}'=f''[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

2.4.5　由参数方程所确定的函数的高阶导数

设参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$确定了函数$y=y(x)$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

将$y'(x)$视为参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y'=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\end{cases}$所确定的函数，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left[\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{x'(t)}$，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}\quad\text{（二阶导数公式）},$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\begin{vmatrix}x'(t)&y'(t)\\x''(t)&y''(t)\end{vmatrix}}{x'^3(t)}\quad\text{（行列式形式便于记忆）}.$$

[redacted]　一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$对t求导，再除以$x'(t)$就是二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

求由参数方程所确定的函数的高阶导数的方法：

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=y_1(t)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y'_1(t)}{x'(t)}=y_2(t)$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{y'_2(t)}{x'(t)}$，…．设$\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_{n-1}(t)$，则$\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{y'_{n-1}(t)}{x'(t)}$.

[redacted]　将某阶导数的结果对t求导，再除以$x'(t)$就是更高一阶的导数．注意：不要忘记每一次求导都要除以$x'(t)$.

参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的三阶导数为

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{x'(x'y'''-x'''y')-3x''(x'y''-x''y')}{x'^5}.$$

例 2.4.2（1996 年 2）　设$x=\int_0^t f(u^2)du$，$y=[f(t^2)]^2$，其中$f(u)$具有二阶导数，且

$f(u)\neq 0$, 求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $dx=f(t^2)dt$, $dy=4tf(t^2)f'(t^2)dt$, 所以$\frac{dy}{dx}=4tf'(t^2)$. 于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{[4tf'(t^2)]'}{x'(t)}=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}.$$

2.4.6 隐函数的二阶导数

设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$, 则一阶导数$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

这个分式再对 x 求导(用直接求导法, 将 y 视作函数), 然后将$\frac{dy}{dx}$代入分子, 并整理即可求出二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

利用偏导数可以推导出隐函数 $y=y(x)$的二阶导数公式(见 8.5.1 节):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

求隐函数的二阶导数的简便方法: 方程 $F(x,y)=0$ 两端对 x 求导, 得方程 $G(x,y,y')=0$. 此方程两端再对 x 求导, 得方程 $H(x,y,y',y'')=0$. 然后将这两个方程联立消去 y', 便可解出 y''.

注 如果是求某一点 x_0 处的二阶导数, 则应及时将 x_0, $y_0=y(x_0)$代入方程 $G(x,y,y')=0$ 以解出 $y'_0=y'(x_0)$, 再将 x_0, y_0 和 y'_0 代入方程 $H(x,y,y',y'')=0$ 以解出 $y''_0=y''(x_0)$. 这样做往往可以简化计算.

例 2.4.3 (1992 年 2) 设函数 $y=y(x)$由方程 $y-xe^y=1$ 所确定, 求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$的值.

解 当 $x=0$ 时, $y=1$. 方程两边对 x 求导, 得

$$y'-e^y-xe^yy'=0.$$

再对 x 求导, 得

$$y''-e^yy'-e^yy'-xe^yy'^2-xe^yy''=0.$$

将 $x=0$, $y=1$ 代入第一式, 得$y'|_{x=0}=e$. 再将 $x=0$, $y=1$, $y'=e$ 代入第二式, 得$y''|_{x=0}=e^2+e^2=2e^2$, 即$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=2e^2$.

2.4.7 反函数的高阶导数

设 $x=\varphi(y)$是函数 $y=f(x)$的反函数, 则

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{y'}\quad(\text{反函数的导数}),$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{\left(\frac{1}{y'}\right)'_x}{y'}=-\frac{y''}{y'^3},$$

即

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\quad\text{或}\quad\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{y'^3}\quad(\text{反函数的二阶导数}).$$

同理

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)'_x}{y'}=\frac{\left(-\frac{y''}{y'^3}\right)'_x}{y'}=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5}\quad(\text{反函数的三阶导数}).$$

点评 如果将反函数 $x=\varphi(y)$ 看成是由参数方程 $\begin{cases}y=y(x),\\x=x\end{cases}$ (x 为参数)所确定的函数,则以上求反函数高阶导数的方法与参数方程求高阶导数的方法完全相同:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(x)'_x}{(y)'_x}=\frac{1}{y'},\quad\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\left(\frac{1}{y'}\right)'_x}{y'}=-\frac{y''}{y'^3},\quad\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{\left(-\frac{y''}{y'^3}\right)'_x}{y'}=\cdots.$$

2.4.8 带绝对值的函数的高阶导数

命题 $f(x)=(x-a)^n|x-a|$ 在 $x=a$ 处有 n 阶导数,但 $n+1$ 阶导数不存在,并且 $f^{(k)}(a)=0(k=1,2,\cdots,n)$.

例如,$y=x^3|x|$ 在 $x=0$ 处有 1～3 阶导数且 $f^{(k)}(0)=0(k=1,2,3)$,但 $f^{(k)}(0)$ 不存在($k>3$).

例 2.4.4 (1992年1) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数为( ).

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

解 因为 $3x^3$ 有任意阶导数,$x^2|x|$ 在 $x=0$ 处有2阶导数,但无3阶导数.故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处也有2阶导数,而无3阶导数.选(C).

● 2.5 微 分

2.5.1 微分的概念

1. 微分的定义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微是指函数的增量 Δy 可以表示成下列形式:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 x_0 有关,但与 Δx 无关的常数. Δy 的线性主部 $A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处相应于 Δx 的微分,记作 dy,即

$$dy = A\Delta x.$$

Δy 与 dy 的关系:

$\Delta y=dy+o(\Delta x)$ 或 $\Delta y-dy=o(\Delta x)$,

$\Delta y\approx dy$(误差:$o(\Delta x)$).

2. 可微与可导的关系

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导,且

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

记忆 可微当且仅当可导,可微与可导是等价条件.

若 $f(x)$ 可导,则有微分公式

$$dy = f'(x)dx.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微、可导、连续和有极限这几个概念之间的蕴涵关系如图 2.5.1 所示.

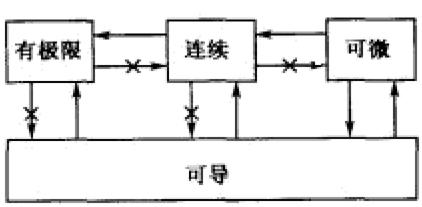


图 2.5.1

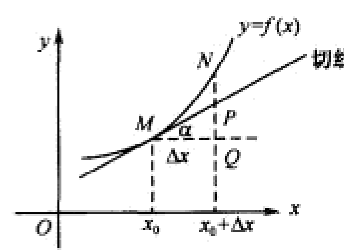


图 2.5.2

3. 微分的几何意义

如图 2.5.2, $dy=f'(x_0)\Delta x=\tan\alpha\cdot\Delta x=QP$. 因此,微分 dy 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线函数 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 相应于 Δx 的增量 QP. 而 Δy 是函数 $y=f(x)$ 相应于 Δx 的增量 QN.

例 2.5.1 (2002 年 2) 设函数 $y=f(u)$ 可导, $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=($ $)$.

(A) -1; (B) 0.1; (C) 1; (D) 0.5.

解 $dy=df(x^2)=2xf'(x^2)dx$. 将 $x=-1$, $dx=\Delta x=-0.1$ 和 $dy=0.1$(Δy 的线性主部)代入微分式中,得 $f'(1)=0.5$. 选(D).

2.5.2 基本初等函数的微分公式

由微分公式 $dy=f'(x)dx$ 可知，一个导数公式 $y'=f'(x)$对应着一个微分公式 $dy=f'(x)dx$. 由基本初等函数的导数公式可得基本初等函数的微分公式(表 2.5.1).

表 2.5.1

导数公式	微分公式
$(C)'=0$	$d(C)=0$
$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$	$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$
$(\sin x)'=\cos x$	$d(\sin x)=\cos x dx$
$(\cos x)'=-\sin x$	$d(\cos x)=-\sin x dx$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d(\tan x)=\sec^2 x dx$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$d(a^x)=a^x\ln a dx$
$(e^x)'=e^x$	$d(e^x)=e^x dx$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$
$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$d(\text{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

2.5.3 微分的运算法则

1. 微分的四则运算法则

微分的四则运算法则类似于导数的四则运算法则(表 2.5.2).

表 2.5.2

微分的四则运算法则	导数的四则运算法则
$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$	$(u\pm v)'=u'\pm v'$
$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$	$(Cu)'=Cu'$
$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$	$(uv)'=u'v+uv'$
$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq0)$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq0)$

2. 微分形式不变性

设 $y=f(u)$. 无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变. 这一性质称为微分形式不变性.

3. 复合函数的微分

设 $y=f[\varphi(x)]$. 利用微分形式不变性，

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f[\varphi(x)]=f'[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

复合函数微分的方法是：从外层向内层逐层微分，直到 $\mathrm{d}x$ 出现为止.

4. 隐函数的微分

利用微分形式不变性，方程 $F(x,y)=0$ 两端同时微分(此时，x 和 y 均视为地位平等的独立变量)，然后解出微分 $\mathrm{d}y=G(x,y)\mathrm{d}x$.

例 2.5.2 (1996 年 3,4)　设方程 $x=y^y$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　先取对数：$\ln x=y\ln y$. 方程两边微分，得

$$\mathrm{d}\ln x=\mathrm{d}(y\ln y),\quad \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln y\mathrm{d}y+y\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}y,$$

解出 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln y+1)}$.

2.5.4　微分在近似计算中的应用

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq0$，则当$|\Delta x|$很小时，有以下近似公式：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

由此公式可得

(1) 函数增量的近似计算公式：$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$；

(2) x_0 附近的点处的函数值的近似计算公式：

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

或

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

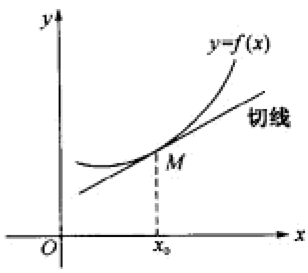


图 2.5.3

说明 此公式的右端 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$是曲线 $y = f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线方程(图 2.5.3).此式表明:我们在点 M 附近可以局部地用切线近似代替曲线.此公式称为函数的局部线性化公式.

特例 取 $x_0 = 0$,得原点附近的函数值的近似计算公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (|x|\text{很小}).$$

常见的一些近似计算公式($|x|$很小时):

$$\sin x \approx x, \quad \arcsin x \approx x, \quad \tan x \approx x, \quad \arctan x \approx x,$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1 + x) \approx x, \quad (1 + x)^\mu \approx 1 + \mu x,$$

$$\sqrt[n]{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{n}, \qquad \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}.$$

第3章 中值定理与导数的应用

3.1 中值定理

3.1.1 罗尔定理

1. 罗尔定理

罗尔定理 设函数 $f(x)$满足：① 在闭区间$[a,b]$上连续；② 在开区间(a,b)内可导；③ $f(a)=f(b)$.则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2. 罗尔定理的几何意义

满足罗尔定理中3个条件的函数 $y=f(x)$ 的曲线在开区间(a,b)内至少有一条水平切线(图3.1.1).

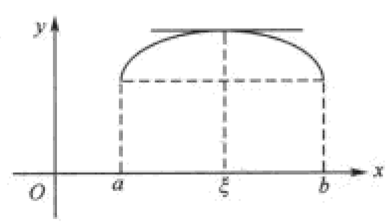


图3.1.1

3. 罗尔定理的特例

设 $f(x)$可导，则由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可推出 $\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=0$(图3.1.2).

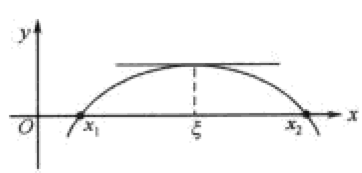


图3.1.2

同理，由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ 可推出 $\exists\,\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f''(\eta)=0$.

记忆 ① 可导函数的每两个零点之间一定有一个驻点；② 二阶可导函数的每两个驻点之间一定有一个拐点.

罗尔定理可用来证明函数不可能有两个零点.设 $f'(x)\neq0(a<x<b)$，则$f(x)$在(a,b)内不可能有两个零点.

记忆 导数不为零，函数不可能有两个零点.

注 这是证明函数只有唯一零点的常用方法.

3.1.2 罗尔定理的应用

(1) 利用罗尔定理证明导数 $f'(x)$有零点(或方程 $f'(x)=0$ 有根).若 $f(x_1)$

$=f(x_2)$且$f(x)$可导,则有 $\xi\in(x_1,x_2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 利用罗尔定理证明二阶导数 $f''(x)$有零点(或方程 $f''(x)=0$ 有根).若 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,则有 $\xi_1\in(x_1,x_2)$, $\xi_2\in(x_2,x_3)$,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.再对 $f'(x)$使用罗尔定理,$\exists\,\eta\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f''(\eta)=0$.

常见形式:若 $f(x)$二阶可导且有 3 个零点:$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$,则有 $\xi_1\in(x_1,x_2)$, $\xi_2\in(x_2,x_3)$,使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,进而有 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$,使得 $f''(\eta)=0$(ξ_1 和 ξ_2 是函数 $f(x)$的驻点,$(\eta,f(\eta))$是曲线 $y=f(x)$的拐点)(图 3.1.3).

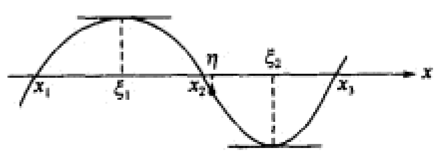


图 3.1.3

(3) 利用罗尔定理证明方程 $f(x)=0$ 最多有一个实根.若 $f(x)$可导且 $f'(x)\neq 0$,则方程 $f(x)=0$ 不可能有两个实根(否则,由罗尔定理,$f'(x)=0$ 至少有一个实根).

例 3.1.1 (1987 年 1,2)　设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上可导,且$0<f(x)<1$, $f'(x)\neq 1$($0<x<1$).证明:在$(0,1)$内有且仅有一个 x,使 $f(x)=x$.

证　令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$在$[0,1]$上连续、可导.因为 $0<f(x)<1$,所以 $F(0)=f(0)-0=f(0)>0$, $F(1)=f(1)-1<0$.由零点定理,$F(x)=0$ 在$(0,1)$内至少有一个根.

假设 $F(x)=0$ 在$(0,1)$内有两个根 x_1 和 x_2($0<x_1<x_2<1$),则 $F(x_1)=F(x_2)=0$.由罗尔定理,存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$,使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$.这与 $f'(x)\neq 1$ 相矛盾.故 $F(x)=0$或 $f(x)=x$ 在$(0,1)$内有且仅有一个根.

3.1.3　拉格朗日中值定理

1. 拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理　设函数 $f(x)$满足:① 在闭区间$[a,b]$上连续;② 在开区间(a,b)内可导.则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad 或\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

2. 拉格朗日中值定理的几何意义

满足拉格朗日中值定理中两个条件的函数 $y=f(x)$的曲线在开区间(a,b)至少有一条切线平行于弦 AB,其中 $A=(a,f(a))$, $B=(b,f(b))$(图 3.1.4).

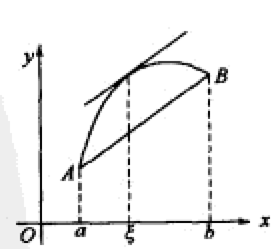


图 3.1.4

3. 有限增量公式

设函数 $f(x)$ 可导，则由拉格朗日中值定理可得

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

其中 $\xi = x+\theta\Delta x\,(0<\theta<1)$ 是 x 和 $x+\Delta x$ 之间的一个数.

例 3.1.2 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

解 以上等式等价于

$$f(a)g(b) - f(b)g(a) = (b-a)[f(a)g'(\xi) - g(a)f'(\xi)],$$

于是作辅助函数 $F(x) = f(a)g(x) - g(a)f(x)$. 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=0$. 由拉格朗日中值定理，在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi),$$

即

$$f(a)g(b) - f(b)g(a) = (b-a)[f(a)g'(\xi) - g(a)f'(\xi)]$$

或

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

4. 拉格朗日中值定理的两个推论

推论 3.1.1 若 $f'(x)=0\ (a<x<b)$，则 $f(x)=C\ (a<x<b)$.

即，在一个区间上导数恒为零的函数必为常数.

注 此结论常用来证明恒等式.

推论 3.1.2 若 $f'(x)=g'(x)\ (a<x<b)$，则 $g(x)=f(x)+C\ (a<x<b)$.

即，在一个区间上导数恒等的两个函数只相差一个常数.

注 此结论在不定积分(原函数)中有用(见 4.1.1 节).

3.1.4 拉格朗日中值定理的应用

1. 利用拉格朗日中值定理证明不等式

利用导数的整体有界性可以证明函数不等式. 有两种情形:

(1) 设 $f'(x)$ 有界: $|f'(x)|\leqslant M$，则有不等式

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|.$$

经典例子 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$ (因为 $|(\sin x)'|=|\cos x|\leqslant 1$),

$|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$ (因为 $|(\cos x)'|=|-\sin x|\leqslant 1$),

$|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$ $\left(因为|(\arctan x)'|=\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant 1\right)$.

(2) 设 $f'(x)$ 有界：$A\leqslant f'(x)\leqslant B$，则有不等式

$$A(y-x)\leqslant f(y)-f(x)\leqslant B(y-x)\qquad(x<y).$$

经典例子 $e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)\qquad(a<b)$,

$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\qquad(0<a<b)$,

$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)\qquad(0<a<b,n>1)$.

2. 利用拉格朗日中值定理证明恒等式

利用拉格朗日中值定理的推论可以证明函数恒等式.

若 $f'(x)=0\ (a<x<b)$，则有恒等式 $f(x)=f(x_0)\ (a<x<b)$，其中 x_0 是区间 (a,b) 中的某一个数.

经典例子 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1)$,

$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

3.1.5 柯西中值定理

1. 柯西中值定理

柯西中值定理 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：① 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；② 在开区间 (a,b) 内可导；③ $g'(x)\neq 0\ (a<x<b)$. 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

2. 柯西中值定理的几何意义

参数曲线 $\begin{cases}x=g(t),\\y=f(t)\end{cases}$ 在区间 (a,b) 内至少有一条切线平行于弦 AB，其中 $A=(g(a),f(a))$，$B=(g(b),f(b))$（图 3.1.5）.

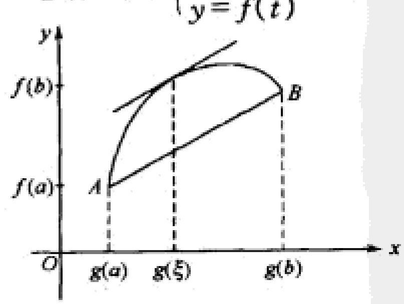


图 3.1.5

例 3.1.3 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$，证明 $f(x)=o[(x-x_0)^n]\ (x\to x_0)$.

证 令 $g(x)=(x-x_0)^n$，由柯西中值定理有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)},$$

其中 x_1 在 x_0 和 x 之间.再由柯西中值定理有

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{g'(x_1)-g'(x_0)}=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}=\lim_{x_2\to x_0}\frac{f''(x_2)}{g''(x_2)},$$

其中 x_2 在 x_0 与 x_1 之间.使用 $n-1$ 次柯西中值定理,得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}&=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}=\cdots=\lim_{x_{n-1}\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})}{g^{(n-1)}(x_{n-1})}\\&=\lim_{x_{n-1}\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x_{n-1}-x_0)}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,\end{aligned}$$

所以 $f(x)=o[(x-x_0)^n]\ (x\to x_0)$.

注 此例也可用洛必达法则求证(见例 3.2.2).

3.1.6 三个中值定理之间的关系

三个中值定理之间的关系如图 3.1.6 所示.

拉格朗日中值定理和柯西中值定理都可以通过构造辅助函数,用罗尔定理予以证明.

(1) 如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的两个条件,则利用倒推法构造的辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

在$[a,b]$上满足罗尔定理的三个条件.于是存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

柯西中值定理:	$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
	$\Downarrow g(x)=x$
拉格朗日中值定理:	$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
	$\Downarrow f(a)=f(b)$
罗尔定理:	$f'(\xi)=0$

图 3.1.6

(2) 如果函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[a,b]$上满足柯西中值定理的三个条件,则利用倒推法构造的辅助函数

$$F(x)=[g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]g(x)$$

在$[a,b]$上满足罗尔定理的三个条件.于是存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

3.1.7 泰勒公式

泰勒公式有两种常见的形式.

1. 带拉格朗日型余项的泰勒公式

泰勒中值定理 1 设函数 $f(x)$在含有点 x_0 的某个开区间(a,b)内有 $n+1$

阶导数，则对任何 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 是 x_0 与 x 之间的某个值）称为拉格朗日型余项.

注　当 $n=0$ 时，由泰勒公式得到拉格朗日中值定理：$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$.

2. *带皮亚诺型余项的泰勒公式*

泰勒中值定理 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数，则在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

其中 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 称为皮亚诺型余项，它是 $x\to x_0$ 时 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小.

[redacted]　两种泰勒公式各有其优点和缺点. 拉格朗日型余项比较具体，便于估计误差，但它对函数的导数要求较高（在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数）. 皮亚诺型余项对函数的导数要求相对较低（仅在 x_0 处有 n 阶导数），但余项不具体，不便于估计误差. 我们应当根据需要和条件选择方便、可行的泰勒公式.

3. *麦克劳林公式*

麦克劳林公式是 $x_0=0$ 时的泰勒公式.

(1) 带拉格朗日型余项的麦克劳林公式. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有 $n+1$ 阶导数，则在该邻域内

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

(2) 带皮亚诺型余项的麦克劳林公式. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数，则在 $x=0$ 的某个邻域内

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

例 3.1.4 设 $f''(x_0)$存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

证 $f(x)$在点 x_0 处的二阶泰勒公式(带皮亚诺型余项)为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2],$$

于是

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2),$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+o(h^2),$$

得

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)=f''(x_0)h^2+o(h^2),$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}$$

$$=f''(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{o(h^2)}{h^2}=f''(x_0)+0=f''(x_0).$$

注 此例也可用洛必达法则求证(见例 3.2.1).

3.1.8 一些重要的麦克劳林公式

以下是一些函数的麦克劳林公式(带皮亚诺型余项)：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n}),$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o(x^{2n}),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n),$$

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$,

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$,

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$.

点评　奇(偶)函数的麦克劳林公式中只有 x 的奇(偶)次幂.

记住一些常用函数的麦克劳林公式的前几项是很重要的.例如:

$e^x=1+x+o(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$,

$\sin x=x+o(x^2)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)$,

$\cos x=1+o(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$,

$\ln(1+x)=x+o(x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,

$\tan x=x+o(x^2)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$.

由这些公式可以得出一些有用的等价无穷小(见 1.7.6 节).

例如,由 $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$,得 $x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^4)$,于是 $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$ $(x\to0)$.又如,由 $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$,得 $\tan x-x=\frac{x^3}{3}+o(x^4)$,于是 $\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}(x\to0)$.这两个麦克劳林公式相减,得

$$\tan x-\sin x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=\frac{x^3}{2}+o(x^4),$$

于是 $\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}(x\to0)$.

例 3.1.5 (2000 年 2)　设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$,求 $f^{(n)}(0)(n\geqslant3)$.

解　由 $\ln(1+x)$的 $n-2$ 阶麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-3}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})$$

得 $f(x)=x^2\ln(1+x)$的 n 阶麦克劳林公式

$$f(x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\cdots+(-1)^{n-3}\frac{x^n}{n-2}+o(x^n),$$

于是$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-3}}{n-2}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$,得 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2}$.

例 3.1.6 (1996 年 2)　设当 $x\to0$ 时,$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小,则(　　).

(A) $a=\frac{1}{2},b=1$;　(B) $a=1,\ b=1$;　(C) $a=-\frac{1}{2},\ b=1$;　(D) $a=-1,\ b=1$.

解 因为 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$,所以 $e^x-\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)=o(x^2)$是比 x^2 高阶的无穷小,得 $a=\frac{1}{2},b=1$.选(A).

3.2 洛必达法则

3.2.1 基本未定式

1. 基本型Ⅰ$\left(\frac{0}{0}\text{型未定式}\right)$

定理 3.2.1 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty).$$

2. 基本型Ⅱ$\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型未定式}\right)$

定理 3.2.2 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或 }\infty).$$

注 以上两种基本型对自变量 x 的其他变化过程(如 $x\to\infty$, $x\to a^+$, $x\to+\infty$等)同样成立.

在条件满足的情况下,洛必达法则可以多次使用:

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0}\text{ 型或}\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}\left(\frac{0}{0}\text{ 型或}\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)=\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

例 3.2.1 设 $f''(x_0)$存在,证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

证

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)\\
&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]-[f'(x_0-h)-f'(x_0)]}{h}\\
&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]\\
&=\frac{1}{2}[f''(x_0)+f''(x_0)]=f''(x_0).
\end{aligned}$$

点评 由于 $f(x)$仅在 x_0 处有二阶导数,因此只能使用一次洛必达法则.此例也可用泰勒公式求证(见例 3.1.4).

例 3.2.2　设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$，证明 $f(x)=o[(x-x_0)^n](x\to x_0)$.

解　由题设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to x_0}f^{(n-2)}(x)=0$，使用洛必达法则 $n-1$ 次，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots2(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

所以 $f(x)=o[(x-x_0)^n](x\to x_0)$.

[illegible]　由于 $f(x)$ 仅在 x_0 处有 n 阶导数，因此只能使用洛必达法则 $n-1$ 次，最后须用定义求出 $f^{(n)}(x_0)$. 此例也可用柯西中值定理求证(见例 3.1.3).

3.2.2　其他未定式

其他类型的未定式须转化为基本型，再用洛必达法则. 其他未定式主要有三种类型.

(1) $\lim f(x)g(x)$ ($\infty\cdot0$ 型). 先用以下两种方式转化为基本型，再用洛必达法则.

$$\lim f(x)g(x)=\lim\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\qquad\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

或

$$\lim f(x)g(x)=\lim\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right).$$

经典例子　$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0\ (\alpha>0)$. 特例 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$.

(2) $\lim[f(x)-g(x)]$ ($\infty-\infty$ 型). 先通分将其转化为基本型，再用洛必达法则.

$$\lim[f(x)-g(x)]\xlongequal{\text{通分}}\lim\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}\qquad\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right).$$

常见形式：若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，则

$$\lim\left[\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{\beta(x)}\right]\ (\infty-\infty\text{ 型})=\lim\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)\beta(x)}\qquad\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right).$$

(3) 幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ (1^∞ 型，0^0 型或 ∞^0 型). 对于幂指函数的这三种未定式，先利用对数恒等式将幂指函数转化为复合函数：

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},$$

于是

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)},$$

其中 $\lim g(x)\ln f(x)$为$\infty \cdot 0$ 型或 $0 \cdot \infty$型未定式.

注 幂指函数的极限见 1.8.4 节. 有关幂指函数极限中的等价无穷小代换见 1.8.5 节.

3.2.3 使用洛必达法则的注意事项

洛必达法则是计算未定式极限的有力工具. 但是使用洛必达法则也应注意结合其他方法以简化计算. 使用洛必达法则应注意以下事项:

(1) 尽可能化简函数, 并分离出有非零极限的因子(不要让它参与洛必达法则);

(2) 尽可能利用等价无穷小代换, 将复杂的函数乘积因子用与之等价的幂函数代换;

(3) 若极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在, 则洛必达法则失效. 此时, 不能断言原极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$也不存在, 应当用其他方法计算极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

一些不能利用洛必达法则计算的未定式. 以下未定式不能用洛必达法则计算:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ $\left(\text{因为}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\text{不存在}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ $\left(\text{因为}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\text{不存在}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ (因为会产生循环现象).

例 3.2.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

解 这是$\infty-\infty$型未定式, 通分化为$\dfrac{0}{0}$型, 再利用等价无穷小代换 $\sin x \sim x$, 得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \quad (\text{分离})\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}\\
&= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

3.3 函数的单调性

3.3.1 函数单调性的判定定理

单调性的判定定理 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导.

(1) 若 $f'(x)>0$ $(a<x<b)$,则函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

(2) 若 $f'(x)<0$ $(a<x<b)$,则函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

记忆 导数为正,函数单增;导数为负,函数单减.

点评 $f'(x)>0$是 $f(x)$单调增加的充分条件,但不是必要条件.因为单调函数可能在个别点处的导数等于零.例如,$f(x)=x^3$ 是单调增加的函数,但 $f'(0)=0$.

若 $f'(x)\geqslant 0$(或 $f'(x)\leqslant 0$)$(a\leqslant x\leqslant b)$且仅有有限多个点 $x\in(a,b)$,使 $f'(x)=0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加(或单调减少).

3.3.2 求函数的单调区间的步骤

函数 $f(x)$的单调区间可按以下步骤求出:

(1) 求出 $f(x)$的所有驻点和不可导点;

(2) 用(1) 中求出的点将 $f(x)$的定义域分成若干子区间;

(3) 讨论导数 $f'(x)$在各子区间的符号,从而判定函数 $f(x)$在各子区间上的单调性.

例 3.3.1 (2000 年 1,2) 设 $f(x)$, $g(x)$是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有( ).

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$; (B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$;

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$; (D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

解 由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ 知

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$$

故$\frac{f(x)}{g(x)}$单调少.于是当 $a<x<b$ 时,$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$,即 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.选(A).

3.3.3 函数的单调性的应用

1. 利用函数的单调性证明不等式

要证明不等式 $f(x)>g(x)$ $(a<x<b)$,只须证明 $F(x)=f(x)-g(x)>0$ $(a<x<b)$.证明函数 $F(x)$是正函数的原理很简单:要么证明$F(x)$在$[a,b]$上单调增加($F'(x)>0$)且 $F(x)$在区间左端点 a 处非负($F(a)\geqslant 0$);要么证明$F(x)$在$[a,b]$上单调减少($F'(x)<0$)且 $F(x)$在区间右端点 b 处非负($F(b)\geqslant 0$).

证明 $F(x)>0$ 的方法如下：

$$\left.\begin{array}{l}F'(x)>0\ (a<x<b)\\ F(a)\geqslant 0\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)>0\qquad (a<x<b)(\text{图 }3.3.1(\text{a})).$$

$$\left.\begin{array}{l}F'(x)<0\ (a<x<b)\\ F(b)\geqslant 0\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)>0\qquad (a<x<b)(\text{图 }3.3.1(\text{b})).$$

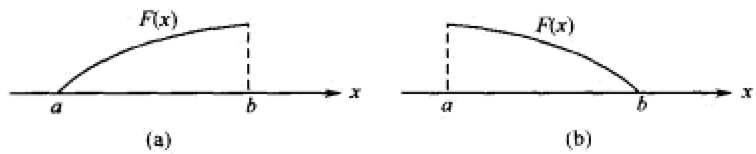


图 3.3.1

当 $F'(x)$的正负不易判定时，需要用高阶导数来证明不等式.

用以下方式证明 $F(x)>0$：

$$\left.\begin{array}{l}F^{(n)}(x)>0\quad (a<x<b)\\ F^{(k)}(a)\geqslant 0\quad (k=1,2,\cdots,n-1)\end{array}\right\}\Rightarrow F(x)>0\qquad (a<x<b).$$

用以下方式证明 $f(x)>g(x)$：

$$\left.\begin{array}{l}f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)\quad (a<x<b)\\ f^{(k)}(a)\geqslant g^{(k)}(a)(k=1,2,\cdots,n-1)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)>g(x)\qquad (a<x<b).$$

例 3.3.2 (1995 年 1,2) 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$或 $f(0)-f(1)$的大小顺序是(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)$在$[0,1]$上单调增加，再由拉格朗日中值定理，有

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)\qquad (0<\xi<1),$$

于是 $f'(1)>f'(\xi)=f(1)-f(0)>f'(0)$. 选(B).

2. 利用单调性讨论函数的零点的个数

利用函数 $f(x)$在一个区间上的单调性可以讨论函数 $f(x)$在该区间上零点(或方程$f(x)=0$的根)的个数.

若 $f(x)$在区间$[a,b]$上单调，则 $f(x)$在$[a,b]$上最多有一个零点(或方程 $f(x)=0$最多有一个根). 如果已知方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个根，则该方程在(a,b)内有唯一的根.

例 3.3.3 (1993 年 2) 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在$(0,+\infty)$内零点个数为(　　).

(A) 3；　　(B) 2；　　(C) 1；　　(D) 0.

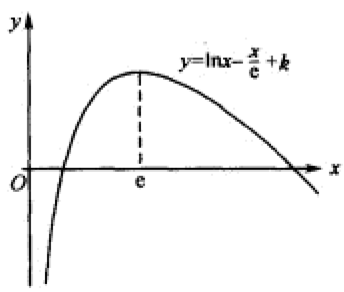


图 3.3.2

解　令 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$，得驻点 $x=e$. 当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 分别在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内单调. 又 $f(e)=k>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{x}{e}+k\right)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{x}{e}+k\right)=-\infty$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内分别有一个零点（图 3.3.2）. 选(B).

● 3.4　函数的极值与最值

3.4.1　极值的定义

定义 3.4.1　若在点 x_0 的某个邻域内，$f(x_0)$ 是最大（最小）的函数值，则 $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的一个极大值（极小值），x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点（极小值点）.

注意　函数的极值点必须是函数定义域的内点，而不能是定义域的边界点.

3.4.2　极值的必要条件

费马定理（极值的必要条件）　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$（图 3.4.1）.

函数 $f(x)$ 的驻点　满足条件 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点.

极值的必要条件可重述为：可导的极值点必为驻点.

注意　(1) 极值点不一定是驻点，因为极值点不一定是可导点. 例如，$x=0$ 是 $y=|x|$ 的极小值点，但不是驻点.

(2) 驻点不一定是极值点. 例如，$y=x^3$ 有驻点 $x=0$，但它不是极值点.

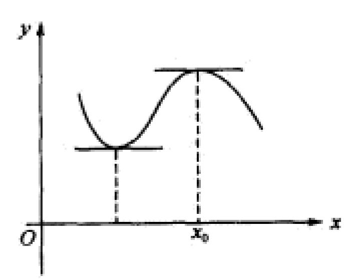


图 3.4.1

函数可能的极值点（可疑点、临界点）有两种：①函数的驻点；②不可导点.

3.4.3　极值的充分条件

1. 极值的一阶充分条件

设 x_0 是 $f(x)$ 的可疑点，则由 $f'(x)$ 在 x_0 两侧的符号可以判定 $f(x_0)$ 是否为

$f(x)$的极值，是极大值还是极小值(表 3.4.1).

表 3.4.1

图　示	说　明
 $f'(x)>0$　x_0　$f'(x)<0$ $\Rightarrow f(x_0)$ 为极大值	导数左正右负(曲线左升右降)，有极大值
 $f'(x)<0$　x_0　$f'(x)>0$ $\Rightarrow f(x_0)$ 为极小值	导数左负右正(曲线左降右升)，有极小值
 $f'(x)>0$　x_0　$f'(x)>0$ $\Rightarrow f(x_0)$ 非极值	导数两侧同号(曲线升降不变)，无极值
 $f'(x)<0$　x_0　$f'(x)<0$ $\Rightarrow f(x_0)$ 非极值	

2. 极值的二阶充分条件

定理 3.4.1 (极值的二阶充分条件)　设 x_0 是 $f(x)$的驻点：$f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)\neq 0$，则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$在 x_0 处取得极小值.

[illegible]　如果 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$单调增加；又 $f'(x_0)=0$，所以 $f'(x)$在 x_0 处左负右正(曲线左降右升)，故 $f(x_0)$为极小值.

也可以用一个具体的简单函数来帮助记忆. 例如，$f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处取得极小值，而 $f''(0)=2>0$. 所以 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$为极小值.

[illegible]　如果 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，则极值的二阶充分条件失效. 此时可利用极值的一阶充分条件或利用以下极值的高阶充分条件来判断 $f(x_0)$是否为极值.

3. 极值的高阶充分条件

定理 3.4.2 (极值的高阶充分条件)　设 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

(1) n 是偶数时，$f(x_0)$是极值：若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 $f(x_0)$是极大值；若

$f^{(n)}(x_0)>0$，则 $f(x_0)$是极小值.

(2) n 是奇数时，$f(x_0)$不是极值.

特例 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，但 $f'''(x_0)\neq 0$，则 $f(x_0)$不是极值.

3.4.4 求函数极值的步骤

函数 $f(x)$的极值可按以下步骤求出：

(1) 确定函数的定义域；

(2) 求出 $f(x)$的一切可能的极值点：驻点和不可导点；

(3) 利用极值的充分条件判断每一个可能的极值点是否为极值点，是极大值点还是极小值点；

(4) 对于极值点，求出极值.

例 3.4.1 设 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内具有连续 4 阶导数，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，且 $f^{(4)}(x_0)<0$，则( ).

(A) $f(x)$在点 x_0 处取得极大值； (B) $f(x)$在点 x_0 处取得极小值；

(C) 点$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点；(D) $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内单调减少.

解 因为函数 $f(x)$在 x_0 处第一个不为零的高阶导数为偶数阶导数($n=4$)，且 $f^{(4)}(x_0)<0$，所以由极值的高阶充分条件，$f(x)$在点 x_0 处取得极大值.选(A).

例 3.4.2 (1987 年 1,2) 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处( ).

(A) $f(x)$的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$； (B) $f(x)$取得极大值；

(C) $f(x)$取得极小值； (D) $f(x)$的导数不存在.

解 因为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$，由极限的局部保号性，在点 $x=a$ 的某个邻域内 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，从而 $f(x)-f(a)<0$.所以 $f(a)$为 $f(x)$的极大值.选(B).

因为$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，所以 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$.因此(A)和(D)都不正确.

3.4.5 函数的最值

1. 闭区间上连续函数的最值

连续函数在闭区间上一定有最大值和最小值.最值既可以在开区间内取得(它也是极值)，也可以在闭区间的两个端点处取得(非极值).因此在闭区间$[a,b]$上连续的函数的可能的最值点是：开区间(a,b)内可能的极值点(驻点和不可导点)以及两个端点 a 和b.

求连续函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值的步骤如下：

(1) 求出 $f(x)$在开区间(a,b)内的可能的极值点(驻点和不可导点): $x_1, x_2, \cdots, x_n$;

(2) 比较函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)$, 其中的最大者(最小者)便是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值(最小值).

2. 单峰函数的最值

若 $f(x)$在(a,b)内连续, 且 $f(x)$在(a,b)内有唯一的极大值点(极小值点) x_0, 则 $f(x_0)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值(最小值)(图 3.4.2).

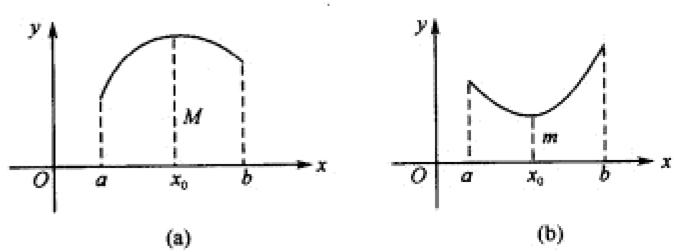


图 3.4.2

3. 利用函数的最值证明不等式

(1) 若 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值 $m \geqslant 0$, 则 $f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$(图 3.4.3(a));

(2) 若 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值 $M \leqslant 0$, 则 $f(x) \leqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$(图 3.4.3(b)).

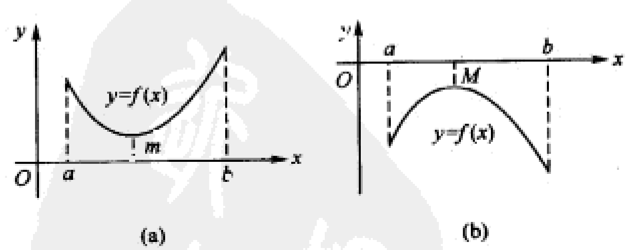


图 3.4.3

例 3.4.3(1993 年 4) 设 p, q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 证明: 对于任意 $x>0$, 有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q} \geqslant x$.

证 令 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$, 则 $f'(x)=x^{p-1}-1$, $f''(x)=(p-1)x^{p-2}$. 令 $f'(x)=0$, 得

驻点 $x=1$. 又 $f''(1)=p-1>0$, 所以 $f(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=0$ 是 $f(x)$在$(0,+\infty)$内唯一的极小值, 它也是 $f(x)$的最小值. 因此, 当 $x>0$ 时, $f(x)\geqslant f(1)=0$, 即$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

● 3.5　曲线的凹凸性与拐点

3.5.1　曲线的凹凸性

1. 曲线凹凸性的定义

定义 3.5.1　设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 若$\forall x_1, x_2\in[a,b]$, 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凹的(图 3.5.1(a)); 若$\forall x_1, x_2\in[a,b]$, 都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凸的(图 3.5.1(b)).

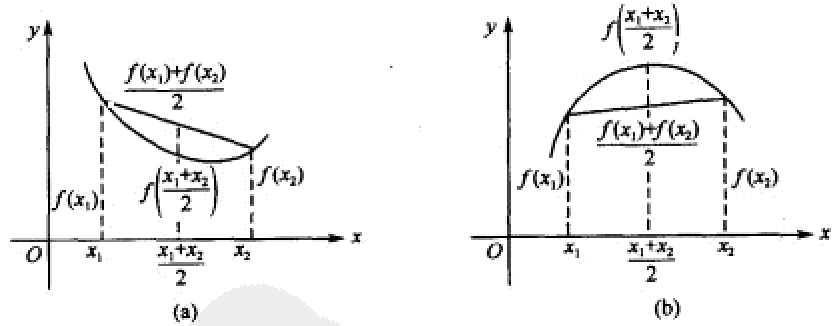


图 3.5.1

注　凹的曲线也称为上凹的或下凸的, 凸的曲线也称为上凸的或下凹的.

2. 曲线凹凸性更一般的定义

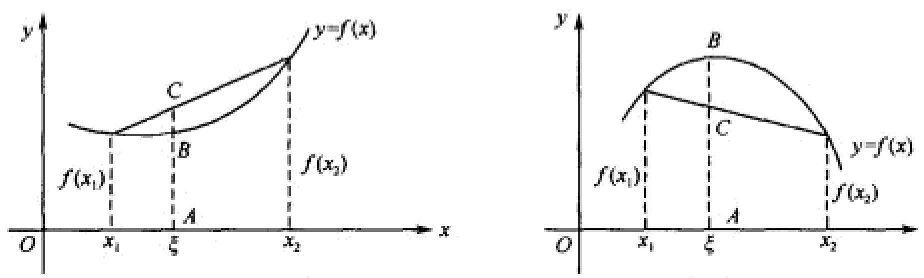
定义 3.5.2　曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凹的(图 3.5.2(a))是指: $\forall x_1, x_2\in[a,b]$, 都有

$$f[(1-\theta)x_1+\theta x_2]<(1-\theta)f(x_1)+\theta f(x_2)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant1).$$

曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凸的(图 3.5.2(b))是指: $\forall x_1, x_2\in[a,b]$, 都有

$$f[(1-\theta)x_1+\theta x_2]>(1-\theta)f(x_1)+\theta f(x_2)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant1),$$

其中 $f[(1-\theta)x_1+\theta x_2]=AB$, $(1-\theta)f(x_1)+\theta f(x_2)=AC$.



$\xi=(1-\theta)x_1+\theta x_2(0\leqslant\theta\leqslant 1)$
(a)

$\xi=(1-\theta)x_1+\theta x_2(0\leqslant\theta\leqslant 1)$
(b)

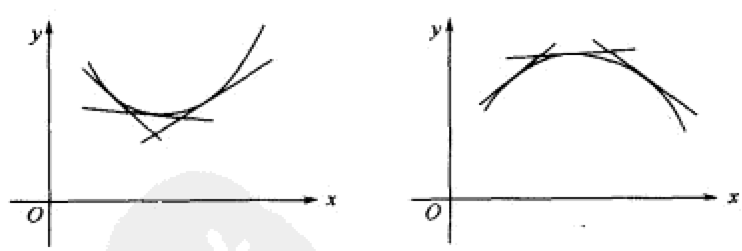
图 3.5.2

注 当 $\theta=\dfrac{1}{2}$时,便得到前面的定义.

3. 凹弧和凸弧的几何特征

凹弧上每一点的切线总是在曲线的下方,并且随着 x 的增加,切线的斜率(导数 $f'(x)$)在增大(这意味着 $f''(x)\geqslant 0$)(图 3.5.3(a)).

凸弧上每一点的切线总是在曲线的上方,并且随着 x 的增加,切线的斜率(导数 $f'(x)$)在减小(这意味着 $f''(x)\leqslant 0$)(图 3.5.3(b)).



(a)　　(b)

图 3.5.3

4. 凹凸性的判别定理

定理 3.5.1 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

(1) 若 $f''(x)>0(a<x<b)$,则曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凹的.

(2) 若 $f''(x)<0(a<x<b)$,则曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凸的.

[illegible] 如果 $f''(x)>0$,则 $f'(x)$(切线斜率)单调增加,因此曲线是凹的. 也可以用一个具体的简单函数来帮助记忆. 例如,曲线 $y=x^2$ 是凹的,而 $y''=2>0$,所以 $f''(x)>0$ 时曲线 $y=f(x)$是凹的.

3.5.2 拐点

1. 拐点的定义

如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 的两侧邻近有相反的凹凸性，则称 $M(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点（图 3.5.4）.

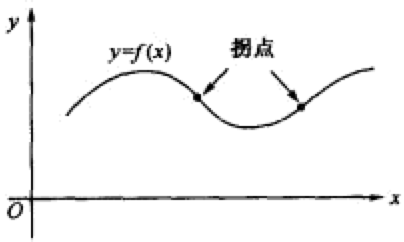


图 3.5.4

2. 拐点的几何特征

(1) 在拐点处，曲线的切线将穿过曲线（图 3.5.5(a)）.

(2) 在拐点处，曲线的曲率为零（曲线在拐点处是不弯曲的）.

(3) 若 x_0 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点，则 $(x_0,f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点（拐点处的水平切线穿过曲线）（图 3.5.5(b)）.

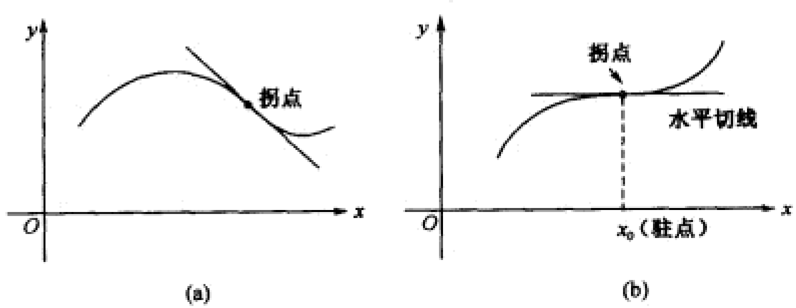


图 3.5.5

3. 拐点的必要条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则必有 $f''(x_0)=0$.

拐点可能出现的点 x_0：① $f''(x_0)=0$；② $f''(x_0)$ 不存在.

4. 拐点的充分条件

(1) 拐点的二阶充分条件. ①若在点 x_0 的两侧邻近，二阶导数 $f''(x)$ 异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；②若在点 x_0 的两侧邻近，二阶导数 $f''(x)$ 同号，则 $(x_0,f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 拐点的三阶充分条件. 若 $f''(x_0)=0$，且 $f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例如，$y=x^3$ 在 $x=0$ 处有 $y''(0)=0$，$y'''(0)=6\neq 0$，故$(0,0)$是曲线 $y=x^3$ 的拐点.

如果 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)=0$，则拐点的三阶充分条件失效.此时可利用拐点的二阶充分条件或利用以下拐点的高阶充分条件来判断$(x_0,f(x_0))$是否为曲线 $y=f(x)$的拐点.

(3) 拐点的高阶充分条件.设 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则①n 是奇数时，$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点；②n 是偶数时，$(x_0,f(x_0))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

[redacted]　第一个不为零的高阶导数的阶数为奇数(偶数)时，曲线有拐点(无拐点).

例如，$y=x^4$ 在 $x=0$ 处有 $y''(0)=y'''(0)=0$，但 $y^{(4)}(0)=24\neq 0$.因为 $n=4$ 为偶数，故$(0,0)$不是曲线 $y=x^4$ 的拐点.

例 3.5.1 (1996 年 4)　设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则(　　).

(A) $f'(x_0)$是 $f'(x)$的极大值；　(B) $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值；

(C) $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值；　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

解　由拐点的三阶充分条件，$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.选(D).由于 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，故 $f'(x_0)$是 $f'(x)$的极小值.由极值的高阶充分条件，$f(x_0)$不是 $f(x)$的极值.因此(A)、(B)、(C)均不正确.

5. 求曲线的凹凸区间和拐点的步骤

求曲线 $y=f(x)$的凹凸区间和拐点的步骤如下：

(1) 确定函数 $f(x)$的定义域；

(2) 求出一切可能出现拐点的点($f''(x)=0$ 或 $f''(x)$不存在的点)：x_1，x_2，…，x_n；

(3) 以上的点将定义域分为若干子区间.讨论二阶导数 $f''(x)$在各子区间上的符号，从而判定曲线 $y=f(x)$在各子区间上的凹凸性.如果在 x_i 两侧的子区间上 $f''(x)$异号，则$(x_i,f(x_i))$为曲线的拐点；如果在 x_i 两侧的子区间上 $f''(x)$同号，则$(x_i,f(x_i))$不是曲线的拐点.

例 3.5.2 (2001 年 2)　曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　).

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

解　$y'=2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)=4(x-1)(x-2)(x-3)$，$y''=4(3x^2-12x+11)$.令 $y''=0$，得 $x_{1,2}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.在这两点的左、右邻域内，$y''$都变号，故曲线有两个拐点(图 3.5.6).选(C).

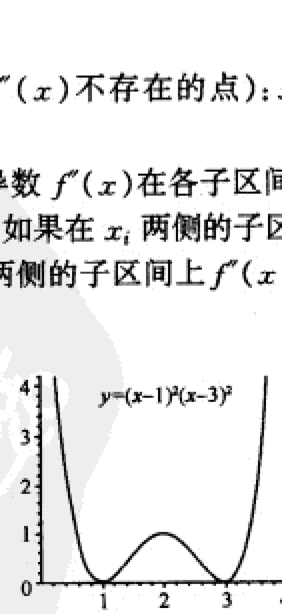


图 3.5.6

3.5.3 利用凹凸性证明不等式

利用曲线凹凸性的定义及凹凸性的判别定理,我们有

(1) $f''(x)>0\ (a<x<b)\Rightarrow f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;

(2) $f''(x)<0\ (a<x<b)\Rightarrow f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

其中 $a<x_1<x_2<b$.

以上结论可以推广到 n 个数的情形.

(1) $f''(x)>0\ (a<x<b)\Rightarrow f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$;

(2) $f''(x)<0\ (a<x<b)\Rightarrow f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

经典例子

(1) $e^{\frac{x+y}{2}}<\dfrac{e^x+e^y}{2}\ (x\neq y)$ (因为 $(e^x)''=e^x>0$);

(2) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n<\dfrac{x^n+y^n}{2}\ (x,y>0,x\neq y,n>1)$(因为 $(x^n)''=n(n-1)x^{n-2}>0$).

● 3.6 渐 近 线

3.6.1 渐近线的定义及类型

定义 3.6.1 当曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 沿曲线无限远离原点时,P 和直线 l 的距离趋于零,则称 l 为曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线(图 3.6.1).

渐近线有三种类型:①水平渐近线;②铅直渐近线;③斜渐近线.

1. 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$,则 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线(图 3.6.2).

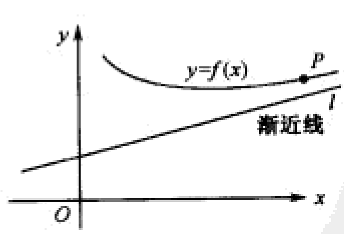


图 3.6.1

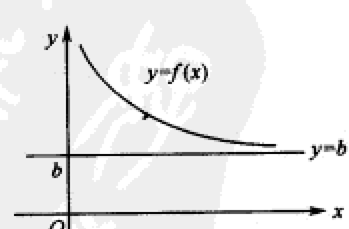


图 3.6.2

注 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 也是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线. 一条曲线最多有两条水平渐近线.

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，故 $y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线. 又如，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，故 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 为曲线 $y=\arctan x$ 的两条水平渐近线.(图 1.1.17(a))

2. 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\infty$），则 $x=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线(图 3.6.3).

注 当 $x=c$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点时，$x=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

例如，曲线 $y=\dfrac{x+2}{x(x-1)}$ 有两条铅直渐近线 $x=0$ 和 $x=1$.

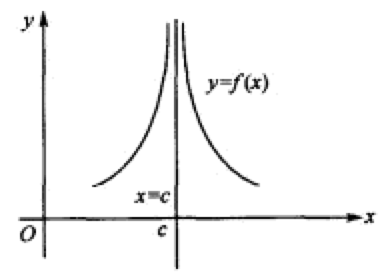


图 3.6.3

3. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线(图 3.6.4).

注 有时需要分 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 加以讨论. 一条曲线最多有两条斜渐近线.

例如，$y=x+\arctan x$ 有两条斜渐近线 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=x-\dfrac{\pi}{2}$(图 3.6.5).

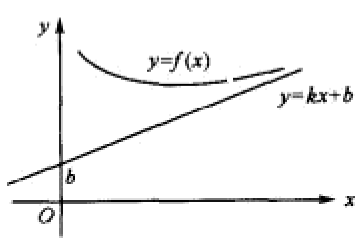


图 3.6.4

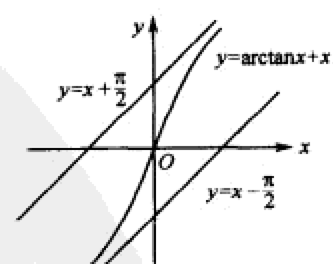


图 3.6.5

3.6.2 求渐近线的步骤

求曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的步骤如下：

(1) 若有点 c，使得 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，则 $x=c$ 为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线；

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, 则 $y=b$ 为 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, 则曲线 $y=f(x)$ 无水平渐近线. 此时, 考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$, 再求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$, 则 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

3.6.3 求渐近线的一些特殊方法

1. 有理函数曲线的渐近线

对于有理函数, 我们有以下重要结论:

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}\text{有}\begin{cases}\text{水平渐近线 } y=0,\ m<n,\\ \text{水平渐近线 } y=\dfrac{a_0}{b_0},\ m=n,\\ \text{斜渐近线 } y=\dfrac{a_0}{b_0}x+\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2},\ m=n+1,\\ \text{无水平或斜渐近线}, m>n+1.\end{cases}$$

此外, 该曲线在函数的无穷间断点 c ($\lim\limits_{x\to c} y=\infty$) 处有铅直渐近线 $x=c$.

注　曲线 $y=\dfrac{a_0x^{n+1}+a_1x^n+\cdots+a_{n+1}}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$ 的斜渐近线的表达式 $y=\dfrac{a_0}{b_0}x+\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}$ 恰好是将这个假分式的分子除以分母的商.

例如, 曲线 $y=\dfrac{x}{x^2+2x-3}=\dfrac{x}{(x+3)(x-1)}$ 有水平渐近线 $y=0$ 和铅直渐近线 $x=-3, x=1$.

例 3.6.1 (2005 年 1)　求曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$, 所以 $x=-\dfrac{1}{2}$ 为曲线的铅直渐近线. 又因为有理函数 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的分子比分母高一次幂, 故曲线有斜渐近线. 用多项式除法, 得 $\dfrac{x^2}{2x+1}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{1}{4}}{2x+1}$. 所以 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ 为斜渐近线.

注　也可以用前面介绍的公式 $y=\dfrac{a_0}{b_0}x+\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}$ 直接写出斜渐近线方程.

2. 参数曲线的渐近线

设有曲线 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$

(1) 若$\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=b$,则 $y=b$ 为曲线的水平渐近线;

(2) 若$\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=c$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=\infty$,则 $x=c$ 为曲线的铅直渐近线;

(3) 若$\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=\infty$,且$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=k\neq 0$, $\lim\limits_{t\to t_0}[y(t)-kx(t)]=b$,则 $y=kx+b$ 为曲线的斜渐近线.

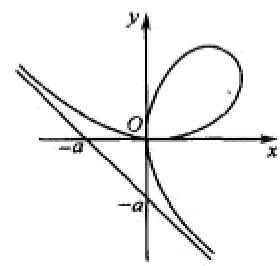


图 3.6.6

例 3.6.2　求曲线 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$的渐近线.

解　只有当 $t\to -1$ 时, $x\to\infty$, $y\to\infty$,故曲线没有水平渐近线和铅直渐近线.

因为 $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to -1}t=-1=k$, $\lim\limits_{t\to -1}(y-kx)=\lim\limits_{t\to -1}\left(\dfrac{3at^2}{1+t^3}+\dfrac{3at}{1+t^3}\right)=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{3a(t^2+t)}{1+t^3}=-a$,所以曲线有斜渐近线 $y=-x-a$((图 3.6.6).

● 3.7 曲　　率

3.7.1 曲率的定义

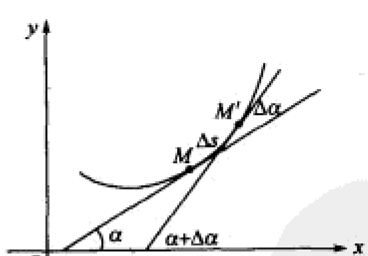


图 3.7.1

曲线上一点处的曲率是曲线在该点处弯曲程度的度量.曲率的定义是

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|,$$

其中 α 是曲线的切线与 x 轴的夹角, s 为弧长(图 3.7.1).

3.7.2 曲率的计算公式(表 3.7.1).

表 3.7.1

曲　线	曲　率
$y=y(x)$	$K=\dfrac{\lvert y''\rvert}{(1+y'^2)^{3/2}}$
参数曲线$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$K=\dfrac{\lvert x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)\rvert}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{3/2}}$
极坐标曲线 $\rho=\rho(\theta)$	$K=\dfrac{\lvert\rho^2(\theta)+2\rho'^2(\theta)-\rho(\theta)\rho''(\theta)\rvert}{[\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)]^{3/2}}$

经典例子　半径为 R 的圆 $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 上各点处的曲率均为 $\dfrac{1}{R}$，这说明：①同一圆上各点处的弯曲程度是一样的；②圆的曲率与圆的半径成反比．半径越小(越大)的圆的曲率越大(越小)．直线 $y = kx + b$ 的曲率处处为零，这表明直线是不弯曲的．

3.7.3　曲率半径与曲率圆

(1) 曲率半径．曲线在曲线上一点 M 处的曲率半径 R 为曲线在点 M 处的曲率 K 的倒数，即 $R = \dfrac{1}{K}$(图 3.7.2)．

(2) 曲率中心．曲线 $y = y(x)$ 在点 M 处的曲率中心 $D(\xi, \eta)$ 的坐标为

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

(3) 曲率圆．曲线 $y = y(x)$ 在点 M 处的曲率圆为

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = R^2,$$

曲率圆与曲线 $y = y(x)$ 在点 M 处相切，并且有相同的曲率和相同的凹向．

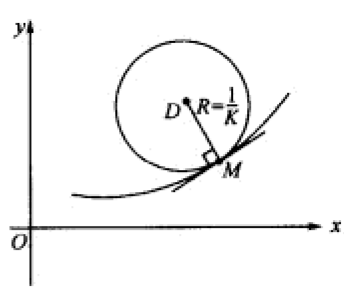


图 3.7.2

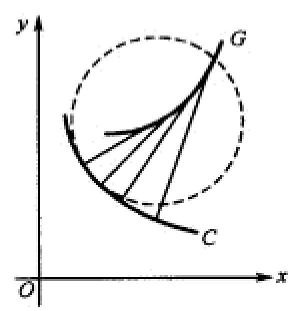


图 3.7.3

(4) 渐屈线(曲率中心的轨迹)．曲线 $C: y = y(x)$ 的渐屈线(图 3.7.3)方程为

$$G: \begin{cases} X = x - y' \dfrac{1 + y'^2}{y''}, \\ Y = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}. \end{cases}$$

如果曲线 G 是曲线 $C: y = y(x)$ 的渐屈线，则曲线 $y = y(x)$ 反过来称为曲线 G 的渐伸线．

第4章 不定积分

4.1 不定积分的概念与性质

4.1.1 原函数的概念与性质

1. *原函数的概念*

定义 4.1.1 如果在区间 I 上,$F'(x)\equiv f(x)$,则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

记忆 若 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数,则 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的原函数.

注 国外的微积分教材也将原函数称为反导数(antiderivative).

2. *原函数的存在定理*

定理 4.1.1 在区间 I 上连续的函数一定有原函数.

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

3. *原函数的性质*

性质 4.1.1 原函数(若存在)不是唯一的.

因为若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则 $F(x)+C$(C 是任意常数)也是 $f(x)$ 的原函数.

性质 4.1.2 一个函数的任意两个原函数只相差一个常数.

如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,则 $F'(x)\equiv G'(x)\equiv f(x)$. 由拉格朗日中值定理的推论,$G(x)\equiv F(x)+C$.

推论 4.1.1 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $F(x)+C$(C 是任意常数)是 $f(x)$ 的全体原函数.

4.1.2 不定积分的概念与性质

1. *不定积分的概念*

定义4.1.2 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,则 $f(x)$ 在 I 上的全

体原函数 $F(x)+C$(C 是任意常数)称为 $f(x)$在 I 上的不定积分,记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

记忆 不定积分就是全体原函数.

推论 4.1.2 若 $F'(x)=f(x)(\forall x\in I)$,则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

2. 不定积分的基本性质

性质 4.1.3 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

性质 4.1.4 $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$.

以上性质表明:积分和微分是互逆的运算.

记忆 性质 4.1.3:先积分,再求导(再微分),函数还原.性质 4.1.4:先求导(先微分),再积分,函数相差一个常数.

3. 不定积分的线性性质

性质 4.1.5 $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

性质 4.1.6 $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

推论 4.1.3(不定积分的线性性质)

$$\begin{aligned}&\int[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)]\mathrm{d}x\\ =\ &k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + k_n\int f_n(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

记忆 线性组合的积分=积分的线性组合.

4.1.3 分段函数的不定积分

设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x<a,\\ h(x), & x\geqslant a,\end{cases}$ 当 $x<a$ 时,原函数 $F(x)=\int g(x)\mathrm{d}x + C = G(x)+C$;当 $x\geqslant a$ 时,原函数 $F(x)=\int h(x)\mathrm{d}x + C_1 = H(x)+C_1$.因为原函数 $F(x)$可导,它在 $x=a$ 处连续.由等式 $F(a-0)=F(a+0)$得到 C_1 与 C 的一个关系:$C_1=\varphi(C)$,于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}G(x)+C, & x<a,\\ H(x)+\varphi(C), & x\geqslant a.\end{cases}$$

注 可以证明导函数没有第一类间断点.因此,如果分段函数 $f(x)$的分段点 $x=a$ 是第一类间断点,则在包含 $x=a$ 的区间 I 上,$f(x)$不存在原函数.

例如，符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0,\\0, x=0,\\1, x>0\end{cases}$ 有第一类间断点 $x=0$. 所以在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$\operatorname{sgn}x$ 没有原函数. 在不包含 $x=0$ 的区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上，$\operatorname{sgn}x$ 分别有原函数 $-x+C$ 和 $x+C$.

例 4.1.1　设 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leqslant 1,\\2x, x>1,\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　先分别在 $(-\infty,1]$ 和 $(1,+\infty)$ 内求原函数 $F(x)$：

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+C, & x\leqslant 1,\\ x^2+C_1, & x>1.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因此原函数 $F(x)$ 在 $x=1$ 处有定义且可导（从而连续），从而由 $F(1-0)=F(1+0)$，得

$$\frac{1}{2}+1+C=1+C_1 \quad 或 \quad C_1=\frac{1}{2}+C,$$

所以

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+C, & x\leqslant 1,\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & x>1.\end{cases}$$

4.2　不定积分公式

4.2.1　基本积分公式

由一个导数公式 $F'(x)=f(x)$ 可以立即得到一个积分公式 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. 因此，由基本导数公式可得到以下基本积分公式（表 4.2.1）.

表 4.2.1

积分公式		对应的导数公式
(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$　（k 是常数）		$(kx)'=k$
特例	$\int 0\mathrm{d}x=C$	$(C)'=0$
	$\int 1\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C$	$(x)'=1$
(2) $\int x^\mu \mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$　$(\mu\neq -1)$		$(x^{\mu+1})'=(\mu+1)x^\mu$
特例	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\dfrac{1}{x}+C$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

续表

积分公式	对应的导数公式
(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\|x\| + C$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
(4) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$	$(\sin x)' = \cos x$
(5) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$	$(\cos x)' = -\sin x$
(6) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
(7) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
(8) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
(9) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
(10) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$(a^x)' = a^x \ln a$
(11) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2.2 其他常用的积分公式

除了基本积分公式,以下积分公式也是常用的,应熟记.

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C \text{ 的推广}\right),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \text{ 的推广}\right),$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C\quad\left(=\operatorname{arsh}\frac{x}{a}+C\right),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C\quad\left(=\operatorname{arch}\frac{x}{a}+C\right),$$

$$\int\ln x\,dx=x(\ln x-1)+C,$$

$$\int xe^x\,dx=e^x(x-1)+C.$$

4.2.3 6个三角函数的平方的积分公式

6个三角函数的平方的积分公式都很容易推导(表4.2.2).

表4.2.2

积分公式	说明
$\int\sin^2x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x+C$ $\int\cos^2x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin2x+C$	利用降幂公式 $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$ $\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$
$\int\tan^2x\,dx=\tan x-x+C$ $\int\cot^2x\,dx=-\cot x-x+C$	利用公式 $\tan^2x=\sec^2x-1$ $\cot^2x=\csc^2x-1$
$\int\sec^2x\,dx=\tan x+C$ $\int\csc^2x\,dx=-\cot x+C$	基本积分公式

注 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的高次幂的积分方法如下：

$\int\sin^{2n+1}x\,dx=-\int\sin^{2n}x\,d\cos x=-\int(1-\cos^2x)^n\,d\cos x$(化为 $\cos x$ 的多项式的积分),

$\int\cos^{2n+1}x\,dx=\int\cos^{2n}x\,d\sin x=\int(1-\sin^2x)^n\,d\sin x$(化为 $\sin x$ 的多项式的积分),

$\int\sin^{2n}x\,dx=\int(\sin^2x)^n\,dx=\int\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^n dx=\cdots$(展开以后再降幂),

$\int\cos^{2n}x\,dx=\int(\cos^2x)^n\,dx=\int\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^n dx=\cdots$(展开以后再降幂).

4.2.4 有关双曲函数的积分公式

$$\int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C, \qquad \int \mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \mathrm{arsh}\,\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{arch}\,\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C \qquad (x > a),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arth}\,\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C \qquad (|x| < a).$$

● 4.3 换元积分法

换元积分法通常分为两类:第一类换元法和第二类换元法.

4.3.1 第一类换元法(凑微分法)

1. 第一类换元法的公式

设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数($\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$),则有以下积分公式:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C = \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

2. 第一类换元法的步骤

第一类换元法积分的步骤如下:

$$\begin{aligned}
\int g(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x && \text{(观察)}\\
&= \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) && \text{(凑微分:}\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(x)\text{)}\\
&= \int f(u)\mathrm{d}u && \text{(换元:令 }\varphi(x) = u\text{)}\\
&= F(u) + C && \text{(积分)}\\
&= F[\varphi(x)] + C && \text{(回代:令 }u = \varphi(x)\text{)}.
\end{aligned}$$

[redacted] 用凑微分法积分的过程就是用链式法则求导(或微分)的逆过程.

4.3.2 第一类换元法常见类型(表 4.3.1)

表 4.3.1

换元法类型	所用的凑微分公式
(1)$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$	$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$
(2)$\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n$	$x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{d}x^n$
(3)$\int f(x^2)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}x^2$	$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$
(4)$\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$
(5)$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\frac{1}{x}$
(6)$\int\frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x$	$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$
(7)$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$	$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$
(8)$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$	$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$
(9)$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$	$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$
(10)$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}f(x)=\ln\lvert f(x)\rvert+C$	$f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$
(11)$\int\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$
(12)$\int\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$
(13)$\int\frac{f(\tan x)}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\sec^2x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$	$\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\sec^2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$
(14)$\int\frac{f(\cot x)}{\sin^2x}\mathrm{d}x=\int f(\cot x)\csc^2x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$	$\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=\csc^2x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cot x$

[redacted] 以上公式(1)～(10)是基本类型,应熟记.其余的类型也比较重要.凑微分法的基本原则是:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)\Rightarrow\int f(u)\mathrm{d}u.$$

[redacted] 有时会遇到比较复杂的积分,一时无从下手.这时不妨将原函数求导(或微分),从中找出凑微分的过程.将求导(或微分)的过程反过来就是凑微分的过程.经过多次这样的训练可以显著提高凑微分的能力.

例如,已知不定积分$\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$ 的结果是$\frac{1}{4}(\ln\tan x)^2+C$.将此原函数微分:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left[\frac{1}{4}(\ln\tan x)^2\right] &= \frac{1}{2}\ln\tan x\,\mathrm{d}\ln\tan x \\
&= \frac{1}{2}\ln\tan x\cdot\frac{1}{\tan x}\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{2}\ln\tan x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \ln\tan x\cdot\frac{1}{2\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\ln\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

将以上微分过程反过来，便得到凑微分的过程：

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}\mathrm{d}\tan x \\
&= \frac{1}{2}\int\ln\tan x\,\mathrm{d}\ln\tan x = \frac{1}{4}(\ln\tan x)^2 + C.
\end{aligned}
$$

例 4.3.1(2004 年 1) 已知 $f'(\mathrm{e}^x) = x\mathrm{e}^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$______.

解 因为 $f'(\mathrm{e}^x) = x\mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\ln\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$，所以 $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$. 于是

$$
f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\ln x\,\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.
$$

由 $f(1)=0$，得 $C=0$，故 $f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

[redacted] 也可以令 $\mathrm{e}^x = t$, $x = \ln t$，得到 $f'(t) = \frac{\ln t}{t}$.

例 4.3.2 (1997 年 2) 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$.

解 解法一.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} &= \int\frac{1}{\sqrt{4-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int\frac{1}{\sqrt{2^2-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}\sqrt{x} \\
&= 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + C.
\end{aligned}
$$

解法二.

$$
\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} = \int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2} + C.
$$

4.3.3 其他凑微分公式

以下凑微分公式并不直观，但在一些积分中有用.

$$
\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\tan\frac{x}{2},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}\cot\frac{x}{2},
$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sqrt{x^2+a^2},$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2},$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\sqrt{a^2-x^2}.$$

例 4.3.3 求不定积分 $\int \frac{x\tan\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \tan\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$

$= -\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right| + C.$

[redacted] 此例的关键是将 $\tan\sqrt{1+x^2}$ 与 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 分离，而 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 刚好凑成 $\sqrt{1+x^2}$ 的微分 $\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$. 最后一步直接利用了积分公式 $\int\tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$.

4.3.4 第二类换元法

1. 第二类换元法的公式

设 $x=\varphi(t)$ 是单调、可导的函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

2. 第二类换元法的步骤

第二类换元法积分的步骤如下：

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t && (\text{换元}: x=\varphi(t))\\ &= F(t)+C && (\text{积分})\\ &= F[\varphi^{-1}(x)]+C && (\text{回代}: t=\varphi^{-1}(x)).\end{aligned}$$

4.3.5 第二类换元法常见类型

第二类换元法主要用来消去被积函数中的根式，主要类型如下.

1. 有理代换(通过有理代换将含有根式的积分化为有理函数的积分)

表 4.3.2 中的 R 为有理函数.

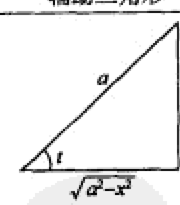
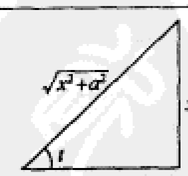
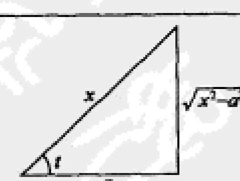
表 4.3.2

积分类型	变量代换	dx 与 dt 的关系
$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$	$\sqrt[n]{ax+b}=t$ $x=\frac{1}{a}(t^n-b)$	$dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt$
$\int R(x,\sqrt[m]{ax+b},$ $\sqrt[n]{ax+b})dx$	$\sqrt[l]{ax+b}=t$ $x=\frac{1}{a}(t^l-b)$ l 是 m 和 n 的最小公倍数	$dx=\frac{l}{a}t^{l-1}dt$
$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ $x=-\frac{b-dt^n}{a-ct^n}$	$dx=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$
$\int R(x,\sqrt{e^x+1})dx$	$\sqrt{e^x+1}=t$ $x=\ln(t^2-1)$	$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

2. 三角代换(通过三角代换化为 $\sin t$ 和 $\cos t$ 的有理函数的积分)

表 4.3.3 中的 R 为有理函数.

表 4.3.3

积分类型	三角代换	辅助三角形
$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ $dx=a\cos t dt$ $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$	
$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ $dx=a\sec^2 t dt$ $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$	
$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ $dx=a\sec t\tan t dt$ $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$	

注　辅助三角形有助于在积分完成后将 t 的原函数还原成 x 的原函数.

经典例子

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin t} \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=a\sec t} \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

3. 双曲代换(利用公式 $\mathrm{ch}^2t-\mathrm{sh}^2t=1$)(表 4.3.4)

表 4.3.4

积分类型	双曲代换	回代公式
$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\mathrm{d}x$	$x=a\mathrm{sh}t(-\infty<t<+\infty)$ $\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$ $\sqrt{x^2+a^2}=a\mathrm{ch}t$	$t=\mathrm{arsh}\frac{x}{a}$ $=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right]$ $=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a$
$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x$	$x=a\mathrm{ch}t(0\leqslant t<+\infty)$ $\mathrm{d}x=a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t$ $\sqrt{x^2-a^2}=a\mathrm{sh}t$	$t=\mathrm{arch}\frac{x}{a}$ $=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]$ $=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a$

经典例子

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \xlongequal{x=a\mathrm{sh}t} \mathrm{arsh}\frac{x}{a}+C=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=a\mathrm{ch}t} \mathrm{arch}\frac{x}{a}+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$$

4. 倒代换$\left(令\ x=\frac{1}{t},\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\int f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$$

倒代换常用来消去被积函数的分母中的因子 x^k. 设 m 和 n 分别是被积函数的分子和分母关于 x 的最高次幂, 则当 $n>m+1$ 时可考虑用倒代换降低分母的次幂.

例 4.3.4　求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$.

解 作倒代换,

$$\text{原式}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{1}{\frac{1}{t^4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{t^4}{t^2+1}dt\quad(\text{分母的次幂已降低})$$

$$=-\int\frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt=-\int(t^2-1)dt-\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t+C=-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

4.4 分部积分法

4.4.1 分部积分法

1. 分部积分公式

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx\quad\text{或}\quad\int udv=uv-\int vdu.$$

注 分部积分法的意义在于将困难的积分$\int udv$转化为容易的积分$\int vdu$.

2. 分部积分的步骤

分部积分的步骤如下:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx&=\int u(x)v'(x)dx\qquad(\text{观察})\\&=\int u(x)dv(x)\qquad(\text{凑微分}:v'(x)dx=dv(x))\\&=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)\qquad(\text{分部})\\&=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx.\end{aligned}$$

3. 分部积分法的两个原则

(1)dv 要容易凑出;

(2)$\int vdu$ 要比$\int udv$ 容易积出.

4.4.2 常见的分部积分法类型

1. 幂函数 x^n 与指数函数或三角函数的乘积的积分(表 4.4.1)

注 (1)其中 n 为正整数.要经过 n 次分部积分才能求出这几个积分.

(2)若 $P(x)$是多项式,则 $\int P(x)e^{ax}dx$ 可以拆分成若干个形如$\int x^n e^{ax}dx$ 的积分之和.

表 4.4.1

积分类型	u,v 的选取
$\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int x^n de^{ax}$	$u = x^n, v = e^{ax}$
$\int x^n \sin ax dx = -\frac{1}{a}\int x^n d\cos ax$	$u = x^n, v = \cos ax$
$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a}\int x^n d\sin ax$	$u = x^n, v = \sin ax$

经典例子

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C(\text{常用公式}),$$

$$\int x\sin x dx = -\int x d\cos x = -\left(x\cos x - \int \cos x dx\right) = \sin x - x\cos x + C,$$

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = \cos x + x\sin x + C.$$

2. 幂函数 x^n 与对数函数或反三角函数的乘积的积分(表 4.4.2)

表 4.4.2

积分类型($n \neq -1$)	u,v 的选取
$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x dx^{n+1}$	$u = \ln x, v = x^{n+1}$
$\int x^n \arcsin x dx = \frac{1}{n+1}\int \arcsin x dx^{n+1}$	$u = \arcsin x, v = x^{n+1}$
$\int x^n \arctan x dx = \frac{1}{n+1}\int \arctan x dx^{n+1}$	$u = \arctan x, v = x^{n+1}$

当 $n = 0$ 时,得到 $\ln x$ 和反三角函数的积分:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x(\ln x - 1) + C(\text{常用公式}),$$

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

经典例子

$$\int x^n \ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int \ln x\mathrm{d}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^{n+1}\mathrm{d}\ln x\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

3. 指数函数与三角函数的乘积的积分(表 4.4.3)

表 4.4.3

积分类型	u, v 的选取
$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \sin bx\mathrm{d}e^{ax}$ 或 $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\cos bx$	$u = \sin bx, v = e^{ax}$ 或 $u = e^{ax}, v = \cos bx$
$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \cos bx\mathrm{d}e^{ax}$ 或 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx$	$u = \cos bx, v = e^{ax}$ 或 $u = e^{ax}, v = \sin bx$

注 以上两个积分都需要经过两次分部积分,再解出所求的积分,其结果是

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

特例 $\int e^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C,$

$$\int e^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

需要两次分部积分,再解出所需积分的经典例子还有

$$\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C,$$

$$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

例 4.4.1(1998 年 2) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x =$ ________.

解

$$原式 = -\int \ln\sin x\mathrm{d}\cot x = -\cot x\cdot\ln\sin x + \int \cot x\mathrm{d}(\ln\sin x)$$

$$= -\cot x \cdot \ln\sin x + \int \cot^2 x\mathrm{d}x = -\cot x \cdot \ln\sin x + \int(\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= -\cot x \cdot \ln\sin x - \cot x - x + C.$$

4.4.3 反函数的不定积分

设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，且$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C.$$

证 由分部积分法，并利用等式 $x = f[f^{-1}(x)]$得

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x &= xf^{-1}(x) - \int x\mathrm{d}f^{-1}(x)\\ &= xf^{-1}(x) - \int f[f^{-1}(x)]\mathrm{d}f^{-1}(x)\\ &= xf^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C.\end{aligned}$$

这个结果可以当作公式使用. 例如，由 $\int\sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$ 得

$$\begin{aligned}\int\arcsin x\mathrm{d}x &= x\arcsin x + \cos(\arcsin x) + C\\ &= x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.\end{aligned}$$

● 4.5 有理函数的积分

4.5.1 有理函数的积分

有理函数都可以化为多项式与部分分式的和的形式. 以下是部分分式的积分公式：

(1) $\int \frac{A}{x - a}\mathrm{d}x = A\ln|x - a| + C$;

(2) $\int \frac{A}{(x - a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1 - n} \cdot \frac{1}{(x - a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1)$;

(3) $\int \frac{A}{x^2 + px + q}\mathrm{d}x \quad (p^2 < 4q)$

$$= \int \frac{A}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x + \frac{p}{2}\right) = \frac{A}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C;$$

(4) $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\mathrm{d}x \quad (p^2 < 4q)$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}(x^2+px+q) + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

(5) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$　($p^2 < 4q, n > 1$ 是整数)

$$= -\frac{M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n},$$

其中 $t = x + \frac{p}{2}$. 最后这个积分可用递推公式求出.

从理论上讲,有理函数的积分总是可以积出来的. 但是,如果一味地墨守成规,往往会遇到很大的困难. 因此,对有理函数的积分,应先分析被积函数的特点,再用灵活和巧妙的方法处理.

例 4.5.1　求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{10})}$.

解　解法一.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{10})} = \int \frac{x^9}{x^{10}(1+x^{10})}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^{10}(1+x^{10})}\mathrm{d}x^{10}$$

$$= \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{1+x^{10}}\right)\mathrm{d}x^{10} = \frac{1}{10}[\ln x^{10} - \ln(1+x^{10})] + C$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{1+x^{10}} + C.$$

解法二.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^{10})} = \int \frac{(1+x^{10})-x^{10}}{x(1+x^{10})}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{x^9}{1+x^{10}}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\ln(1+x^{10}) + C.$$

4.5.2　三角有理函数的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数(注:由于 6 个三角函数都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数,因此 $R(\sin x, \cos x)$ 可以看成是 6 个三角函数的有理函数),则 $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ 总可以通过以下万能代换化为 u 的有理函数的积分.

作万能代换 $\tan\frac{x}{2} = u$,则有以下公式:

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du,$$

于是

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

[redacted] 对三角有理函数的积分也应先分析被积函数的特点，再用灵活和巧妙的方法处理.万能代换是最后的选择.

例 4.5.2(1994 年 1,2) 求$\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$.

解 原式 $= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)}$. 作万能代换. 令 $\tan\frac{x}{2} = u$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}du$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{2\cdot\frac{2u}{1+u^2}\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}+1\right)}\cdot\frac{2}{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{4}\int\frac{1+u^2}{u}du = \frac{1}{4}\left(\ln|u| + \frac{u^2}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

4.5.3 一些"积不出"的不定积分

有一些函数的原函数存在，但不是初等函数，即它们的原函数或不定积分不能写成有限的形式.我们称这些积分是"积不出" 的积分.

常见的"积不出" 的不定积分有:

$\int e^{-x^2}dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$,

$\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x^n}dx$ (n 是正整数)(积分正弦),

$\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x^n}dx$ (n 是正整数)(积分余弦),

$\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ (积分对数),

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(0 < k^2 < 1)$ (第一类椭圆积分),

$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(0 < k^2 < 1)$ (第二类椭圆积分).

以下积分上限函数都不是初等函数：

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,\qquad F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

[redacted]　虽然$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不能写成有限的形式，但它们可以写成无穷级数(幂级数) 的形式.

例 4.5.3　求$\int \frac{\mathrm{e}^x(1+x\ln x)}{x}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^x\ln x\mathrm{d}x\left(\text{其中}\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x\text{“积不出”}\right)$

$$=\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x+\int \ln x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\ln x-\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x+C$$

$$=\mathrm{e}^x\ln x+C.$$

[redacted]　经过两次积分，“积不出” 的积分$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x$ 被抵消了.

第5章　定　积　分

5.1　定积分的概念与性质

5.1.1　定积分的概念

1. 定积分的定义

定义5.1.1　函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$且极限值与区间$[a,b]$的分法及点 ξ_i 的取法无关(图 5.1.1).

若定积分存在,则称函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

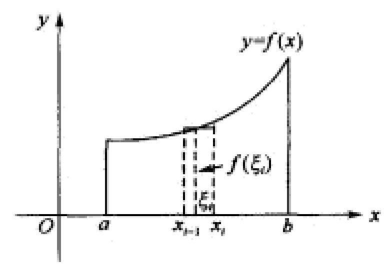


图 5.1.1

2. 函数可积的充分条件

定理 5.1.1(可积函数)

(1)在$[a,b]$上连续的函数是可积的(图 5.1.2(a));

(2)在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点的函数是可积的(图 5.1.2(b));

(3)在$[a,b]$上单调的函数是可积的(图 5.1.2(c)).

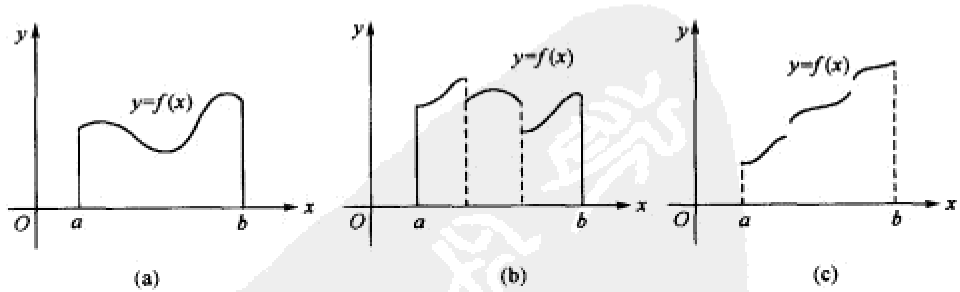


图 5.1.2

3. 函数可积的必要条件

命题 5.1.1　在$[a,b]$上可积的函数在$[a,b]$上必有界.

注　(1)无界函数不可积. 无界函数的定积分称为广义积分(见 5.4.1 节);

(2)有界函数不一定可积.

经典反例　狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$ 在任何区间$[a,b]$上都不可积.

事实上,将区间$[a,b]$ n 等分,并取 ξ_i 为$[x_{i-1},x_i]$中的有理点($i=1,2,\cdots,n$),则 $D(\xi_i)=1$,所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=b-a.$$

另一方面,如果取无理点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$),则 $D(\xi_i)=0$,所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}0\cdot\Delta x_i=0.$$

由于极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与点 ξ_i 的取法有关,故定积分$\int_a^b D(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

4. 定积分与积分变量的记号无关

定积分的值仅与被积函数以及积分区间有关,而与积分变量的记号无关. 积分变量是形式变量,可以任意更换. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

例如,$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\int_0^1 u^2\mathrm{d}u=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}$.

5. 定积分的几何意义

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 和曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积之间有以下关系:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$　　$(f(x)\geqslant 0)$(图 5.1.3(a));

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$　　$(f(x)\leqslant 0)$(图 5.1.3(b));

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3$　　($f(x)$ 有正有负)(图 5.1.3(c)).

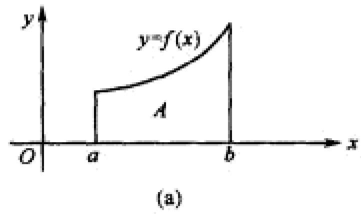


图 5.1.3

利用定积分的几何意义可得下列有用的公式：

$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi a^2$(上半圆的面积)(图 5.1.4)，

$\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2\left(\text{圆面积的}\frac{1}{4}\right)$.

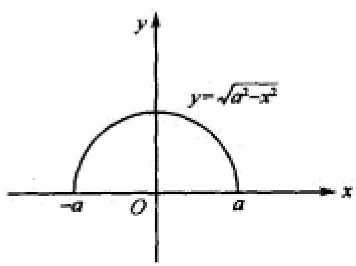


图 5.1.4

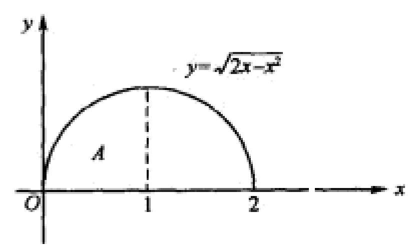


图 5.1.5

例 5.1.1(2000 年 1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx =$ ________.

解 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 是圆心在(1,0)，半径为 1 的上半圆(图 5.1.5). 由定积分的几何意义，原式 $= \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}\left(\text{圆面积的}\frac{1}{4}\right)$.

6. 用定义计算定积分的公式

若 n 等分区间$[a,b]$，取 ξ_i 为小区间的右端点：$\xi_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i\ (i=1,2,\cdots,n)$(图 5.1.6)，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)\frac{b-a}{n}$$

或

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right).$$

特例　$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$.

有时我们需要反过来用定积分计算等式右端的数列极限，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

特例　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

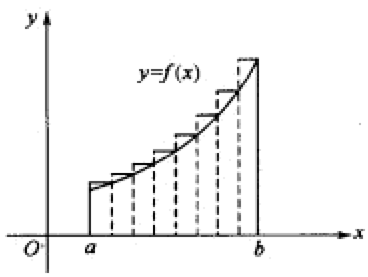


图 5.1.6

例 5.1.2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(n!)-n\ln n]}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)}$$
$$=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

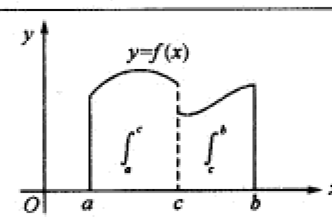
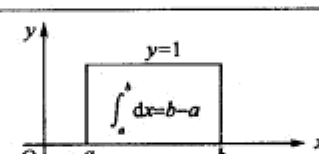
其中 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=-1$(见例 5.4.4).

注　由此得到极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$(见 1.2.3 节和例 1.2.2).

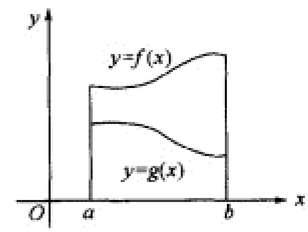
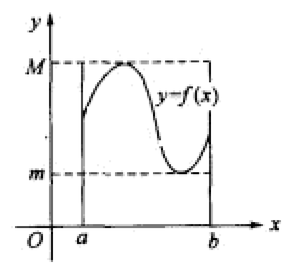
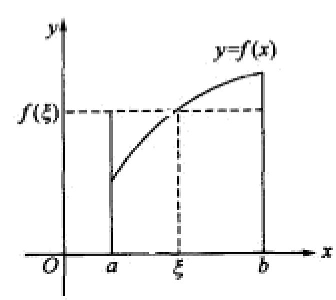
5.1.2　定积分的性质(表 5.1.1)

积分上、下限的两点补充规定：(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$; (2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

表 5.1.1

性　　质	说明及图示
性质 1　$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	定积分的线性性质
性质 2　$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	
性质 3(区间可加性) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$	
性质 4　$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$ **推论**　$\int_a^b k\mathrm{d}x=k(b-a)$	

续表

性　　质	说明及图示
性质 5(定积分的比较) 若 $f(x) \geqslant g(x)(a \leqslant x \leqslant b)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ **推论 1**　若 $f(x) \geqslant 0(a \leqslant x \leqslant b)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ **推论 2**　$\left\|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right\| \leqslant \int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x$	 **注**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(x) \geqslant 0(a \leqslant x \leqslant b)$ 且 $f(x)$ 不恒为零,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$
性质 6(积分的估值定理) 设 m 和 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值,则 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$	
性质 7(积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$	
推广(第一积分中值定理) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	**注**　取 $g(x)=1$,即得积分中值定理

例 5.1.3　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解　由积分中值定理,

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\int_n^{n+p}\mathrm{d}x = p\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}(n\leqslant\xi\leqslant n+p)$$
$$= p\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi} = p\cdot 0 = 0.$$

例 5.1.4(1991 年 1)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x = f(0)$，证明存在 $c\in(0,1)$，使 $f'(c)=0$.

证　由积分中值定理，$\exists\,\xi\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，使 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x = 3f(\xi)\left(1-\frac{2}{3}\right) = f(\xi) = f(0)$. 再由罗尔定理，$\exists\,c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使 $f'(c)=0$.

5.1.3　积分模型一览表

定积分，作为一种特定的和式的极限，可以表示自然科学和社会科学中的很多量(表5.1.2).

表 5.1.2

函　　数	积分模型	说　　明
曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$	曲边梯形的面积 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	高度的积分为面积
速度 $v=v(t)$ $(T_1\leqslant t\leqslant T_2)$	变速直线运动的路程 $s=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t$	速度的积分为路程
力函数 $F=F(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$	变力沿直线所做的功 $W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$	力的积分为功
线密度 $\rho=\rho(x)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$	细棒的质量 $M=\int_0^a \rho(x)\mathrm{d}x$	密度的积分为质量
边际成本 $M_C=M_C(Q)$ ($Q_1\leqslant Q\leqslant Q_2$ 为产量)	总成本 $C=\int_{Q_1}^{Q_2}M_C(Q)\mathrm{d}Q$	边际量的积分为总量
边际收益 $M_R=M_R(Q)$ ($Q_1\leqslant Q\leqslant Q_2$ 为销量)	总收益 $R=\int_{Q_1}^{Q_2}M_R(Q)\mathrm{d}Q$	

5.2 微积分基本公式

5.2.1 积分上限函数及其导数

1. 积分上限函数

设 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则函数

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b)$

称为积分上限函数(图5.2.1).

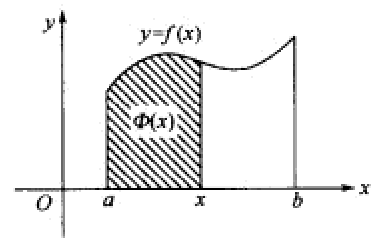


图 5.2.1

2. 积分上限函数的导数

定理 5.2.1 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则积分上限函数 $\Phi(x)$在$[a,b]$上可导,并且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),$$

这说明 $\Phi(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理 5.2.2(原函数存在定理) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数.因此,连续函数一定有原函数.

3. 不定积分与定积分的关系

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.$$

4. 积分上(下)限函数的求导法则

$$\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x) \quad (\text{上限函数的导数}),$$

$$\left[\int_x^a f(t)\mathrm{d}t\right]'=-f(x) \quad (\text{下限函数的导数}),$$

$$\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[\varphi(x)]\varphi'(x) \quad (\text{上限复合函数的导数}).$$

注 $y=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 是$y=\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$ 和$u=\varphi(x)$ 的复合函数,其导数应当

用链式法则计算.

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x),$$

这是最一般的形式.

注意 $\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]' = 0$ （常数的导数为零）.

被积函数含有变量 x 的情形：

$$\left[\int_a^x f(t)g(x)\mathrm{d}t\right]' = \left[g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'$$

$$= g'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + g(x)f(x).$$

注 在积分过程中 $g(x)$视为常数,所以 $g(x)$可以提到积分号前面,即

$$\int_a^x f(t)g(x)\mathrm{d}t = g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

[redacted] 凡与积分变量 t 无关的乘积因子都视为常数,可以提到积分号前面.这个性质常用.

含参变量的积分的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,t)\mathrm{d}t = f[x,\varphi(x)]\varphi'(x) - f[x,\psi(x)]\psi'(x) + \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}t.$$

特例 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}t.$

例 5.2.1 求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为已知连续函数.

解 $\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x x^2 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t = x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t,$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)\mathrm{d}t = 2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

5.2.2 微积分基本公式(牛顿-莱布尼茨公式)

定理 5.2.3 设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

以上公式称为微积分基本公式或牛顿-莱布尼茨公式.它给出了求连续函数的定积分的一般方法,即先求函数 $f(x)$在$[a,b]$上的原函数(或不定积分)$F(x)$,然后将积分上、下限代入原函数作差:$F(b)-F(a)$.

牛顿-莱布尼茨公式也可以写成以下形式:

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]_a^b.$$

这个公式揭示了定积分与不定积分之间的联系.

例如, $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

5.3 定积分的换元积分法和分部积分法

5.3.1 定积分的凑微分法

当对应的不定积分需要用第一类换元法(凑微分法)求原函数时,可用以下定积分的凑微分法计算定积分.

定积分的凑微分法 设 $F(u)$是 $f(u)$的原函数,则有

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)].$$

[illegible] 由于用凑微分法所得到的原函数 $F[\varphi(x)]$仍是 x 的函数,故没有必要引入中间变量 $u=\varphi(x)$,从而避免了积分上(下)限的改变.如果要引入中间变量 $u=\varphi(x)$,则有

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{u=\varphi(x)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

例 5.3.1 设 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$,求$\int_0^1 f'(x)f''(x)\mathrm{d}x$.

解 $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

$$\int_0^1 f'(x)f''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}f'(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x)\right]^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(-2x\mathrm{e}^{-x^2})^2\Big|_0^1 = 2\mathrm{e}^{-2}.$$

5.3.2 定积分的换元法

当对应的不定积分需要用第二类换元法求原函数时,可用以下定积分的换元法计算定积分.

定积分的换元法 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上

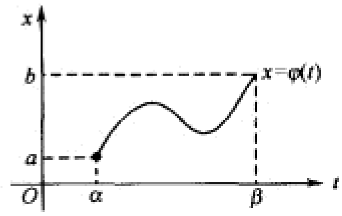


图 5.3.1

具有连续的导数，且其值域 $R_\varphi \subset [a, b]$，其中 $\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$（图 5.3.1），则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意　换元时，应同时换上(下)限.

定积分换元法的注意事项：

(1)不要求 $x = \varphi(t)$ 单调或有反函数；

(2) $x = \varphi(t)$ 的值不能超出积分区间 $[a, b]$ 的范围；

(3)新的积分下限 α 和上限 β 是对应于原积分下限 a 和上限 b 的 t 值(注意：α 不一定小于 β)；

(4)求出 t 的原函数以后，不必回到以 x 为自变量的函数，直接代 β 和 α 到原函数作减法即可．这正是定积分换元法的好处之所在.

如果 $x = \varphi(t)$ 是单调函数(从而有反函数)，则以上公式可以写成(图 5.3.2)

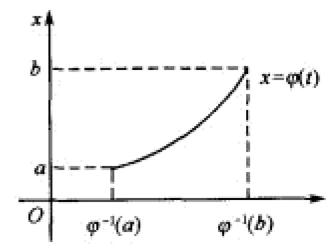


图 5.3.2

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

5.3.3　一些重要的定积分等式

利用变量代换可以建立若干定积分等式(括号中给出了证明等式所作的代换)

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$(代换 $x = a+b-t$).

几何解释：曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(a+b-x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称(图 5.3.3(a)).

点评　公式(1) 是一个重要的等式，下面的一些等式都是它的特例或推论.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]\mathrm{d}x$.

注　公式(1) 的推论.

(3) 若曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称($f(x) = f(a+b-x)$)(图 5.3.3(b))，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

注　公式(2)的推论.

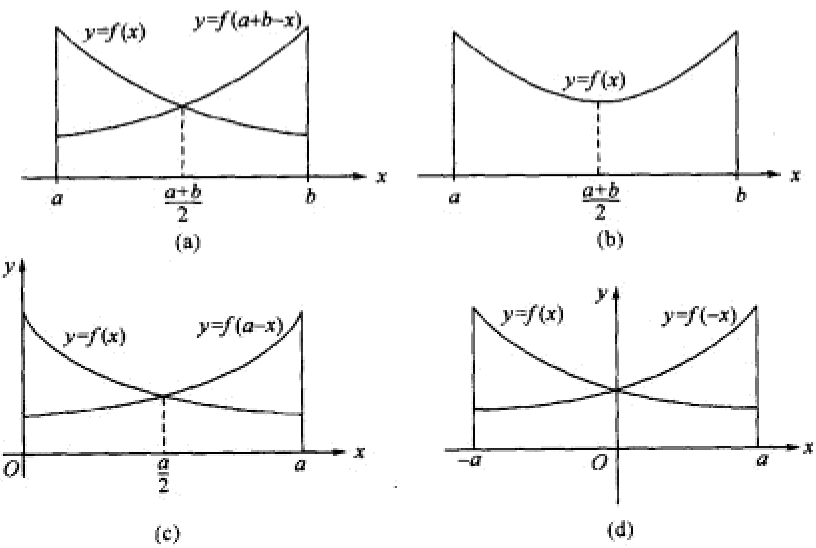


图 5.3.3

(4) $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$(代换 $x = a - t$).

几何解释:曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(a-x)$ 关于直线 $x = \frac{a}{2}$ 对称(图 5.3.3(c)).

注 公式(1) 的特例.

(5)$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$(代换 $x = -t$).

几何解释:曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 关于 y 轴对称(图 5.3.3(d)).

(6)$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x$

注 公式(5) 的推论.

(7)$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{ 是奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}. \end{cases}$ (重要公式)

(8)$\int_{-a}^a g(x)f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^a [g(x) - g(-x)]f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是奇函数}, \\ \int_0^a [g(x) + g(-x)]f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}. \end{cases}$

注 公式(6) 的推论,公式(7) 的推广.

(9) 若 $f(x)$ 为偶函数,且 $g(x) + g(-x) \equiv A$,则

$$\int_{-a}^{a} g(x)f(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

注 公式(8)的推论.

(10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$ （代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$）.

几何解释：曲线 $y = f(\sin x)$ 与 $y = f(\cos x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称.

注 公式(4)的特例.

(11) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ （代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$）.

注 公式(10)的推广形式，这说明在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，被积函数 $f(\sin x, \cos x)$ 中的 $\sin x$ 和 $\cos x$ 可以互换.

(12) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cot x)\mathrm{d}x$.

注 公式(11)的特例.

(13) $\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

几何解释：曲线 $y = f(\sin x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称.

(14) $\int_{0}^{2\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x$.

几何解释：曲线 $y = f(\cos x)$ 关于直线 $x = \pi$ 对称.

注 公式(13)和(14)是公式(3)的推论.

(15) 若曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称（$f(x) = f(a+b-x)$）（图5.3.3(a)），则

$$\int_{a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \quad （代换\ x = a+b-t）.$$

(16) $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$ （代换 $x = \pi - t$）.

注 公式(15)的特例.

(17) $\int_{0}^{1} x^{m}(1-x)^{n}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} (1-x)^{m}x^{n}\mathrm{d}x$ （代换 $x = 1 - t$）.

注 公式(4)的特例

(18) $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_{0}^{1} f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x$ （代换 $x = a + (b-a)t$）.

小窍门 证明定积分等式的一种常用方法：若要证明定积分等式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f[\varphi(x)]\mathrm{d}x$，可将等式右边的积分变量换成 t，得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f[\varphi(t)]\mathrm{d}t$．由此可知应作变量代换 $x=\varphi(t)$．不少定积分等式都可用这种方法证明（如以上的公式(1)，(4)，(5)，(10)，(17)，(18)）．

例 5.3.2 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}$．

解 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}\xlongequal{\text{公式(12)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^a x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^a x}{1+\tan^a x}\mathrm{d}x$，得 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$．所以

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}=\frac{\pi}{4}.$$

例 5.3.3 求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$．

解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\xlongequal{\text{公式(9)}}\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，其中 $|\sin x|$ 为偶函数，$\arctan \mathrm{e}^x+\arctan \mathrm{e}^{-x}\equiv\frac{\pi}{2}$．

重要公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 是正偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{ 是正奇数}(n>1),\end{cases}$$

或

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

点评 这两个公式在定积分计算中常用．

例如，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\mathrm{d}x=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{35}$．

例 5.3.4 证明：$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\quad(x>0)$．

证 证法一．

$$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_x^1\frac{1}{\frac{1}{t^2}+1}\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\int_x^1\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=\int_1^x\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\xlongequal{\frac{1}{t}=u}\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

证法二. $\left(\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$, $\left(\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$, 所以 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+C$(导数恒等的两个函数只相差一个常数).

令 $x=1$, 得 $C=0$, 故 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

例 5.3.5　求 $\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x$.

解　作变换 $x=\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t)^n\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

5.3.4　一些含参数的积分等式

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u\quad(\text{代换 } x^2-t^2=u),$$

$$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\quad(\text{代换 } xt=u),$$

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u\quad(\text{代换 } x-t=u).$$

注　若被积函数含有 $f[\varphi(x,t)]$, 通常作代换 $\varphi(x,t)=u$.

例 5.3.6(1998 年 1,2)　设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ________.

解

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)$$

$$\xlongequal{x^2-t^2=u}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$.

5.3.5　奇(偶)函数及周期函数的原函数与定积分

1. 奇(偶)函数的原函数和不定积分

命题5.3.1　若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数, 从而 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 也是偶函数.

命题5.3.2　若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数，但 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C(C\neq 0)$ 不是奇函数．

[redacted]　奇函数的原函数(不定积分)是偶函数，偶函数的原函数只有一个是奇函数．

2．奇(偶)函数在对称区间上的定积分

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 是奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

此公式的几何解释如图 5.3.4 所示(见 5.3.3 节公式(7))．

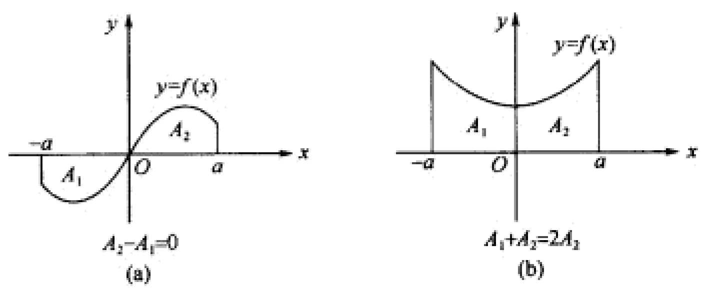


图 5.3.4

例 5.3.7(1999 年 1,2)　设 $f(x)$是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　)．

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数；

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数；

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数；

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数．

解　由前面的结论，应选(A)．(B) 不正确．例如，$f(x)=1$ 是偶函数，但其原函数 $x+1$ 不是奇函数．(C) 不正确．例如，$f(x)=\cos x+1$ 是周期函数，但其原函数 $\sin x+x$ 不是周期函数．(D) 不正确．例如，$f(x)=x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调增加，但其原函数$\frac{x^2}{2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数．

例 5.3.8(2003 年 4)　求$\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$．

解　因为 $|x|\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数，$x\mathrm{e}^{-|x|}$ 为奇函数，故

$$\text{原式}=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+0=-2\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-2(x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=2(1-2\mathrm{e}^{-1}).$$

3．周期函数的原函数

周期函数的原函数不一定是周期函数．

例如,周期函数 $y=\cos x+1$ 的原函数 $y=\sin x+x$ 不是周期函数.

命题5.3.3　设 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 l 为周期的充分必要条件是 $\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=0$(即函数在一个周期长的区间上的定积分为零).

推论5.3.1　周期奇函数的原函数必为周期函数.

注　这是因为,当 $f(x)$ 是以 l 为周期的奇函数时, $\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f(x)\mathrm{d}x=0$(见推论5.3.2).

例如,周期奇函数 $\sin x$ 的原函数 $-\cos x+C$ 为周期函数.因为 $\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0$,所以 $\cos x$ 的原函数 $\sin x+C$ 也为周期函数.

4. 周期函数的定积分

命题5.3.4　设 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数,则

$$\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,$$

即周期函数从任何点处开始积分一个周期的积分值总是不变的(如图5.3.5).

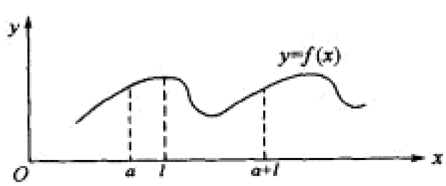


图5.3.5

例如, $\int_0^{2\pi}\sin^5 x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^5 x\mathrm{d}x=0.$

又如,

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\cos^4 x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x$$
$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi,$$

其中 $\int_0^{\pi}\cos^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x$ 是因为曲线 $y=\cos^4 x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

推论5.3.2　周期奇函数在一个周期长的区间上的定积分为零.

证　$\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f(x)\mathrm{d}x=0.$

推论5.3.3　设 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数,则

$$\int_0^{nl}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^l f(x)\mathrm{d}x\quad(n\text{ 是正整数}).$$

例5.3.9(1997年1,2)　设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$,则 $F(x)$(　　　).

(A) 为正常数；　(B) 为负常数；　(C) 恒为零；　(D) 不为常数.

解　因为 $e^{\sin t}\sin t$ 以 2π 为周期，所以 $F(x)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=F(0)$ 为常数. 由分部积分法，

$$F(0)=-\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\cos t=-\left[e^{\sin t}\cos t\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt>0.$$

选(A).

5.3.6 分段函数的定积分

分段函数的定积分采用分段积分，再相加的方法进行计算.

设有分段函数(图 5.3.6)

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & a\leqslant x<c,\\ h(x), & c\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c g(x)dx+\int_c^b h(x)dx.$$

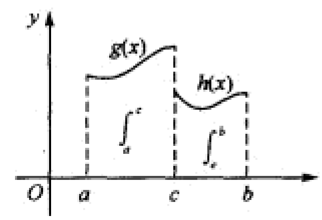


图 5.3.6

例 5.3.10　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$.

解　解法一.

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|dx=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx\right]$$
$$=2(\sqrt{2}-1).$$

解法二. 因为 $1-\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)^2$,

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=2(\sqrt{2}-1).$$

例 5.3.11(1992 年 1)　设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x\leqslant 0,\\ e^{-x}, x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

解

$$\int_1^3 f(x-2)dx\xrightarrow{x-2=u}\int_{-1}^1 f(u)du=\int_{-1}^1 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^0(1+x^2)dx+\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}.$$

5.3.7 定积分的分部积分法

定积分的分部积分公式为

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

因为

$$\int_a^b u\mathrm{d}v + \int_a^b v\mathrm{d}u = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

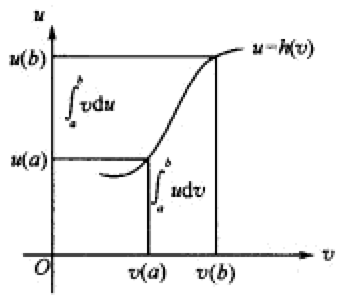


图 5.3.7

图 5.3.7 给出了分部积分公式的几何解释.

例 5.3.12 证明：$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$.

证 证法一. 利用定积分的分部积分公式$\left(\text{把}\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\text{ 视为 }t\text{ 的函数 }g(t)\right)$,

$$\begin{aligned}\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t &= \left[t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]_0^x - \int_0^x t\mathrm{d}\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\\ &= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x xf(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证法二. 作为函数等式，证明等式两端的导数恒等.

$$\left[\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t\right]' = \left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]' = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\left[\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right]' = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

因为方程两端的导数恒等，所以它们最多相差一个常数，得

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t + C.$$

令 $x=0$，得 $C=0$，所以$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}u$.

例 5.3.13(1993 年 2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{2}\left(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

5.3.8 反函数的定积分

命题 5.3.5 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = bf(b) - af(a).$$

此公式可用分部积分法证明，其几何解释如图 5.3.8 所示.

由命题 5.3.4 可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y$$

或

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

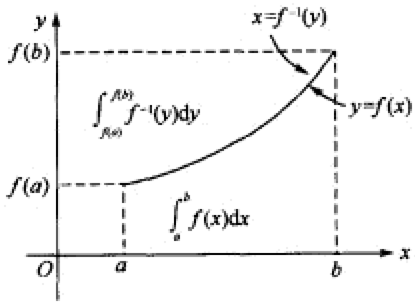


图 5.3.8

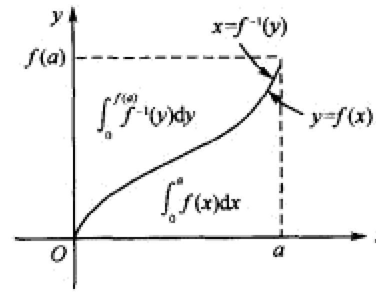


图 5.3.9

特别地，设 $f(x)$在$[0, a]$上单调，$f(0)=0$(图 5.3.9)，则有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = af(a),$$

由此可得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y$$

或

$$\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = af(a) - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

例 5.3.14 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解 如图 5.3.10，$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin y\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{12} + \left[\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

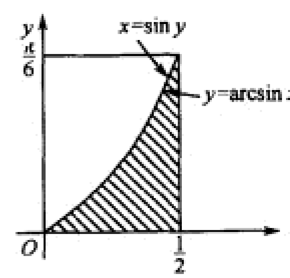


图 5.3.10

[illegible] 有些反函数的积分可以用这种方式转化为直接函数的积分，从而轻松求出.

● 5.4　广义积分

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的积分区间$[a,b]$是有限区间，且被积函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上是有界的. 有时我们需要考虑无穷区间上的积分或无界函数的积分. 为此，需要将定积分作推广，得到无穷限的广义积分和无界函数的广义积分.

5.4.1　无穷限的广义积分的定义

(1)$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(图 5.4.1(a)),

(2)$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(图 5.4.1(b)).

如果等式右端的极限存在，则称广义积分收敛，且极限值就是广义积分的值；如果等式右端的极限不存在，则称广义积分发散.

(3)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$(图 5.4.1(c)),

这个广义积分收敛的条件是等式右端的两个广义积分都收敛.

注　不能用以下公式定义广义积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

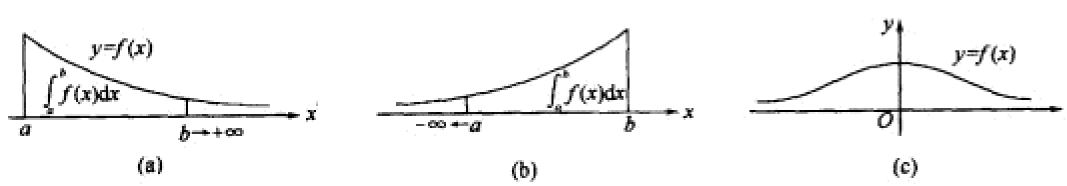


图 5.4.1

5.4.2　几个重要的无穷限的广义积分

p 积分　$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1\end{cases}\quad (a>0).$$

特例　$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

例如，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=1$，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=+\infty$，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=+\infty$（图 5.4.2）.

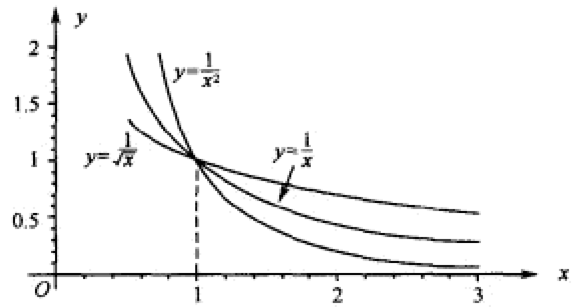


图 5.4.2

推论 $$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\begin{cases}\dfrac{(\ln a)^{1-p}}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1\end{cases}\quad (a>1).$$

特例 $$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$$

证明 $$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_a^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^p}\mathrm{d}\ln x\xlongequal{\ln x=u}\int_{\ln a}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}.$$
再利用 p 积分的结论即可.

其他无穷限的广义积分

$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ （图 5.4.3(a)），

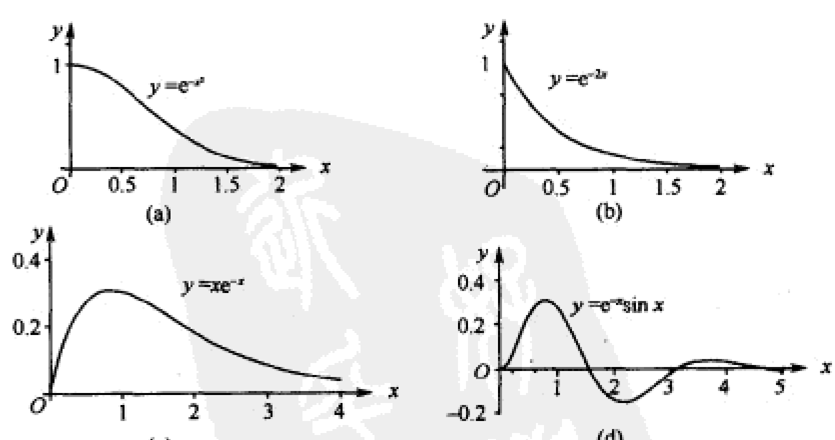


图 5.4.3

$\int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \frac{1}{p} \quad (p>0)$ （图5.4.3(b)），

$\int_0^{+\infty} xe^{-px}dx = \frac{1}{p^2} \quad (p>0)$ （图5.4.3(c)），

$\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin\omega x\,dx = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad (p>0,\omega>0)$ （图5.4.3(d)）.

例5.4.1(1987年4) 下列广义积分收敛的是(　　)

(A)$\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$； (B)$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$； (C)$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$； (D)$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

解 由前面的公式知应选(C)($p=2>1$).

5.4.3 无穷限的广义积分的计算方法

无穷限的广义积分可以用以下两种方法计算(设 $F(x)$是 $f(x)$的原函数).

1. 用定义计算

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(x)]_a^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}F(b) - F(a).$$

2. 直接用牛顿-莱布尼茨公式计算

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

其中 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

例如，$\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}[e^{-2x}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$，其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$.

例5.4.2(1993年2) 求$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx$.

解

$$原式=\int_0^{+\infty}\frac{1+x-1}{(1+x)^3}dx = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]dx$$
$$=\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

5.4.4 无界函数的广义积分(瑕积分)的定义

(1) 设 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$($b$ 称为$f(x)$ 的瑕点)(图5.4.4(a))，则定义广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx \xlongequal{或} \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$$

(2)设 $f(x)$在$(a,b]$上连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$($a$ 称为$f(x)$的瑕点)(图 5.4.4(b)),则定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{或}} \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果等式右端的极限存在,则称广义积分收敛,且极限值就是广义积分的值,如果等式右端的极限不存在,则称广义积分发散.

(3)设 $f(x)$在$[a,c)$和$(c,b]$上连续,且$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$($c$ 为$f(x)$的瑕点,即无穷间断点)(图 5.4.4(c)),则定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个广义积分收敛的条件是等式右端的两个广义积分都收敛.

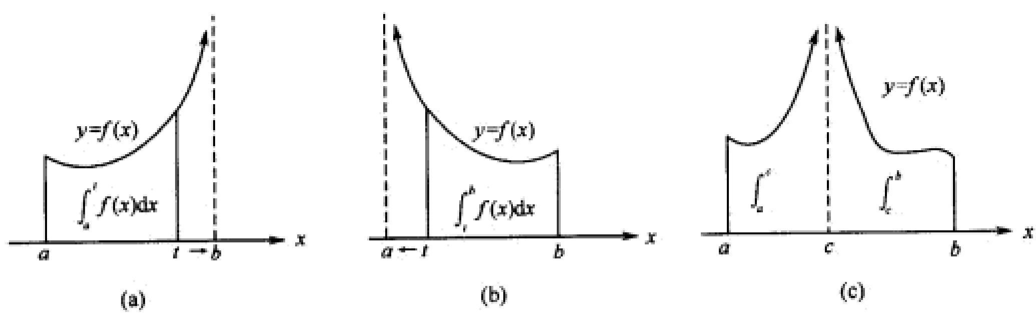


图 5.4.4

5.4.5 几个重要的无界函数的广义积分

q 积分 $$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1, \\ +\infty, & q\geqslant 1 \end{cases} \quad (a<b).$$

特例 $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & q<1, \\ +\infty, & q\geqslant 1. \end{cases}$$

例如,$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$,$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty$,$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = +\infty$(图 5.4.5).

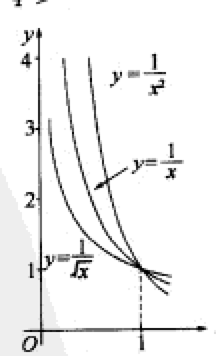


图 5.4.5

5.4.6 无界函数的广义积分的计算方法

无界函数的广义积分可以用以下两种方法计算(设 a

是 $f(x)$ 的瑕点，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数）.

1. 用定义计算

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}[F(x)]_t^b$$
$$= F(b) - \lim_{t\to a^+}F(t).$$

2. 直接用牛顿-莱布尼茨公式计算

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

其中 $F(a) = \lim\limits_{x\to a^+}F(x)$.

当原函数 $F(x)$ 在瑕点处连续时，这种方法尤为方便.

例如，$\int_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$（$a$ 为瑕点）$= \left[\arcsin\dfrac{x}{a}\right]_0^a = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$，其中原函数 $\arcsin\dfrac{x}{a}$ 在瑕点 a 处连续.

例 5.4.3 证明：$\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x = (-1)^n n!$（$n$ 是正整数）.

证

$$I_n = \int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}(\ln x)^n$$
$$= 0 - n\int_0^1(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x = -nI_{n-1},$$

其中利用了极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^n = 0$. 于是

$$I_n = -nI_{n-1} = (-1)^2 n(n-1)I_{n-2} = \cdots = (-1)^n n!\,I_0 = (-1)^n n!,$$

其中 $I_0 = \int_0^1\mathrm{d}x = 1$.

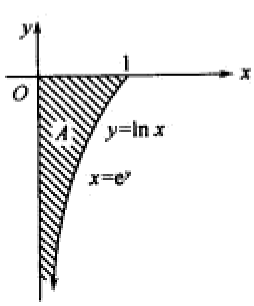


图 5.4.6

例 5.4.4 计算 $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

解 这是无界函数的广义积分，$x=0$ 是瑕点（图 5.4.6）.

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x = [x(\ln x - 1)]_0^1 = -1 - 0 = -1,$$

其中利用了极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x = 0$.

另解 利用定积分的几何意义（图 5.4.6）.

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x = -A = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^y\mathrm{d}y = -[\mathrm{e}^y]_{-\infty}^0 = -(1-0) = -1.$$

此例说明两种类型的广义积分有时可以相互转化.

5.4.7 Γ函数

1.Γ函数的定义

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\,(s>0)$,其图形如图 5.4.7 所示.

Γ函数的另一形式(令 $x=u^2$):

$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2s-1}du\quad(s>0)$.

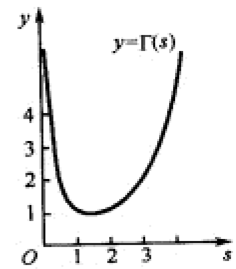


图 5.4.7

2.Γ函数的性质

(1)$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ (递推公式);

(2)$\Gamma(n+1)=n!$ (阶乘公式);

(3)$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

(4)$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$;

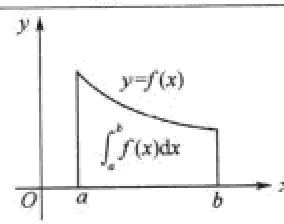
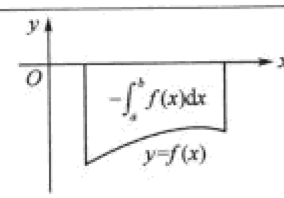
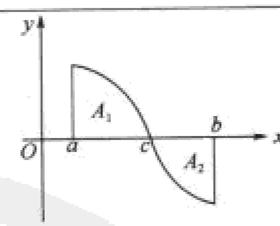
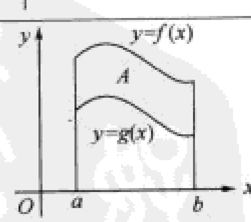
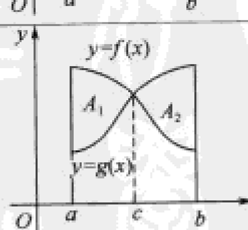
(5)$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

第 6 章　定积分的应用

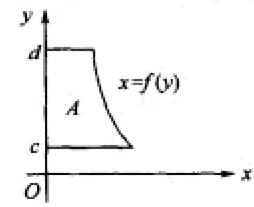
6.1　平面图形的面积

6.1.1　直角坐标情形(表 6.1.1)

表 6.1.1

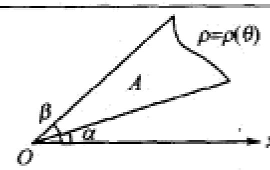
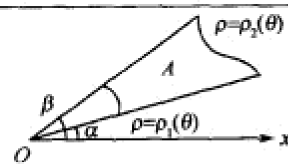
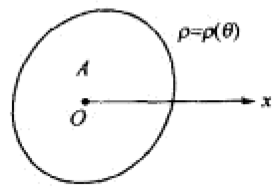
面积公式	图　　形	说　　明
$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $(f(x)\geqslant 0, a\leqslant x\leqslant b)$		曲线下方的面积
$A=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $(f(x)\leqslant 0, a\leqslant x\leqslant b)$		曲线与 x 轴之间的面积
$A=\int_a^b \lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x$ $A=A_1+A_2$ $\quad=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$		曲线与 x 轴之间的面积
$A=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert\mathrm{d}x$ $(f(x)\geqslant g(x), a\leqslant x\leqslant b)$		函数"大减小", 积分"左到右"
$A=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert\mathrm{d}x$ $A=A_1+A_2$ $\quad=\int_a^c [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ $\quad+\int_c^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$		两曲线之间的面积 分段"大减小",积分再相加

续表

面积公式	图　　形	说　　明
$A=\int_c^d f(y)\mathrm{d}y$ $(f(y)\geqslant 0, c\leqslant y\leqslant d)$		曲线与 y 轴之间的面积

6.1.2　极坐标情形(表 6.1.2)

表 6.1.2

面积公式	图　　形	说　　明
$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$		曲边扇形的面积
$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$		两个曲边扇形之差
$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$		极点在闭曲线之内

6.1.3　参数曲线情形

设曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0, a\leqslant x\leqslant b)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (t_1\leqslant t\leqslant t_2),$$

则曲线与 x 轴所围成的曲边梯形的面积(图 6.1.1)为

$$A=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$$

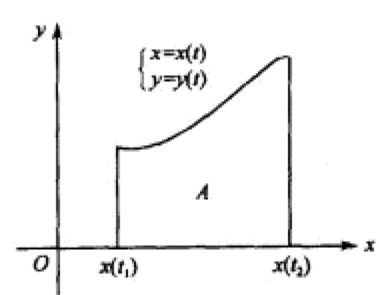


图 6.1.1

例 6.1.1(1995 年 2)　曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴所围成图形的面积可表示为(　　).

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$;

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$;

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$;

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

解　曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴所围图形如图 6.1.2 所示,所以

$$S=S_1+S_2=\int_0^1(-y)\mathrm{d}x+\int_1^2 y\mathrm{d}x.$$

选(C).

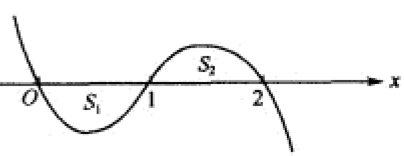


图 6.1.2

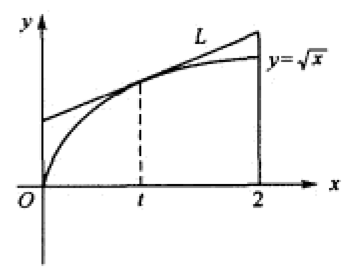


图 6.1.3

例 6.1.2(1992 年 2)　求曲线 $y=\sqrt{x}$的一条切线 l,使该曲线与切线 l 及直线 $x=0$, $x=2$ 所围成的图形面积最小.

解　设切点为$(t,\sqrt{t})$(图 6.1.3),则切线方程为 $y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$或 $y=\frac{x}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}$.四条曲线所围的图形面积为

$$S(t)=\int_0^2\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

令 $S'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}=0$,得驻点 $t=1$.当 $0<t<1$ 时,$S'(t)<0$;当 $1<t<2$ 时,$S'(t)>0$.故 $t=1$ 时,$S(t)$取得最小值,此时切线的方程为 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

(1)由于曲线 $y=\sqrt{x}(0\leqslant x\leqslant 2)$下方的图形面积是固定的,因此可以求切线 l, $x=0$, $x=2$ 和 $y=0$ 所围成的梯形的面积的最小值.

(2)注意到切点的横坐标 $x=1$ 刚好是区间$[0,2]$的中点.这不是偶然的.可以证明,在一定条件限制下,这类问题的切点总是位于区间的中点.

6.2 体　　积

6.2.1 平行截面面积为已知的立体的体积

已知立体的平行截面面积 $A(x)(a\leqslant x\leqslant b)$(图 6.2.1),则立体的体积.

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x\quad(\text{切片法}).$$

体积元素 $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$.

[redacted] 截面面积的积分为体积.

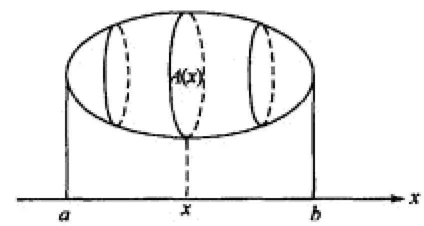


图 6.2.1

6.2.2 旋转体的体积

1. 圆片法

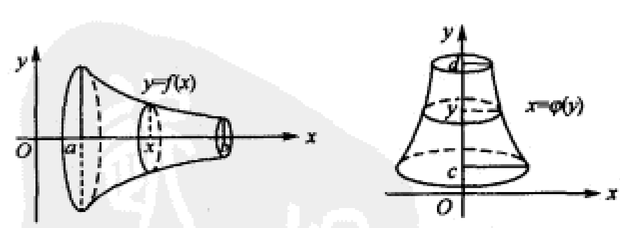
曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$与 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积(图 6.2.2(a))

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\qquad(\text{圆片法}).$$

体积元素 $\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 形如一个圆片,其中 $f(x)$是旋转半径.

同理,曲线 $x=\varphi(y)(c\leqslant y\leqslant d)$与 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积(图 6.2.2(b))

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y\qquad(\text{圆片法}).$$



(a)　　(b)

图 6.2.2

推广形式:曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$与直线 $y=m$ 所围成的曲边梯形绕直线 $y=m$ 旋转一周而成的旋转体的体积(图 6.2.3)

$$V=\pi\int_a^b[f(x)-m]^2\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)-m$ 为旋转半径.

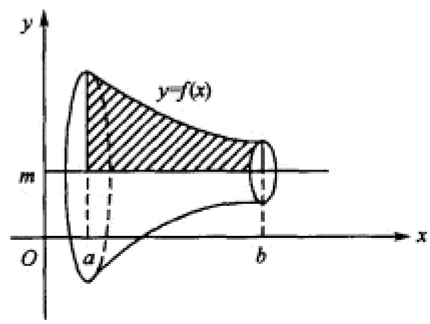


图 6.2.3

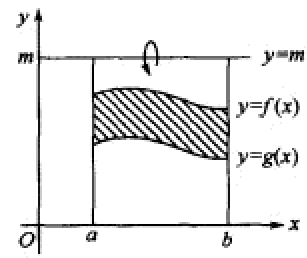


图 6.2.4

例 6.2.1(1996 年 2) 设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,且 $g(x)<f(x)<m$(m 为常数),则曲线 $y=g(x)$, $y=f(x)$, $x=a$ 及$x=b$ 所围平面图形绕直线$y=m$ 旋转而成的旋转体体积可表为( ).

(A)$\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(B)$\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(C)$\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(D)$\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

解 如图 6.2.4 所示:

$$\begin{aligned}V=V_1-V_2&=\int_a^b\pi[m-g(x)]^2\mathrm{d}x-\int_a^b\pi[m-f(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

选(B).

2. 垫圈法

设 $f(x)>g(x)\geqslant0(a\leqslant x\leqslant b)$,则曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$之间的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积(图 6.2.5)

$$V_x=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x \qquad (垫圈法).$$

体积元素 $\mathrm{d}V=\pi[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x$ 形如一个垫圈.

3. 柱壳法

由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0, 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积(图 6.2.6)

$$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \qquad (\text{柱壳法}).$$

体积元素 $\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$ 形如一个柱壳(由图 6.2.6 中矩形条绕 y 轴旋转而成).

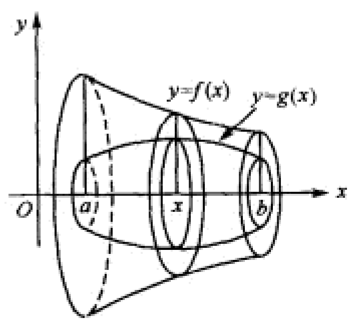


图 6.2.5

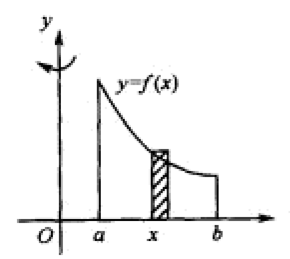


图 6.2.6

更一般地,设 $f(x)>g(x)(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$,则曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)(0\leqslant a\leqslant x\leqslant b)$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$$V_y = 2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x \qquad (\text{柱壳法}).$$

例 6.2.2 求曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 和 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积(图 6.2.7).

解 利用圆片法求 V_x:

$$V_x=\pi\int_0^\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}.$$

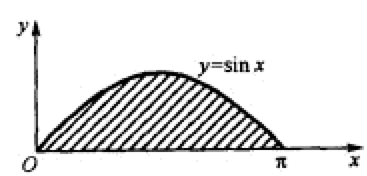


图 6.2.7

利用柱壳法求 V_y:

$$V_y=2\pi\int_0^\pi xy\mathrm{d}x=2\pi\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=2\pi[-x\cos x+\sin x]_0^\pi=2\pi^2.$$

● 6.3 平面曲线的弧长 旋转曲面的面积

6.3.1 弧微分公式

设 s 为弧长, $\mathrm{d}s$ 为弧微分(图 6.3.1),则有 $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$. 弧微分公式

如表 6.3.1 所示.

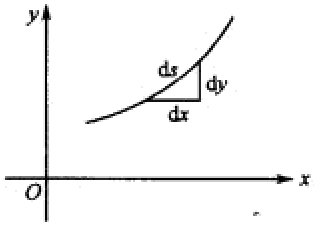


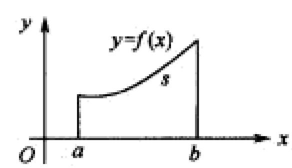
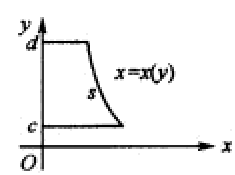
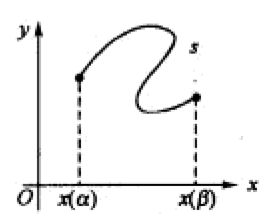
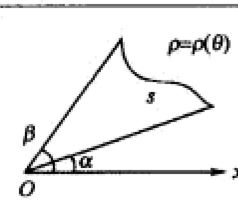
图 6.3.1

表 6.3.1

曲线方程	弧 微 分
$y=y(x)$	$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$
$x=x(y)$	$ds=\sqrt{1+x'^2(y)}dy$
$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$(参数曲线)	$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$
$\rho=\rho(\theta)$(极坐标曲线)	$ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$

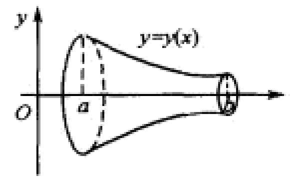
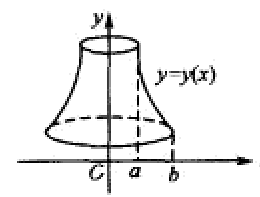
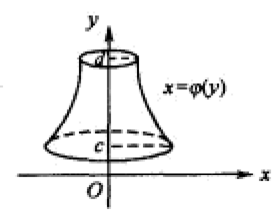
6.3.2 平面曲线的弧长(表 6.3.2)

表 6.3.2

曲线方程	弧长公式	图 形
$y=y(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$	$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx$	
$x=x(y)\quad(c\leqslant y\leqslant d)$	$s=\int_c^d\sqrt{1+x'^2(y)}dy$	
参数曲线 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$	$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$	
极坐标曲线 $\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$	$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$	

6.3.3 旋转曲面的面积(表 6.3.3)

表 6.3.3

曲线方程	旋转轴	旋转曲面的面积	图 形
$y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$	x 轴	$A_x=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$	
	y 轴	$A_y=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$	
$x=\varphi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$	y 轴	$A_y=2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\mathrm{d}y$	
参数曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$	x 轴	$A_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$	
极坐标曲线 $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$	x 轴	$A_x=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$	

旋转曲面的面积是旋转半径与弧微分的乘积的积分，再乘以 2π，即 $A_x=2\pi\int_a^b y\mathrm{d}s$，$A_y=2\pi\int_c^d x\mathrm{d}s$.

例 6.3.1(1998 年 2) 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的表面积.

解 如图 6.3.2，设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-1})$，则切线方程为

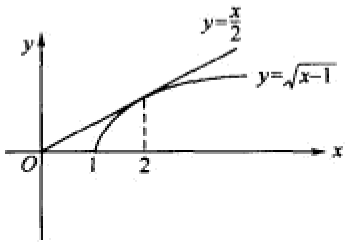


图 6.3.2

$$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0).\ X$$

将 $x=0, y=0$ 代入，得 $x_0=2$，切线方程为 $y=\frac{x}{2}$.

切线 $y=\frac{x}{2}(0\leqslant x\leqslant 2)$绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面(圆锥面)的面积

$$S_1=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi.$$

曲线 $y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 2)$绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的面积

$$S_2=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

所求旋转体的表面积 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

● 6.4 定积分在物理学中的应用

6.4.1 变力沿直线所做的功

设力函数为 $F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则物体沿 x 轴从点 a 移动到点 b 时，变力 $F(x)$ 所做的功(图 6.4.1)

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

功的元素 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$.

[redacted] 力关于路程的定积分就是功.

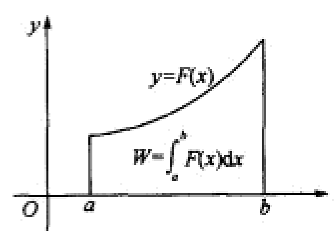


图 6.4.1

6.4.2 抽水做功

将图 6.4.2 中容器中的水全部抽出所做的功为

$$W=\mu g\int_a^b xA(x)\mathrm{d}x,$$

其中 μ 为水的密度，g 为重力加速度.

功的元素 $\mathrm{d}W=\mu gxA(x)\mathrm{d}x$ 为位于 x 处厚度为 $\mathrm{d}x$、水平截面面积为 $A(x)$ 的一层水被抽出(路程为 x)所做的功.

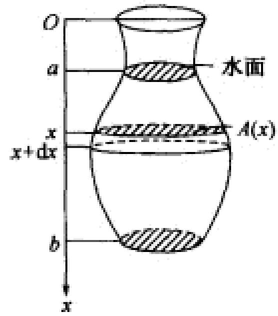


图 6.4.2

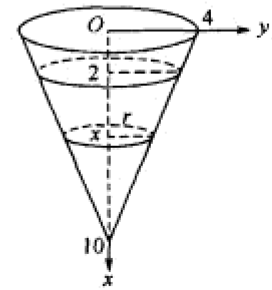


图 6.4.3

抽水做功的特点是：力不变(重力)，路程在变. 求解这种问题的关键是确定 x 处的水平截面面积 $A(x)$，其余的量都是固定的.

例 6.4.1 有一倒圆锥形容器，高 10 m，上底半径 4 m，水面高 8 m. 求将容器中的水全部从容器顶部抽出所做的功(水的密度为 1000 kg/m^3).

解 如图 6.4.3 建立坐标系. 在 x 处的水平截面的半径 r 满足

$$\frac{r}{10-x}=\frac{4}{10} \quad 或 \quad r=\frac{2}{5}(10-x).$$

截面面积 $A(x)=\pi r^2=\pi\cdot\left[\frac{2}{5}(10-x)\right]^2=\frac{4}{25}\pi(10-x)^2.$

所以将全部水抽出所做的功

$$\begin{aligned} W &= 1000\ g\int_2^{10} xA(x)\mathrm{d}x = 1000\ g\int_2^{10} x\cdot\frac{4}{25}\pi(10-x)^2\mathrm{d}x \\ &= 160\ g\pi\int_2^{10} x(10-x)^2\mathrm{d}x = 160\cdot 9.8\pi\cdot\frac{2048}{3}\approx 3361(\mathrm{kJ}). \end{aligned}$$

6.4.3 水压力

浸没在水中的垂直平板 $ABCD$(图 6.4.4)的一侧受到的水压力为

$$P=\mu g\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

其中 μ 为水的密度，g 是重力加速度.

压力元素 $\mathrm{d}P=\mu gx[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 是图中矩形条所受到的压力. x 表示水深，$f(x)-g(x)$ 是矩形条的宽度，$\mathrm{d}x$ 是矩形条的高度.

水压力问题的特点是：压强随水的深度而改变. 求解这种问题的关键是确定水深 x 处的平板的宽度 $f(x)-g(x)$.

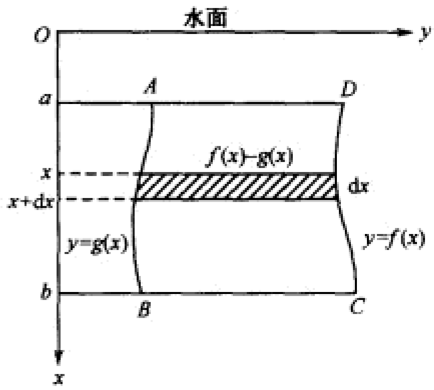


图 6.4.4

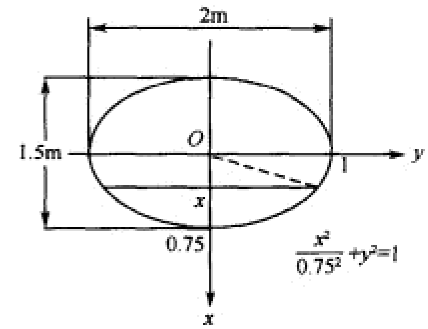


图 6.4.5

例 6.4.2　洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体，椭圆的尺寸如图 6.4.5 所示. 当水箱装满水时，计算水箱的一个端面所受的压力.

解　如图 6.4.5 建立坐标系. 在 x 处椭圆的宽度为 $2y=2\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}$, x 处的水深为 $x+0.75$. 所以椭圆面所受到的压力

$$\begin{aligned}P&=9.8\int_{-0.75}^{0.75}(x+0.75)\cdot 2\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}\mathrm{d}x\\&=2\times 9.8\left[\int_{-0.75}^{0.75}x\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}\mathrm{d}x+\int_{-0.75}^{0.75}\sqrt{0.75^2-x^2}\mathrm{d}x\right]\\&=19.6\left(0+\frac{1}{2}\pi\cdot 0.75^2\right)\approx 17.3(\mathrm{kN}).\end{aligned}$$

注　其中利用对称性，前一个定积分为零. 利用定积分的几何意义，后一个定积分为半圆的面积.

第7章 空间解析几何与向量代数

7.1 向量及其线性运算

7.1.1 向量的概念

向量 既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量).

例如,力、位移、速度等都是向量.

向量的表示 以 A 为起点,B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$,它可以用一个从点 A 到点B 的带有箭头的有向线段表示(图 7.1.1). 向量也常用黑体字母或带箭头的字母表示,如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$.

自由向量 具有大小和方向,而无特定位置的向量称为自由向量. 在数学中,我们只研究与起点无关的自由向量.

图 7.1.1

相等向量 大小相等、方向相同的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 称为相等向量,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移可以完全重合(起点和终点分别重合).

向量的模 向量 $a(\overrightarrow{AB})$的大小称为向量的模,记作$|\boldsymbol{a}|$($|\overrightarrow{AB}|$).

单位向量 模等于 1 的向量称为单位向量,即若$|\boldsymbol{a}|=1$,则 $\boldsymbol{a}$ 就是单位向量.

零向量 模等于零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合,其方向是任意方向.

平行向量(共线向量) 若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称它们是平行向量,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 两个平行向量经过平移可以位于同一条直线,因此平行向量也称为共线向量. 零向量与任何向量都平行.

负向量 与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等,方向相反的向量 $\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

向量的加法有以下几种运算法则(表 7.1.1).

向量的减法 向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差定义为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

向量的减法有下列运算法则(表 7.1.2).

表 7.1.1

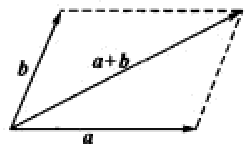
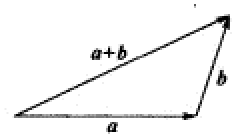
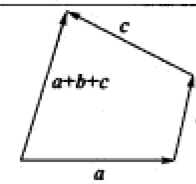
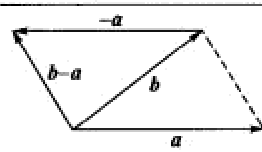
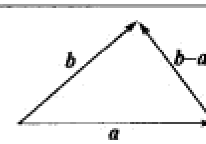
法　　则	平行四边形法则	三角形法则	多边形法则
示意图			

表 7.1.2

法　　则	平行四边形法则	三角形法则
示意图		

向量加法的运算律.

(1)交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

2. 数乘向量

定义 7.1.1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同;当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

注　$\lambda\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$.

数乘向量的运算律.

(1)结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2)分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(3)$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

向量的线性运算　向量的加法($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$)和数乘向量($\lambda\boldsymbol{a}$)称为向量的线性运算.

两个向量平行(共线)的条件.

(1)设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(共线)的充分必要条件是存在不全为零的数 λ 和 μ,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$(即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关).

向量的单位化 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,则向量$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与$\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位化,记作 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

$$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\xrightarrow{\text{单位化}}\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

7.1.3 空间直角坐标系

空间直角坐标系如图 7.1.2 所示 .

1. 三个坐标轴(表 7.1.3)

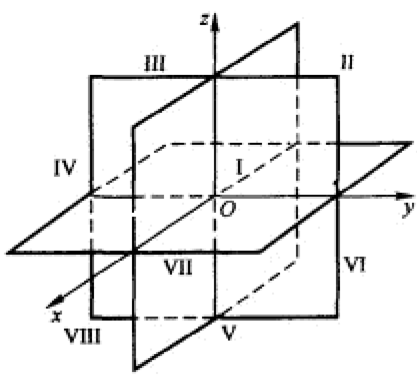


图 7.1.2

表 7.1.3

坐标轴	方程	坐标轴上点的坐标
x 轴	$\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$	$(x,0,0)$
y 轴	$\begin{cases}z=0\\x=0\end{cases}$	$(0,y,0)$
z 轴	$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$	$(0,0,z)$

[redacted] 一个点若有两个坐标为零,则它一定在某个坐标轴上 .

2. 三个坐标面(表 7.1.4)

表 7.1.4

坐标面	方程	坐标面上点的坐标
xOy 面	$z=0$	$(x,y,0)$
yOz 面	$x=0$	$(0,y,z)$
zOx 面	$y=0$	$(x,0,z)$

[redacted] 一个点若有一个坐标为零,则它一定在某个坐标面上 .

3. 八个卦限(表 7.1.5)

表 7.1.5

卦　　限	卦限中点的坐标的符号	卦　　限	卦限中点的坐标的符号
Ⅰ	(+, +, +)	Ⅴ	(+, +, −)
Ⅱ	(−, +, +)	Ⅵ	(−, +, −)
Ⅲ	(−, −, +)	Ⅶ	(−, −, −)
Ⅳ	(+, −, +)	Ⅷ	(+, −, −)

[redacted] 前两个坐标的正负与四个象限中点的坐标的正负规律相同，最后一个坐标的正负取决于点在上半空间($z>0$)，还是下半空间($z<0$).

4. 基本单位向量

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中分别沿 x 轴，y 轴和 z 轴的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 称为坐标系的基本单位向量.

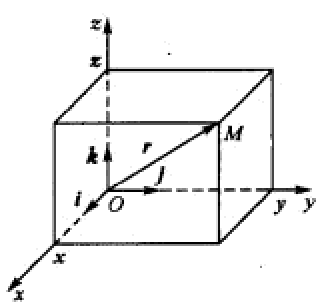


图 7.1.3

5. 向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，以原点为起点，点 $M(x, y, z)$ 为终点的向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 都可以唯一地分解成基本单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

称 x, y, z 为向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的坐标或分量(图 7.1.3)，记

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \{x, y, z\}.$$

7.1.4　利用坐标进行向量的线性运算

设

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \{a_x, a_y, a_z\},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

λ 是实数，则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k},$$

即

$\{a_x, a_y, a_z\} + \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$,

$\{a_x, a_y, a_z\} - \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}$,

$\lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

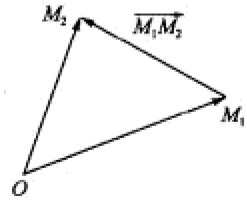


图 7.1.4

两点所确定的向量 如图 7.1.4 所示,设有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$,则 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

[redacted] 终点坐标减起点坐标就是向量的坐标.

● 7.2 数量积 向量积 混合积

7.2.1 数量积

1. 数量积的定义

定义7.2.1 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是一个数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$(其中 $\theta = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 7.2.1)),记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

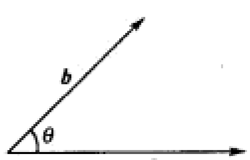


图 7.2.1

向量的数量积也称为点积或内积.

[redacted] 向量·向量 = 数量.

2. 数量积的运算律

(1)交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3)结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

3. 数量积的性质

(1)$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ (夹角余弦),

$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \arccos\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ (夹角公式);

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ (模的公式);

(3)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ (垂直条件).

4. 向量的投影

定义 7.2.2 向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量$\boldsymbol{a}$ 上的投影(图 7.2.2)定义为

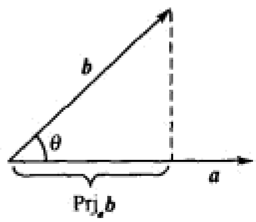


图 7.2.2

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

5. 投影与数量积的关系

(1) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

7.2.2 数量积的坐标运算

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

1. 数量积的计算公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

即

$$\{a_x, a_y, a_z\}\cdot\{b_x, b_y, b_z\} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

记忆 对应分量的乘积之和等于数量积.

2. 向量的模与夹角

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (\text{模的公式}),$$

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\{a_x, a_y, a_z\} \qquad (\text{单位化公式}),$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (\text{夹角余弦}),$$

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \arccos\frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (\text{夹角公式}).$$

3. 两向量垂直与平行的条件

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0 \qquad (\text{垂直条件}),$$

$$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (\text{平行条件}).$$

例 7.2.1 证明不等式

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geqslant |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|,$$

其中 $a_i, b_i\,(i = 1,2,3)$ 为任意实数,并指出等号成立的条件.

证 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, 则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, 即 $|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$. 等号成立的充分必要条件是 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$, 即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向.

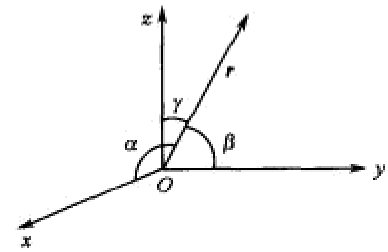


图 7.2.3

4. 向量的方向角和方向余弦

向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 与基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{r}$ 的方向角, 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为方向余弦(图 7.2.3).

方向余弦和方向角的计算公式(表 7.2.1).

表 7.2.1

方向余弦	方向角
$\cos\alpha=\dfrac{x}{\lvert\boldsymbol{r}\rvert}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\alpha=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\cos\beta=\dfrac{y}{\lvert\boldsymbol{r}\rvert}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\beta=\arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\cos\gamma=\dfrac{z}{\lvert\boldsymbol{r}\rvert}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\gamma=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

方向余弦的性质.

(1) $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|},\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|},\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right\}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{r}^0$,

即将向量 $\boldsymbol{r}$ 单位化后, $\boldsymbol{r}^0$ 的三个分量就是 $\boldsymbol{r}$ 的三个方向余弦.

(2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

[redacted] 这个公式说明一个向量的三个方向角不是任意的, 它们要受到这个公式的约束.

7.2.3 向量积

1. 向量积的定义

定义7.2.3 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 按这个顺序符合右手规则(图 7.2.4).

向量的向量积也称为叉积或外积.

[redacted] 向量 × 向量 = 向量.

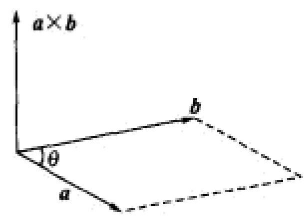


图 7.2.4

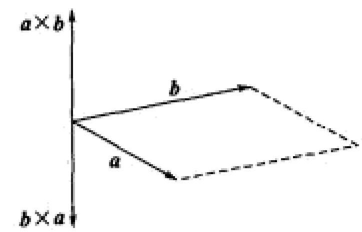


图 7.2.5

2. 向量积的运算律

(1)反交换律：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(图 7.2.5)；

(2)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$；

(3)结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

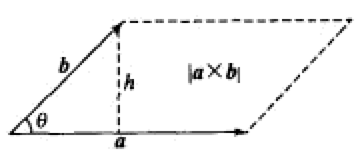


图 7.2.6

3. 向量积的性质

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　(平行条件).

4. 向量积的几何意义

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(图 7.2.6).

例 7.2.2　设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4,|\boldsymbol{c}|=5$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解　由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ 知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相连构成一个三角形. 再由 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4,|\boldsymbol{c}|=5$ 知，这是一个直角三角形(图 7.2.7)，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

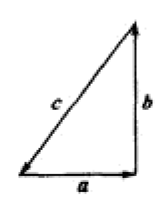


图 7.2.7

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

所以原式 $=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}=36$.

7.2.4　向量积的坐标运算

1. 向量的计算公式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则有向量积的计算公式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\}$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\}.$$

2. 空间三点共线的条件

空间三点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 共线的条件是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 共线，即

$$M_1,M_2,M_3\text{ 共线}\Leftrightarrow\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}.$$

3. 三角形的面积

由向量积的几何意义，空间中不共线的三点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 构成的三角形的面积(图 7.2.8)

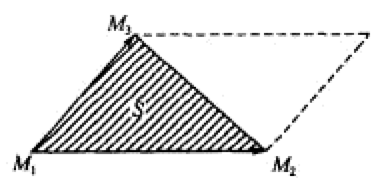


图 7.2.8

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}|,$$

即

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}.$$

7.2.5 混合积

1. 混合积的定义

定义 7.2.4 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积是向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积，记作 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$，即

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

注 混合积是一个数量.

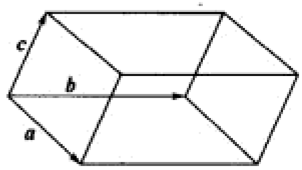


图 7.2.9

2. 混合积的性质

(1)轮换性：$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$;

(2)共面条件：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$.

3. 混合积的几何意义

混合积$[\boldsymbol{abc}]$的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积(图 7.2.9)

$$V=|[\boldsymbol{abc}]|.$$

7.2.6 混合积的坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}=\{c_x,c_y,c_z\}$.

1. 混合积的计算公式

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2. 三个向量共面的条件

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

3. 空间四点共面的条件

空间四点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$共面的条件是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$共面，即混合积$[\overrightarrow{M_1M_2}\quad\overrightarrow{M_1M_3}\quad\overrightarrow{M_1M_4}]=0$. 于是空间四点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$共面的条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad 或 \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4. 四面体的体积

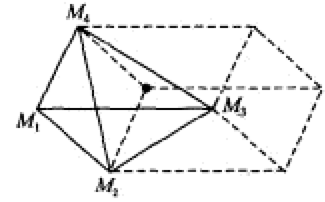


图 7.2.10

由混合积的几何意义，空间中四个不共面的点 $M_i(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,3,4)$ 构成的四面体的体积(图 7.2.10)

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \ \overrightarrow{M_1M_3}\ \ \overrightarrow{M_1M_4}]\right|,$$

即

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \quad 或 \quad V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

(取 ± 号使 $V>0$).

例 7.2.3(1995 年 1) 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

解

$$\begin{aligned}
&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2\cdot2=4,
\end{aligned}$$

其中利用了 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 以及混合积的轮换性等性质.

7.3 曲面及其方程

7.3.1 曲面方程的类型(表 7.3.1)

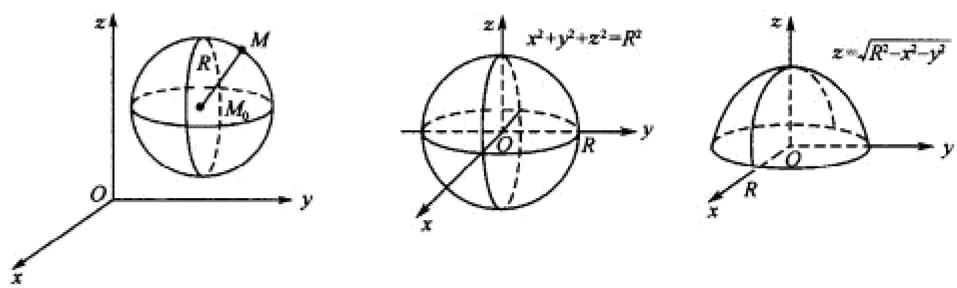
表 7.3.1

方程类型	方程举例
(1)一般式方程(隐式方程) $F(x,y,z)=0$	$x^2+y^2+z^2=R^2$(球面), $x^2+y^2=R^2$(圆柱面)
(2)显式方程 $z=f(x,y)$	$z=x^2+y^2$(旋转抛物面), $z=\sqrt{x^2+y^2}$(圆锥面), $z=xy$(双曲抛物面)
(3)参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ (u,v 是参数)	$\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\y=R\sin\varphi\sin\theta\\z=R\cos\varphi\end{cases}$ (球面)

7.3.2 球面

以点 $M(x_0, y_0, z_0)$为球心，R 为半径的球面(图 7.3.1(a))的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$



(a)　　(b)　　(c)

图 7.3.1

特例　以原点 $O(0,0,0)$为球心，R 为半径的球面(图 7.3.1(b))的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

上半球面(图 7.3.1(c))的方程为

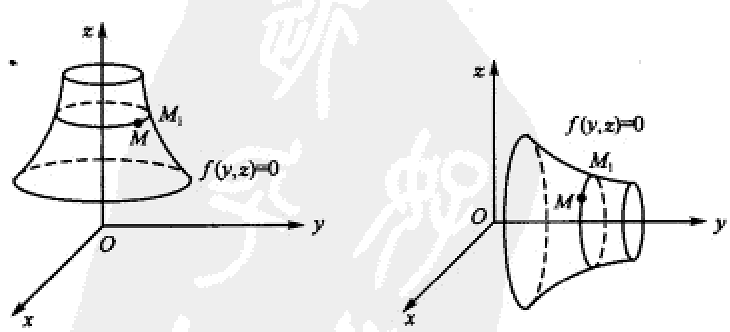
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

7.3.3 旋转曲面

1. 旋转曲面的方程

yOz 坐标面上的曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周所得到的旋转曲面(图 7.3.2(a))的方程为

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$



(a)　　(b)

图 7.3.2

[redacted]　绕 z 轴旋转时，z 不变，$y \to \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 或 $y^2 \to x^2 + y^2$.

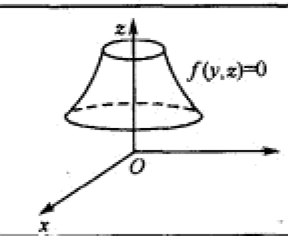
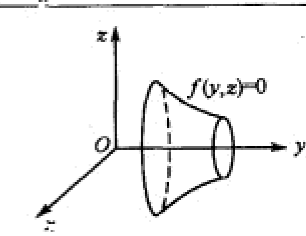
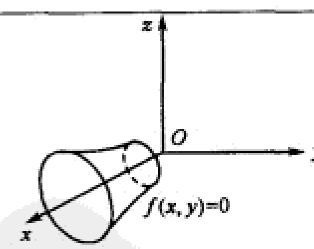
同理，曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面（图 7.3.2(b)）的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

[redacted]　绕 y 轴旋转时，y 不变，$z \to \pm\sqrt{x^2+z^2}$ 或 $z^2 \to x^2+z^2$.

2. 旋转曲面的形成过程（表 7.3.2）

表 7.3.2

曲　线	绕 z 轴旋转	旋转曲面	
$f(y,z)=0$	$\xrightarrow[y\to\pm\sqrt{x^2+y^2}]{z\text{不变}}$	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$	
$f(y^2,z)=0$	$\xrightarrow[y^2\to x^2+y^2]{z\text{不变}}$	$f(x^2+y^2, z)=0$	
曲　线	绕 y 轴旋转	旋转曲面	
$f(y,z)=0$	$\xrightarrow[z\to\pm\sqrt{x^2+z^2}]{y\text{不变}}$	$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$	
$f(y,z^2)=0$	$\xrightarrow[z^2\to x^2+z^2]{y\text{不变}}$	$f(y, x^2+z^2)=0$	
曲　线	绕 x 轴旋转	旋转曲面	
$f(x,y)=0$	$\xrightarrow[y\to\pm\sqrt{y^2+z^2}]{x\text{不变}}$	$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$	
$f(x,y^2)=0$	$\xrightarrow[y^2\to x^2+z^2]{x\text{不变}}$	$f(x, y^2+z^2)=0$	

[redacted]　曲线绕哪一个坐标轴旋转，则与该坐标轴同名的变量不变，将另一变量的平方加上第三个变量的平方.

例 7.3.1（1993 年 1,2）　求由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程，并求旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.

解　由坐标面 $z=0$ 上的椭圆 $3x^2+2y^2=12$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转椭球面方程为（y 不变，$x^2 \to x^2+z^2$）

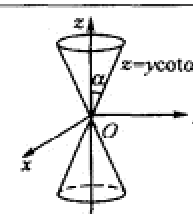
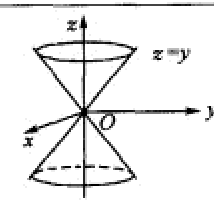
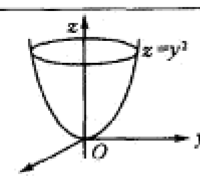
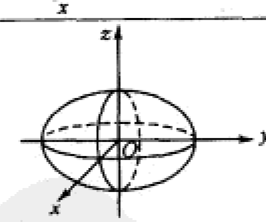
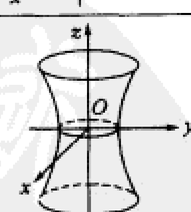
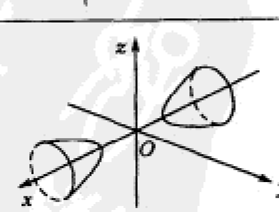
$$3(x^2+z^2)+2y^2 = 12.$$

曲面在点 (x,y,z) 处的法向量（指向外侧）为 $\boldsymbol{n}=\{6x,4y,6z\}$，故在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量

$$\boldsymbol{n}^0=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\bigg|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}.$$

7.3.4 一些旋转曲面(表 7.3.3)

表 7.3.3

母　　线	旋转轴	旋转曲面方程	图　　形
直线 $z=y\cot\alpha$	z 轴	圆锥面 $z^2=\cot^2\alpha(x^2+y^2)$ 或 $z^2=a^2(x^2+y^2)$	
直线 $z=y$	z 轴	正圆锥面 $z^2=x^2+y^2$	
抛物线 $z=y^2$	z 轴	旋转抛物面 $z=x^2+y^2$	
椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	y 轴	旋转椭球面 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$	
双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	z 轴	旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	x 轴	旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$	

7.3.5 旋转曲面的参数方程

利用参数方程来表示旋转曲面十分方便．

1．平面曲线为母线的情形

曲线 $z=f(y)(a\leqslant y\leqslant b)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = u\sin\varphi, \\ y = u\cos\varphi, \\ z = f(u) \end{cases} \quad (a\leqslant u\leqslant b, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

以上曲线绕 y 轴旋转而成的旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = f(u)\sin\varphi, \\ y = u, \\ z = f(u)\cos\varphi \end{cases} \quad (a\leqslant u\leqslant b, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

2．空间曲线为母线的情形

曲线 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \\ z=h(t) \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\sin\varphi, \\ y = \sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\cos\varphi, \\ z = h(t) \end{cases} (\alpha\leqslant t\leqslant\beta, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

由以上方程可得

$$\begin{cases} x^2+y^2 = f^2(t)+g^2(t), \\ z = h(t), \end{cases}$$

再消去参数 t 可得旋转曲面的一般方程．

7.3.6 一般旋转曲面的求法

(1)曲线 Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 绕直线 L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 旋转形成一个旋转曲面(图 7.3.3).

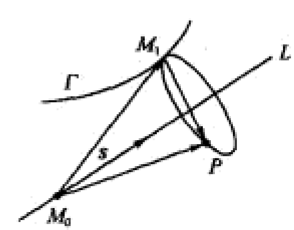


图 7.3.3

旋转曲面方程的求法如下：

设 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$．在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的纬圆上任何一点 $P(x,y,z)$满足条件

$$\overrightarrow{M_1P} \perp s \text{ 和 } |\overrightarrow{M_0P}| = |\overrightarrow{M_0M_1}|,$$

即

$$\begin{cases} m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2. \end{cases}$$

这两个方程与方程 $F(x_1,y_1,z_1)=0$ 和 $G(x_1,y_1,z_1)=0$ 一起消去 x_1, y_1, z_1 便得到旋转曲面的方程．

(2)曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面(图 7.3.4)的方程的求法如下：

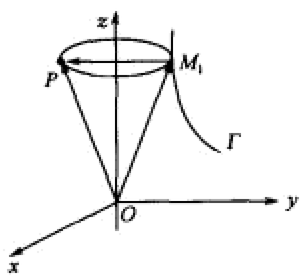


图 7.3.4

在曲线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过点 M_1 的纬圆上任何一点 $P(x,y,z)$满足条件 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OM_1}|$ 和 $z=z_1$，即 $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ 且 $z=z_1$，得

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2.$$

从方程组

$$\begin{cases} F(x_1,y_1,z)=0, \\ G(x_1,y_1,z)=0, \\ x^2+y^2=x_1^2+y_1^2 \end{cases}$$

中消去 x_1 和 y_1 便得到旋转曲面的方程．

如果能从方程组$\begin{cases} F(x_1,y_1,z)=0, \\ G(x_1,y_1,z)=0 \end{cases}$ 中解出 $x_1=\varphi(z)$和 $y_1=\psi(z)$，则旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z).$$

例 7.3.2(1998 年 1)　求直线 $l:\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程．

解　如图 7.3.5. 在直线 l 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的纬圆上任何一点 $P(x,y,z)$满足条件 $|\overrightarrow{OM_1}| = |\overrightarrow{OP}|$ 且 $y=y_1$．于是有 $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ 且 $y=y_1$，得 $x^2+z^2=x_1^2+z_1^2$．

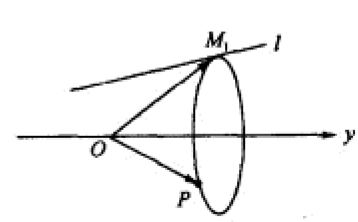


图 7.3.5

由 l 的方程解出 $x_1=2y_1, z_1=-\frac{1}{2}(y_1-1)$，即 $x_1=2y, z_1=-\frac{1}{2}(y-1)$．于是旋转曲面方程为 $x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$ 或 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$．

7.3.7 柱面

1. 柱面的定义

定义 7.3.1 一条直线沿给定曲线平行移动所产生的曲面称为柱面. 这些直线称为柱面的母线,给定曲线称为柱面的准线(图 7.3.6).

2. 母线平行于坐标轴的柱面

在空间直角坐标系中,缺少一个变量的方程表示一个柱面,其母线平行于与所缺变量同名的坐标轴.

例如, $F(x,y)=0$ 表示以 xOy 坐标面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面(表 7.3.4).

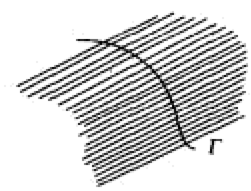
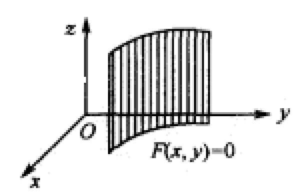
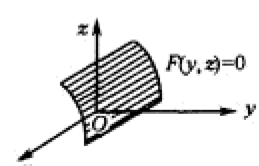
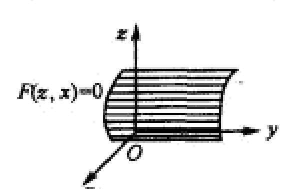


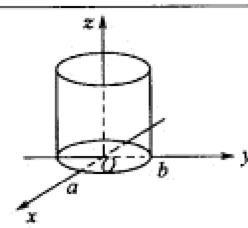
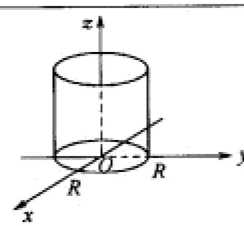
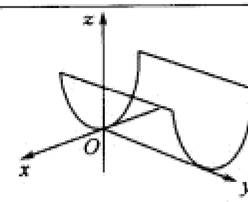
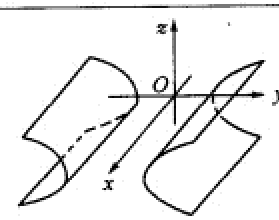
图 7.3.6

表 7.3.4

准　　线	母线平行的坐标轴	柱面方程	图　　形
$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$	z 轴	$F(x,y)=0$	
$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$	x 轴	$F(y,z)=0$	
$\begin{cases} F(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}$	y 轴	$F(z,x)=0$	

7.3.8　一些柱面(表 7.3.5)

表 7.3.5

准　　线	母线平行的坐标轴	柱面方程	图　　形
椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$	z 轴	椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	
圆 $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=0\end{cases}$	z 轴	圆柱面 $x^2+y^2=R^2$	
抛物线 $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}$	y 轴	抛物柱面 $x^2=2pz$	
双曲线 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$	x 轴	双曲柱面 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	

7.3.9　一般柱面的求法

(1)以曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=f(u),\\ y=g(u),\\ z=h(u)\end{cases}$ $(a\leqslant u\leqslant b)$为准线,母线方向为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$的柱面(图 7.3.7)的参数方程为

$$\begin{cases}x=f(u)+mv,\\ y=g(u)+nv,\quad (a\leqslant u\leqslant b,\ -\infty<v<+\infty).\\ z=h(u)+pv\end{cases}$$

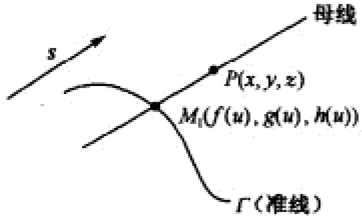


图 7.3.7

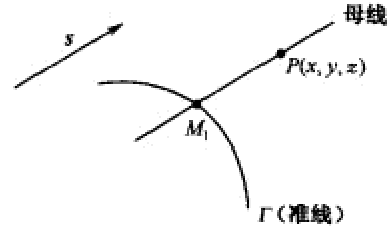


图 7.3.8

(2)以曲线 Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 为准线, 母线方向为 $s=\{m,n,p\}$的柱面方程的求法如下：

在准线 Γ 上任取一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$(图 7.3.8),则过 M_1 的母线的参数方程为

$$x=x_1+mt,\quad y=y_1+nt,\quad z=z_1+pt.$$

将 $x_1=x-mt, y_1=y-nt, z_1=z-pt$ 代入准线方程,得

$$\begin{cases} F(x-mt,y-nt,z-pt)=0, \\ G(x-mt,y-nt,z-pt)=0, \end{cases}$$

再消去参数 t 便得到柱面的一般方程．

例 7.3.3 设柱面的准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2, \end{cases}$ 母线平行于 $s=\{1,0,-1\}$,求柱面方程．

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$是准线上任意一点,则过 M_1 的母线的参数方程为

$$x=x_1+t,\quad y=y_1,\quad z=z_1-t.$$

将 $x_1=x-t, y_1=y, z_1=z+t$ 代入准线方程,得

$$\begin{cases} (x-t)^2+y^2+(z+t)^2=1, \\ 2(x-t)^2+2y^2+(z+t)^2=2. \end{cases}$$

解出$(z+t)^2=0$, $t=-z$. 将 $t=-z$ 代入以上方程之一,得柱面方程$(x+z)^2+y^2=1$.

7.3.10 锥面

1. 锥面的定义

定义7.3.2 经过一固定点并与一给定曲线相交的直线所组成的曲面称为锥面．这个固定点称为锥面的顶点,给定曲线称为锥面的准线,这些直线称为锥面的母线(图 7.3.9).

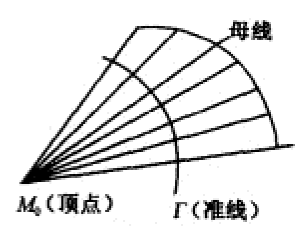


图 7.3.9

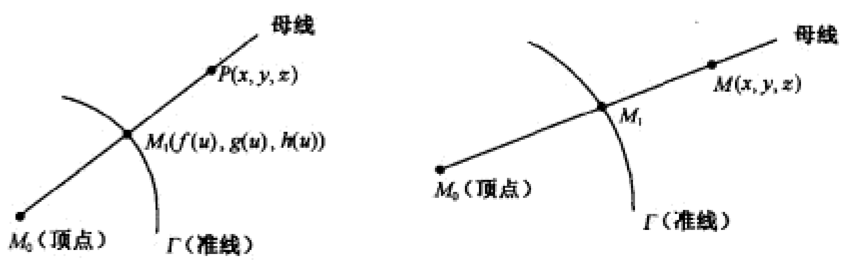
2. 一般锥面的求法

(1)以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为顶点,曲线

$$\Gamma:\begin{cases} x = f(u), \\ y = g(u), \\ z = h(u) \end{cases} \qquad (a \leqslant u \leqslant b)$$

为准线的锥面(图 7.3.10(a))的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + v[f(u) - x_0], \\ y = y_0 + v[g(u) - y_0], \\ z = z_0 + v[h(u) - z_0] \end{cases} \qquad (a \leqslant u \leqslant b, -\infty < v < +\infty).$$



(a)　　　　(b)

图 7.3.10

(2)以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为顶点,曲线$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$为准线的锥面方程的求法如下:

在锥面上任取一点 $M(x,y,z)$,则锥面上经过 M 点的母线与准线的交点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$的坐标可以表示成(图 7.3.10(b))

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + (x - x_0)t, \\ y_1 = y_0 + (y - y_0)t, \\ z_1 = z_0 + (z - z_0)t. \end{cases}$$

将 x_1,y_1,z_1 代入准线的两个方程并消去参数 t 便得到锥面的一般方程.

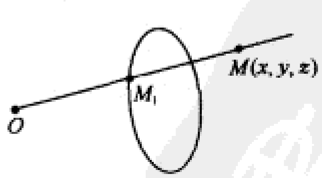


图 7.3.11

例 7.3.4　求以原点为顶点,且经过三个坐标轴的圆锥面方程.

解　如图 7.3.11 所示,锥面以 $O(0,0,0)$为顶点,以圆$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=1 \end{cases}$为准线. 在锥面上任取一点 $M(x,y,z)$,则锥面上经过点 M 的母线与准线的交点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$的坐标

可以表示成

$$x_1 = xt,\quad y_1 = yt,\quad z_1 = zt.$$

将 x_1, y_1, z_1 代入准线的两个方程,得

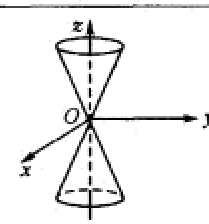
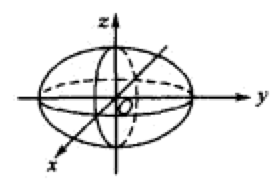
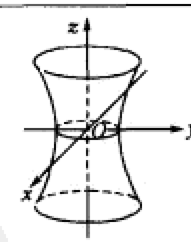
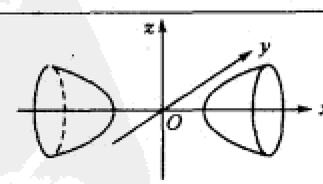
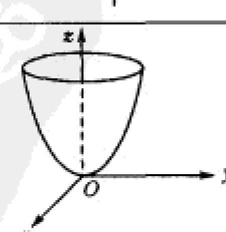
$$(x^2+y^2+z^2)t^2 = 1,\quad (x+y+z)t = 1.$$

消去参数 t,得圆锥面的一般方程

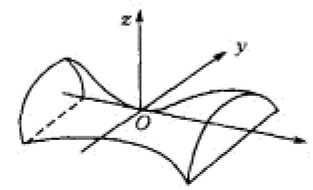
$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 \quad 或 \quad xy+yz+zx = 0.$$

7.3.11　一些二次曲面(表 7.3.6)

表 7.3.6

曲面名称	曲面方程	曲面图形
椭圆锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	

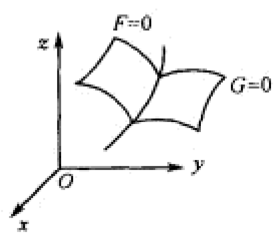
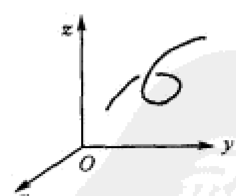
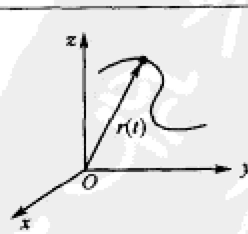
续表

曲面名称	曲面方程	曲面图形
双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	

● 7.4　空间曲线及其方程

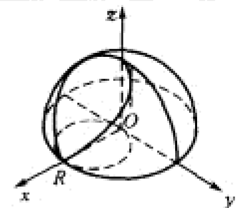
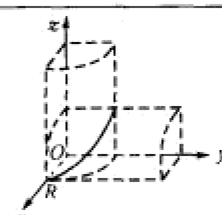
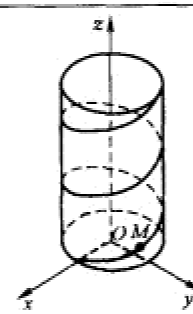
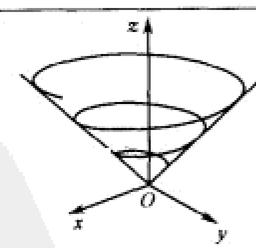
7.4.1　空间曲线方程的类型(表 7.4.1)

表 7.4.1

方程类型	示 意 图	方程举例
(1)一般方程(交面式) $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$		$\begin{cases}z=x^2+y^2\\z^2=x^2+y^2\end{cases}$ 旋转抛物面与圆锥面的交线
(2)参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$		螺线 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\\z=b\theta\end{cases}$
(3)向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$或 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$		**注**　向量方程等价于参数方程

7.4.2 一些重要的空间曲线(表 7.4.2)

表 7.4.2

曲线名称及方程	曲线图形
维维安尼曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=Rx \end{cases}$ (半球面与圆柱面的交线)	
两直交圆柱面的交线 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$	 (第一卦限部分)
圆柱螺线 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ (在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上的螺线)	
圆锥螺线 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{cases}$ (在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的螺线)	

7.4.3 空间曲线在坐标面上的投影曲线

空间曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 xOy 面($z=0$)上的投影曲线的求法如图 7.4.1 所示.

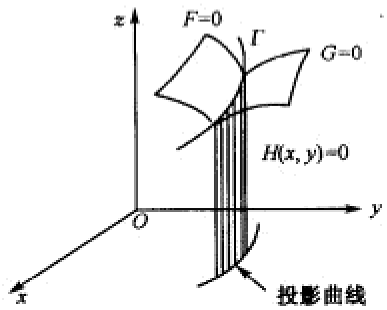


图 7.4.1

(1)消去方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$中的变量 z，得到通过曲线 Γ 且母线平行于 z 轴的柱面

$$H(x,y)=0,$$

称之为 Γ 关于 xOy 面的投影柱面．

(2)投影柱面 $H(x,y)=0$ 与 xOy 面的交线就是 Γ 在 xOy 面上的投影曲线：

$$\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$$

空间曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的求法如表 7.4.3 所示．

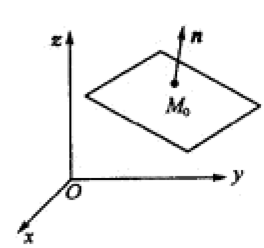
表 7.4.3

曲　　线	投影柱面	投影曲线
$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{消去 } z}$	$H(x,y)=0$	$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$
$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{消去 } x}$	$I(y,z)=0$	$\begin{cases}I(y,z)=0\\x=0\end{cases}$
$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{消去 } y}$	$J(x,z)=0$	$\begin{cases}J(x,z)=0\\y=0\end{cases}$

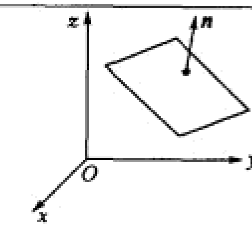
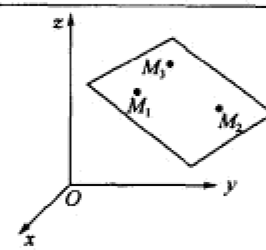
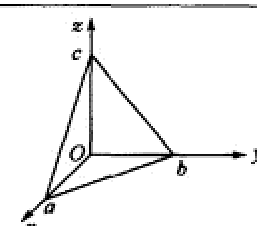
● 7.5　平面及其方程

7.5.1　平面方程(表 7.5.1)

表 7.5.1

平面方程	平面的几何特征	平面图形
点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$且以 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为法向量	

续表

平面方程	平面的几何特征	平面图形
一般式 $Ax+By+Cz+D=0$	以 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为法向量	
三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	通过不共线的三点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$ 法向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$	
截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	在 x,y,z 轴上的截距为 a,b,c	

7.5.2 具有特殊位置的平面

设有平面 $Ax+By+Cz+D=0$. 当 A,B,C,D 中有一些为零时,平面具有特殊位置．具体情形如表 7.5.2 所示．

表 7.5.2

平面方程的特征	平面的几何特征
(1)若 $D=0$, 则平面通过原点	$Ax+By+Cz=0$ 通过原点
(2)若平面方程中某个变量不出现,则平面平行于与该变量同名的坐标轴	$By+Cz+D=0$ 平行于 x 轴 $Ax+Cz+D=0$ 平行于 y 轴 $Ax+By+D=0$ 平行于 z 轴
(3)若 $D=0$ 且平面方程中某个变量不出现,则平面通过与该变量同名的坐标轴	$By+Cz=0$ 通过 x 轴 $Ax+Cz=0$ 通过 y 轴 $Ax+By=0$ 通过 z 轴

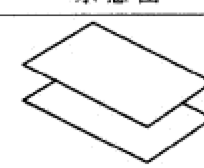
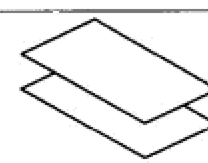
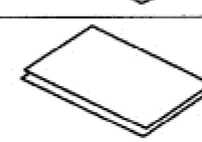
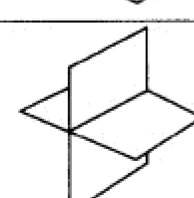
续表

平面方程的特征	平面的几何特征
(4)若平面方程中有两个变量不出现,则平面平行于与这两个变量同名的坐标面(或垂直于与方程中唯一的变量同名的坐标轴)	$Cz+D=0$ 平行于 xOy 面(或垂直于 z 轴) $Ax+D=0$ 平行于 yOz 面(或垂直于 x 轴) $By+D=0$ 平行于 zOx 面(或垂直于 y 轴)
(5)若 $D=0$ 且平面方程中有两个变量不出现,则平面为坐标面	$Cz=0$ 为 xOy 面($z=0$) $Ax=0$ 为 yOz 面($x=0$) $By=0$ 为 zOx 面($y=0$)
(6)若 A,B,C,D 全不为零,则平面可化为截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

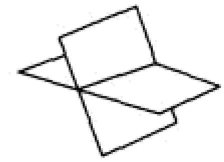
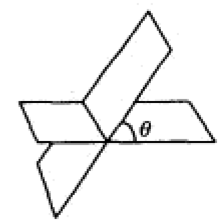
7.5.3　两平面之间的位置关系(表 7.5.3)

设有两个平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$;$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,法向量 $\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$.

表 7.5.3

两平面之间的位置关系	方程特征	示意图
两平面平行(包括重合)	$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	
两平面平行(但不重合)	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$	
两平面重合	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$	
两平面垂直	$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$	

续表

两平面之间的位置关系	方程特征	示意图
两平面相交	π_1 与 π_2 相交 $\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \not\parallel \boldsymbol{n}_2$ $\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$	
两平面的夹角	π_1 与 π_2 的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $\cos\theta=\frac{\lvert\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}_1\rvert\lvert\boldsymbol{n}_2\rvert}$ $\cos\theta=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	

7.5.4 三平面之间的位置关系

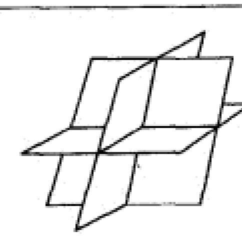
设有 3 个平面 $\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2,3)$. 记

$$M=\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_3 & B_3 & C_3\end{bmatrix},\qquad \overline{M}=\begin{bmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{bmatrix}.$$

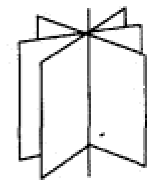
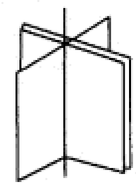
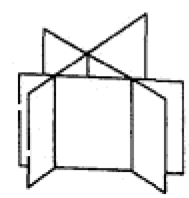
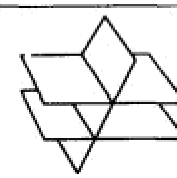
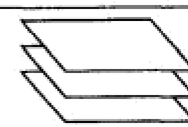
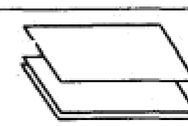
（系数矩阵）　　　　（增广矩阵）

设 $r=$ 秩(M), $\bar{r}=$ 秩$(\overline{M})$. 这 3 个平面之间的位置关系取决于 3 个平面方程组成的线性方程组的解的情况 .3 个平面之间有 8 种可能的位置关系,具体情况如表 7.5.4 所示 .

表 7.5.4

秩的情况	公共点的构成	三平面之间的位置关系	示 意 图
$r=3$ $\bar{r}=3$	三平面有唯一公共点	三平面交于一点	

续表

秩的情况	公共点的构成	三平面之间的位置关系	示意图
$r=2$ $\bar{r}=2$	三平面的公共点构成一条直线 三平面属于同一个平面束 有两种情形	(1)三平面交于同一直线，彼此不重合	
		(2)两个平面重合，且与第三个平面相交	
$r=1$ $\bar{r}=1$	三平面的公共点构成一个平面	三平面重合	
$r=2$ $\bar{r}=3$	三平面无公共点(因为 $r<\bar{r}$)，但至少有两个平面不平行(因为 $r=2$) 有两种情形	(1)三平面两两相交于三条平行直线	
		(2)两个平面平行(不重合)，且与第 3 个平面相交	
$r=1$ $\bar{r}=2$	三平面无公共点(因为 $r<\bar{r}$)，且三平面彼此平行或重合(因为 $r=1$) 有两种情形	(1)三平面平行(彼此不重合)	
		(2)有两个平面重合，且与第 3 个平面平行	

例 7.5.1(2002 年 1)　设有 3 张不同平面的方程 $a_{i_1}x+a_{i_2}y+a_{i_3}z=b_i$，$i=1,2,3$. 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面的位置关系是(　　).

(A)三平面交于一点；

(B)三平面无公共点，它们两两交于三条平行直线；

(C)有两平面平行，且与第三张平面相交；

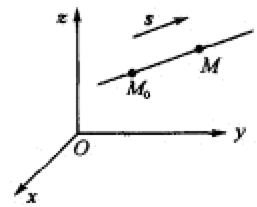
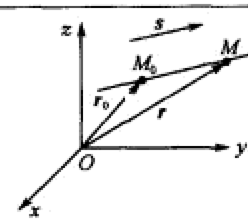
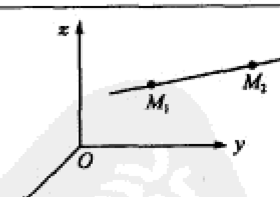
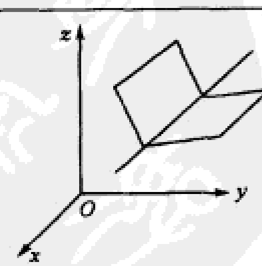
(D)三平面交于一直线.

解　$r(M)=r(\overline{M})=2<3$ 说明三平面有无穷多个公共点，又因为三张平面彼此不同，因此三平面交于一直线．选(D)．

● 7.6　空间直线及其方程

7.6.1　空间直线方程(表 7.6.1)

表 7.6.1

直线方程	直线的几何特征	直线图形
对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$	通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，平行于向量 $s=\{m,n,p\}$	
向量式 $r=r_0+ts$	通过点 M_0，平行于向量 s， $r_0=\overrightarrow{OM_0}$，$r=\overrightarrow{OM}$	
参数式 $\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$	通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$， 平行于向量 $s=\{m,n,p\}$	
两点式 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	通过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $s=\overrightarrow{M_1M_2}$	
一般式(交面式) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$	两个平面的交线，方向向量 $s=n_1\times n_2$ 或 $s=\left\{\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}\right\}$	

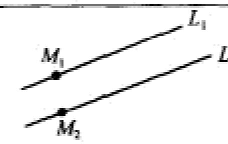
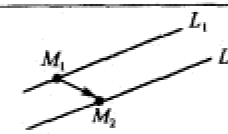
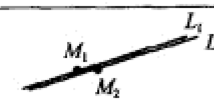
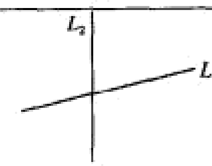
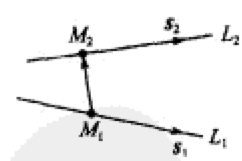
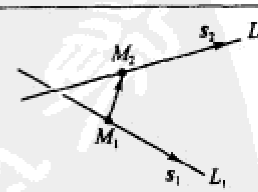
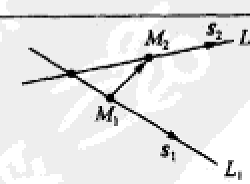
7.6.2 两直线之间的位置关系(表 7.6.2)

设有两条直线

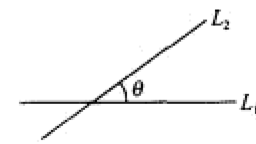
$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},M_1(x_1,y_1,z_1),s_1=\{m_1,n_1,p_1\};$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},M_2(x_2,y_2,z_2),s_2=\{m_2,n_2,p_2\}.$$

表 7.6.2

两直线之间的位置关系	方程特征	示 意 图
两直线平行(包括重合)	$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow s_1 \parallel s_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$	
两直线平行(但不重合)	$s_1 \parallel s_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$	
两直线重合	$s_1 \parallel s_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$	
两直线垂直(不一定相交)	$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow s_1 \perp s_2$ $\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$	
两直线共面	L_1 与 L_2 共面$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2},s_1,s_2$ 共面 $\Leftrightarrow[\overrightarrow{M_1M_2}\quad s_1\ s_2]=0$ $\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$	
两直线异面	L_1 与 L_2 异面$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2},s_1,s_2$ 异面 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$	
两直线相交	L_1 与 L_2 相交$\Leftrightarrow L_1$ 与 L_2 共面且不平行$\Leftrightarrow[\overrightarrow{M_1M_2}\ s_1\ s_2]=0$ 且 $s_1 \nparallel s_2$	

续表

两直线之间的位置关系	方程特征	示 意 图
两直线的夹角	L_1 与 L_2 的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $\cos\theta=\frac{\lvert s_1\cdot s_2\rvert}{\lvert s_1\rvert\lvert s_2\rvert}$ 或 $\cos\theta=\frac{\lvert m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$	

例7.6.1(1998 年 1, 2) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $l_1: \frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $l_2: \frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ ( ).

(A)相交于一点; (B)重合;

(C)平行但不重合; (D)异面.

解 设 $M_i(a_i, b_i, c_i)(i=1,2,3)$. 由条件知 M_1, M_2, M_3 不共线. 直线 l_1 经过 M_3 且平行于向量 $\overrightarrow{M_2M_1}$, 直线 l_2 经过 M_1 且平行于向量 $\overrightarrow{M_3M_2}$. 故两直线都在 M_1, M_2, M_3 所确定的平面上, 且不平行. 因此两直线相交于一点(图 7.6.1). 选(A).

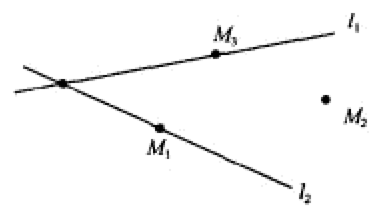


图 7.6.1

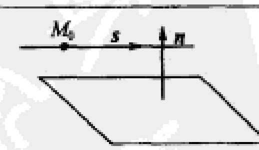
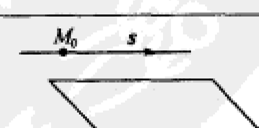
7.6.3 直线与平面之间的位置关系(表 7.6.3)

设有平面 π 和直线 L:

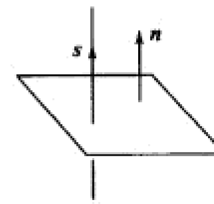
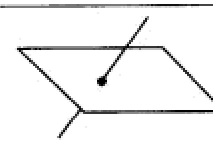
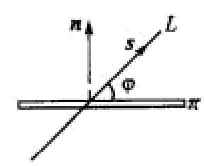
$\pi: Ax+By+Cz+D=0, \boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$;

$L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, M_0(x_0, y_0, z_0), \boldsymbol{s}=\{m, n, p\}$.

表 7.6.3

直线与平面之间的位置关系	方程特征	示 意 图
直线平行于平面(包括直线在平面上)	$L /\!/ \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$ $\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$	
直线平行于平面(直线不在平面上)	$Am+Bn+Cp=0$ 但 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$	

续表

直线与平面之间的位置关系	方程特征	示 意 图
直线在平面上	$Am+Bn+Cp=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$	
直线垂直于平面	$L\perp\pi\Leftrightarrow \boldsymbol{s}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$	
直线与平面相交	L 与 π 相交$\Leftrightarrow \boldsymbol{s}\not\perp\boldsymbol{n}$ $\Leftrightarrow A:B:C\neq m:n:p$	
直线与平面的夹角	L 与 π 的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 满足 $\sin\varphi=\dfrac{\lvert\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert\lvert\boldsymbol{s}\rvert}$或 $\sin\varphi=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{m^2+n^2+p^2}}$	

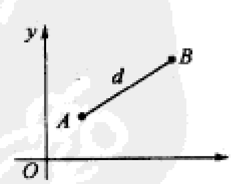
例 7.6.2(1995 年 1)　设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$, 则直线 L(　　).

(A)平行于 π;　　(B)在 π 上;　　(C)垂直于 π;　　(D)与 π 斜交.

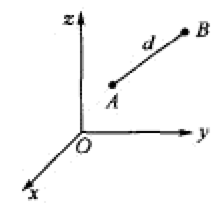
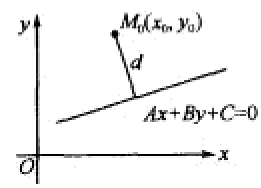
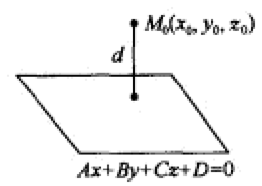
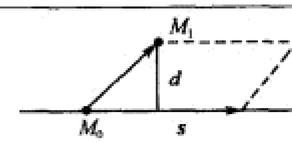
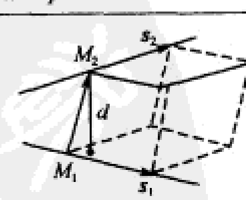
解　直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}=-7\{4,-2,1\}=-7\boldsymbol{n}$, 即 $\boldsymbol{s}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{n}$. 所以直线 L 垂直于平面 π. 选(C).

7.6.4　距离公式(表 7.6.4)

表 7.6.4

距离描述	距离公式
平面上两点 A,B 之间的距离 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 

续表

距离描述	距离公式
空间中两点 A,B 之间的距离 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 
平面上点 M_0 到直线 L 的距离 $M_0(x_0,y_0)$, $L:Ax+By+C=0$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 
空间中点 M_0 到平面 π 的距离 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\pi:Ax+By+Cz+D=0$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 
空间中点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$到直线 L 的距离 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $s=\{m,n,p\}$	$d=\dfrac{\lvert\overrightarrow{M_0M_1}\times s\rvert}{\lvert s\rvert}$  $d=\dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1-z_0 & x_1-x_0\\ p & m\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$
空间中两异面直线 L_1 和 L_2 之间的距离 $L_i:\dfrac{x-x_i}{m_i}=\dfrac{y-y_i}{n_i}=\dfrac{z-z_i}{p_i}$, $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $s_i=\{m_i,n_i,p_i\}(i=1,2)$	$d=\pm\dfrac{[\overrightarrow{M_1M_2}\,s_1\,s_2]}{\lvert s_1\times s_2\rvert}$  $d=\pm\dfrac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}p_1 & m_1\\ p_2 & m_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2}}$(取±号使得 $d>0$)

7.6.5 平面束

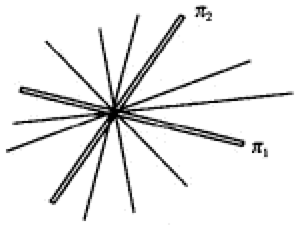


图 7.6.2

通过两个平面的交线 L 的所有平面形成一个平面束(图 7.6.2). 设交线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\text{平面 } \pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\text{平面 } \pi_2), \end{cases}$$

则平面束的方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中 λ, μ 不同时为零.

注　如果只用一个参数, 则 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 表示除了平面 π_1 以外所有通过交线 L 的平面.

平面束可用来求通过两平面交线的满足某个条件的平面的方程.

例 7.6.3(1998 年 1)　求直线 $l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解　过直线 l 作一平面 π_1, 使之垂直于平面 π, 则 π_1 与 π 的交线就是 l 在 π 上的投影直线 l_0. 将直线 l 的方程写成两个平面的交线的形式: $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 作过 l 的平面束:

$$\pi_1: x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0 \quad 或 \quad x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (1 + \lambda) = 0.$$

令 $\pi_1 \perp \pi$, 得 $1 \cdot 1 + (\lambda - 1) \cdot (-1) + \lambda \cdot 2 = 0$, $\lambda = -2$. 故投影平面 π_1 为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$, 投影直线 l_0 的方程为 $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程见例 7.3.2.

第 8 章　多元函数微分法及其应用

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　多元函数的概念

以 x 和 y 为自变量，z 为因变量的函数称为二元函数，记作 $z=f(x,y)$.

以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量，u 为因变量的函数称为 n 元函数，记作

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，则 $z=f(x,y)$ 的图形一般是区域 D 上的一个曲面（图 8.1.1）.

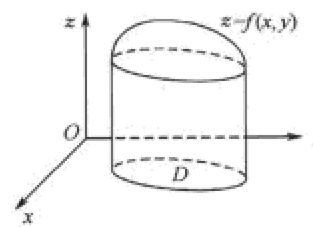
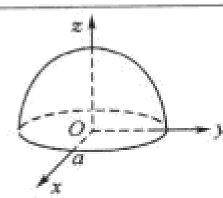
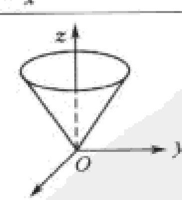
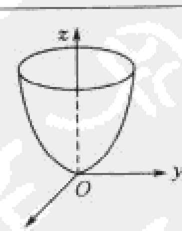


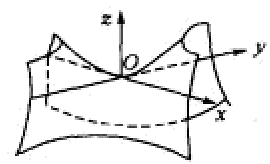
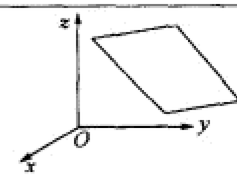
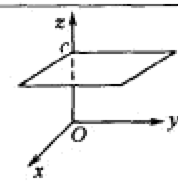
图 8.1.1

以下是一些常见的二元函数及其图形（表 8.1.1）.

表 8.1.1

二元函数	函数图形	曲面名称
$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$		上半球面
$z=\sqrt{x^2+y^2}$		上半正圆锥面
$z=x^2+y^2$		旋转抛物面

续表

二元函数	函数图形	曲面名称
$z = xy$		双曲抛物面
$z = ax + by + c$		平面
$z = c$		平面

8.1.2　多元函数的极限

1. 二元函数的极限(二重极限)

定义8.1.1　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ 是指:对任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta > 0$,使得当 $P(x, y)$满足 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时,就有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

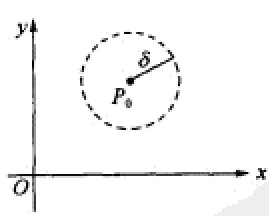


图 8.1.2

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

称为点 $P_0(x_0, y_0)$的 δ 邻域,它是以 P_0 为圆心,δ 为半径的一个开圆域(图 8.1.2).

二元函数的极限定义可以推广到 n 元函数 .

二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ 要求动点 $P(x, y)$以任意方式趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$时,都有 $f(x, y) \to A$. 因此,如果动点 $P(x, y)$沿两条不同的路径趋于 P_0 时,相应的函数值 $f(x, y)$ 趋于两个不同的数,则可断言极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$不存在 . 这是证明二重极限不存在的常用方法.

例 8.1.1 设有函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

证 如图 8.1.3 所示,在直线 $y=kx$ 上,

$$f(x,y)\xlongequal{y=kx}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}\qquad(\text{与 } k \text{ 有关的数}),$$

因此,当 $P(x,y)$分别沿两条不同的直线 $y=k_1x$ 和 $y=k_2x$($k_1\neq k_2$)趋于原点时,$f(x,y)$将趋于两个不同的数. 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

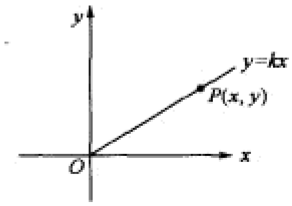


图 8.1.3

2. 二次极限

设函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某个去心邻域内有定义. 先将 y 固定,取极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$,再取极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$,则称 A 为 $f(x,y)$在点 P_0 处的二次极限,记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=A\qquad(\text{极限次序:先 } x \text{ 后 } y).$$

同理,可以定义另一种二次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=B\qquad(\text{极限次序:先 } y \text{ 后 } x).$$

一般地,这两种二次极限是不相等的. 这两种二次极限可能有一个存在,而另一个不存在,即使两个极限都存在,它们也不一定相等.

3. 二重极限与二次极限的关系

二次极限是取两次一元函数的极限,它与二重极限有本质的区别. 二重极限和二次极限可能一个存在而另一个不存在. 但是如果二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$和二次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$)都存在,则它们一定相等. 在这种情况下,我们可以利用二次极限来计算二重极限.

如果两个二次极限都存在但不相等:$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)\neq\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$,则二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在.

8.1.3 多元函数的连续性

定义 8.1.2 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义,自变量 x 和 y 分别在 x_0 和 y_0 处取得增量 Δx 和 Δy,得到函数的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0,$$

则称函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续.

函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续的另一等价定义是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

推论 8.1.1　若二元函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续，则 $f(x,y)$在 P_0 处必有二重极限(连续⇒有极限).

以上定义可以推广到 n 元函数.

与一元函数一样，一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

例 8.1.2　证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)处连续.

证　当$(x,y)\neq(0,0)$时，由 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$，得

$$0\leqslant|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}.$$

由夹逼性，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$. 所以 $f(x,y)$在点(0,0)处连续.

● 8.2 偏　导　数

8.2.1　偏导数的定义

函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于自变量 x 和 y 的偏增量分别为

$$\Delta z_x = f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta z_y = f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

定义 8.2.1　函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对自变量 x 的偏导数定义为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

对自变量 y 的偏导数定义为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

偏导数的记号：

$$f_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\ f_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$f_y(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ f_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

同理可以定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对自变量 x_i 的偏导数

$$f_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_i+\Delta x_i,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{\Delta x_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

8.2.2 求偏导数的方法

由偏导数的定义可知,多元函数对某个自变量求偏导数时,只须将其余的自变量暂时看作常量而对指定自变量求导数即可．例如,求$\frac{\partial f}{\partial x}$时,只须将 $f(x,y)$中的 y 视为常量,对 x 求导数;求$\frac{\partial f}{\partial y}$时,只须将 $f(x,y)$中的 x 视为常量,对 y 求导数．

因此,一元函数的导数公式和求导法则同样适用于偏导数．例如,设 $z=x^y$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^y)'_x=yx^{y-1}\qquad(\text{用幂函数的导数公式}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^y)'_y=x^y\ln x\qquad(\text{用指数函数的导数公式}).$$

8.2.3 多元函数可偏导与连续性的关系

与一元函数不同,多元函数在一点可偏导不能保证函数在该点连续或有极限．之所以有这种情况出现是因为定义偏导数的极限

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

仅仅是一个一元函数的极限,它存在与否只取决于函数 $f(x,y)$ 在直线 $\begin{cases}x=x_0,\\ z=0\end{cases}$ 上的函数值,而不涉及点(x_0,y_0)的邻域内其他点的函数值．相反,二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$则与函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个邻域内各点的函数值都有关．由此可以看出偏导数与二重极限之间的本质区别．因此,它们互不蕴涵(没有联系)就是理所当然的了．

经典反例 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

在原点的两个偏导数都存在:$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$．但是函数 $f(x,y)$在原点

的极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在(见例8.1.1),从而函数$f(x,y)$在原点不连续.

8.2.4　高阶偏导数

二元函数$z=f(x,y)$有4个二阶偏导数:

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad f_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

其中f_{xy}和f_{yx}称为混合偏导数.这两个混合偏导数可能不相等.

经典反例　设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

则$f_{xy}(0,0)=-1$,$f_{yx}(0,0)=1$,故$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

定理8.2.1(两个混合偏导数相等的充分条件)　如果f_{xy}和f_{yx}在区域D内连续,则在D内这两个混合偏导数必相等.

此定理表明,在混合偏导数的连续区域内,混合偏导数与求偏导数的次序无关.

由于我们所遇见的绝大多数函数的混合偏导数都是初等函数(从而在定义区域内连续),因此我们一般总认为$f_{xy}=f_{yx}$或$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

以上结论也适用于n元函数的高阶混合偏导数.例如,如果三元函数$f(x,y,z)$的三阶混合偏导数都是连续的,则有

$$f_{yxy}=f_{yyx}=f_{xyy},\qquad f_{xyz}=f_{zxy}=f_{yzx},$$

等等.

[illegible]　求偏导数时应注意利用多元函数关于自变量的对称性.如果函数$f(x,y)$关于自变量x和y是对称的,即$f(x,y)\equiv f(y,x)$,则只须将偏导数f_x和f_{xx}中的x和y交换就得到偏导数f_y和f_{yy}(若$f_x(x,y)=F(x,y)$,则$f_y(x,y)=F(y,x)$;若$f_{xx}(x,y)=G(x,y)$,则$f_{yy}(x,y)=G(y,x)$).这种"事半功倍"的方法往往可以减少偏导数的计算量.

例如,函数$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$关于x和y是对称的,则由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$交换$x$和$y$,便得到$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

例8.2.1(1996年4)　设$f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$,求$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-2x^2y^2)e^{-x^2y^2}$. 由对称性, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$. 故$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$.

● 8.3 全 微 分

8.3.1 全微分的定义

定义8.3.1 二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微是指函数的全增量 Δz 可以表示成以下形式:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A 和B 是与(x_0,y_0)有关但与 Δx 和 Δy 无关的量, ρ 是点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$与点$(x_0,y_0)$之间的距离: $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$(图8.3.1).

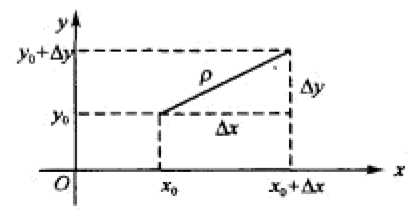


图 8.3.1

$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的全微分,记作 dz,即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

可微与连续的关系 若函数 $f(x,y)$在点(x,y)处可微, 则 $f(x,y)$在(x,y)处必连续(可微⇒连续).

8.3.2 多元函数可微的必要条件和充分条件

1. 可微的必要条件

定理8.3.1(可微的必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微, 则 $f(x,y)$在点(x,y)处必可偏导, 且在点(x,y)处的全微分

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

但是, 与一元函数不同, 函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可偏导却不能保证函数在点(x,y)处可微, 即可偏导是可微的必要而不充分的条件.

经典反例 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在原点处无极限(见例 8.1.1), 从而不连续, 也不可微. 但是函数在原点的两个偏导数却存在: $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$.

2. 可微的充分条件

定理 8.3.2(可微的充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微.

但是函数 $z=f(x,y)$ 在一点 (x,y) 处可微不能保证函数的两个偏导数在点 (x,y) 处连续，即偏导数连续是可微的充分而不必要的条件.

经典反例 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在原点可微，但偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在原点不连续.

8.3.3 多元函数可微、可偏导、连续和有极限之间的关系

多元函数在一点处可微、可偏导、连续和有极限这几个概念之间有以下蕴涵关系(图 8.3.2). 请比较一元函数的情形(图 2.5.1).

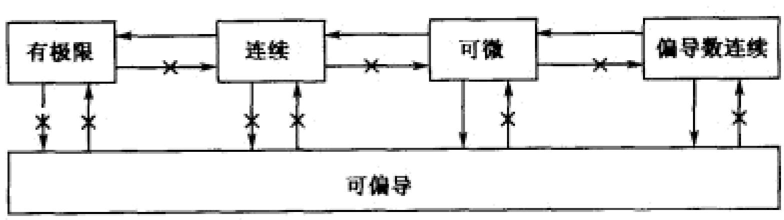


图 8.3.2

对多元函数而言，可微是可偏导的充分条件，但不是必要条件. 可偏导是可微的必要条件，但不是充分条件. 可偏导与连续性(或有极限)是无关条件.

例 8.3.1(2002 年 1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 4 条性质：①连续；②两个偏导数连续；③两个偏导数存在；④可微，则有( ).

(A)②→④→①; (B)④→②→①;

(C)④→③→①; (D)④→①→③.

解 因为对于二元函数有如下蕴涵关系：两个偏导数连续②→可微④→连续①且两个偏导数存在③. 故选(A).

8.3.4 全微分的计算公式

如果函数 $z=f(x,y)$ 可微，则全微分有以下计算公式：

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

或

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

8.3.5 全微分在近似计算中的应用

设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微,且$|\Delta x|$和$|\Delta y|$都很小,则有以下近似公式:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\ &\approx f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

由此公式可得

(1)函数全增量的近似计算公式

$$\Delta z \approx f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y;$$

(2)(x_0,y_0)附近点处的函数值的近似计算公式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

或

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

说明 此公式的右边是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切平面方程.此式表明,我们在点 M 附近可以局部地用切平面近似代替曲面.

特例 取$(x_0,y_0)=(0,0)$,得原点附近的函数值近似计算公式

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y \quad (|x|\text{和}|y|\text{都很小}).$$

8.4 多元复合函数的微分法

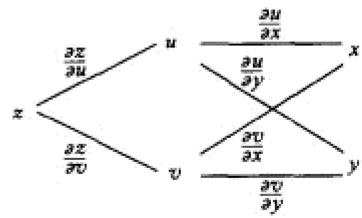
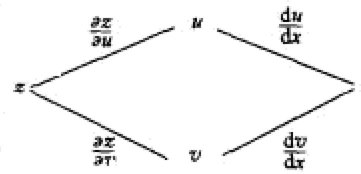
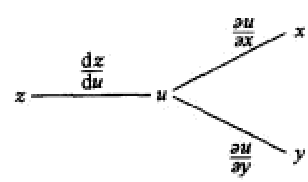
8.4.1 多元复合函数的求导法则:链式法则

1. 链式法则的三种基本类型

多元函数的复合类型很多,但总的说来大体有 3 种复合类型:①多元函数与多元函数的复合(多元套多元);②多元函数与一元函数的复合(多元套一元);③一元函数与多元函数的复合(一元套多元).

下面是这 3 种复合类型所对应的求导法则(表 8.4.1).

表 8.4.1

复合类型	链式法则	示意图	记忆口诀
(1)多元套多元(外函数和内函数都是多元函数) $z=f(u,v)$和$\begin{cases}u=\varphi(x,y),\\ v=\psi(x,y)\end{cases}$ 复合成 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]=z(x,y)$	$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$		沿线相乘，分线相加(先串联，再并联)
(2)多元套一元(外函数是多元函数，内函数是一元函数) $z=f(u,v)$ 和 $\begin{cases}u=\varphi(x),\\ v=\psi(x)\end{cases}$ 复合成 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]=z(x)$ (一元函数)	$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ (全导数)		沿线相乘，分线相加(先串联，再并联)
(3)一元套多元(外函数是一元函数，内函数是多元函数) $z=f(u)$和 $u=\varphi(x,y)$复合成 $z=f[\varphi(x,y)]=z(x,y)$	$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{dz}{du}\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$		沿线相乘

2. 链式法则的结构分析

从以上链式法则可以分析出以下特点：

(1)链式法则公式的个数取决于复合函数的自变量的个数；

(2)每一个公式中所含项数取决于外函数是几元函数(中间变量的个数)；

(3)公式中每一项都是外函数对中间变量的偏导数(或导数)乘以中间变量对指定自变量的偏导数(或导数)(多元函数求偏导数，一元函数求导数).

3. 链式法则的简便写法(不写出中间变量)

同一元函数的链式法则一样，多元函数的链式法则也可以不写出中间变量.

用 f'_1 和 f'_2 分别表示二元函数 $f(u,v)$对第一自变量 u 和第二自变量v 的偏导数，即 $f'_1=f_u$，$f'_2=f_v$. 则链式法则可以用以下简便形式写出(表 8.4.2).

表 8.4.2

复合函数	链式法则
(1)多元套多元 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$	$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\varphi_x+f'_2\psi_x$ $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\varphi_y+f'_2\psi_y$
(2)多元套一元 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$	$\frac{dz}{dx}=f'_1\varphi'+f'_2\psi'$
(3)一元套多元 $z=f[\varphi(x,y)]$	$\frac{\partial z}{\partial x}=f'[\varphi(x,y)]\varphi_x=f'\varphi_x$ $\frac{\partial z}{\partial y}=f'[\varphi(x,y)]\varphi_y=f'\varphi_y$

8.4.2 多元复合函数的二阶偏导数

设有复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\varphi_x+f'_2\psi_x.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f'_1)\varphi_x+f'_1\varphi_{xx}+\frac{\partial}{\partial x}(f'_2)\psi_x+f'_2\psi_{xx}\\&=(f''_{11}\varphi_x+f''_{12}\psi_x)\varphi_x+f'_1\varphi_{xx}+(f''_{21}\varphi_x+f''_{22}\psi_x)\psi_x+f'_2\psi_{xx}.\end{aligned}$$

注 f'_1 和 f'_2 仍是复合函数. 例如，$f'_1=f'_1[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$是 $f_u(u,v)$ 与$\begin{cases}u=\varphi(x,y),\\v=\psi(x,y)\end{cases}$的复合函数. 因此，对 f'_1 和 f'_2 求偏导数时，仍应当用链式法则. 具体地说有以下 4 种情形：

$$\frac{\partial}{\partial x}(f'_1)=f''_{11}\varphi_x+f''_{12}\psi_x,\quad \frac{\partial}{\partial y}(f'_1)=f''_{11}\varphi_y+f''_{12}\psi_y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f'_2)=f''_{21}\varphi_x+f''_{22}\psi_x,\quad \frac{\partial}{\partial y}(f'_2)=f''_{21}\varphi_y+f''_{22}\psi_y.$$

此外，如果二阶偏导数连续，则 $f''_{21}=f''_{12}$.

例 8.4.1(2000 年 1) 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot y+f'_2\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y\left[f''_{11}\cdot x+f''_{12}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f'_2$$

$$+\frac{1}{y}\left[f''_{21}\cdot x+f''_{22}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{x^2}\left(g'+yg''\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=f'_1+xyf''_{11}-\frac{x}{y}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{x}{y}f''_{21}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g'',$$

其中利用了 $f''_{12}=f''_{21}$.

8.4.3 复合函数的全微分——全微分形式不变性

设 $z=f(u,v)$,则无论 u 和 v 是自变量,还是中间变量,都有 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$,这一事实称为全微分形式不变性.

利用全微分形式不变性可以有效地求出复合关系比较复杂的多元函数的全微分和偏导数.在逐步微分的过程中,不论变量之间的关系和复合结构如何错综复杂,都可以不必对因变量、中间变量和自变量进行辨认和区别,而一律作为自变量来对待.

例 8.4.2 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中 f 具有一阶连续偏导数,求 $dz,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}dz=df(x^2-y^2,e^{xy})&=f'_1\cdot d(x^2-y^2)+f'_2\cdot de^{xy}\\&=f'_1(2xdx-2ydy)+f'_2e^{xy}d(xy)\\&=2xf'_1dx-2yf'_1dy+f'_2e^{xy}(ydx+xdy)\\&=(2xf'_1+ye^{xy}f'_2)dx+(-2yf'_1+xe^{xy}f'_2)dy,\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2.$$

例 8.4.3 设 $u=f(x,y,z)$, $y=\varphi(x,t)$, $t=\psi(x,z)$,其中 f,φ,ψ 都有连续偏导数,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 函数的复合过程如下:

$$u=f[x,\varphi(x,t),z]=f[x,\varphi(x,\psi(x,z)),z]=u(x,z).$$

由于复合结构比较复杂,宜用全微分求解,即

$$du=df(x,y,z)=f_xdx+f_ydy+f_zdz.$$

又

$$dy=d\varphi(x,t)=\varphi_xdx+\varphi_tdt,\quad dt=d\psi(x,z)=\psi_xdx+\psi_zdz,$$

将这两个全微分代入第一式,得

$$\begin{aligned}du&=f_xdx+f_y[\varphi_xdx+\varphi_t(\psi_xdx+\psi_zdz)]+f_zdz\\&=(f_x+f_y\varphi_x+f_y\varphi_t\psi_x)dx+(f_y\varphi_t\psi_z+f_z)dz,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x+f_y\varphi_x+f_y\varphi_t\psi_x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=f_y\varphi_t\psi_z+f_z.$$

注 这两个结果也可以从复合关系图 8.4.1 中得出：将图 8.4.1 中 u 到 x 的 3 条路线上各段函数的偏导数“沿线相乘”，再“分线相加”，即可得到$\frac{\partial u}{\partial x}$.

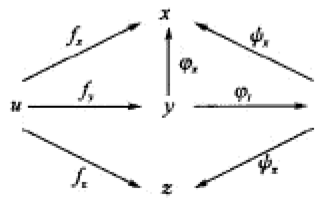


图 8.4.1

8.4.4 偏导数的变量代换

设已知函数 $z=f(x,y)$ 和偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. 现引入新的变量 u,v：

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v) \end{cases}\quad \text{(新变量表示旧变量)}, \qquad (\mathrm{I})$$

要求将 z 对旧变量 x,y 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$用 z 对新变量 u,v 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$表示. 这就是所谓的偏导数的变量代换问题. 求解这类问题有两种方法.

方法一$\left(\text{先求偏导数}\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}\text{，再解出}\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$：

(1)先求出因变量 z 对新自变量 u,v 的偏导数. 将旧自变量 x,y 视为中间变量，利用链式法则求出$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}, \end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u}=\varphi_u\dfrac{\partial z}{\partial x}+\psi_u\dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\varphi_v\dfrac{\partial z}{\partial x}+\psi_v\dfrac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

(2)用克拉默法则解出$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \psi_u \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \psi_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}}=\frac{1}{\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u}\left(\psi_v\frac{\partial z}{\partial u}-\psi_u\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} \varphi_u & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \varphi_v & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}}=\frac{1}{\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u}\left(-\varphi_v\frac{\partial z}{\partial u}+\varphi_u\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

方法二$\left(\text{先解出反函数，再求偏导数}\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$：

(1)由方程组(Ⅰ)解出反函数组

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y) \end{cases} \quad (\text{旧变量表示新变量}). \qquad (\text{Ⅱ})$$

(2)求因变量 z 对旧自变量 x,y 的偏导数．将新自变量 u,v 视为中间变量，利用链式法则求出$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

(3)设法将$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$写成 u,v 的表达式，再代入(2)中的等式右端即可．

例 8.4.4 设 $z=f(x,y)$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，试将$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$用极坐标 ρ 和 θ 表示．

解 将 x,y 作为中间变量，利用链式法则求$\dfrac{\partial z}{\partial \rho},\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \rho}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}(-\rho\sin\theta)+\dfrac{\partial z}{\partial y}(\rho\cos\theta). \end{cases}$$

用克拉默法则解出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial \rho}-\dfrac{\sin\theta}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial \rho}+\dfrac{\cos\theta}{\rho}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}. \end{cases}$$

● 8.5 隐函数的微分法

8.5.1 由一个方程所确定的隐函数的导数和偏导数

1. 隐函数的导数和偏导数公式(表 8.5.1)

表 8.5.1

隐 函 数	导数和偏导数公式
二元方程确定的一元隐函数 $F(x,y)=0 \to y=y(x)$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$
三元方程确定的二元隐函数 $F(x,y,z)=0 \to z=z(x,y)$	$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

注 类似地，若 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $y=y(x,z)$，则

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y},\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}.$$

2. 隐函数的二阶导数(偏导数)公式

(1)设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

(2)设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{F_{xx}F_z^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}F_x^2}{F_z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{F_{yy}F_z^2-2F_{yz}F_yF_z+F_{zz}F_y^2}{F_z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{F_{xy}F_z^2-F_{xz}F_yF_z-F_{yz}F_xF_z+F_{zz}F_xF_y}{F_z^3}.$$

例 8.5.1(1995 年 1) 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{du}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}+f_z\frac{dz}{dx}$，$\frac{dy}{dx}=\cos x$. 方程 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 两端对 x 求导，得 $\varphi'_1\cdot 2x+\varphi'_2\cdot e^y\frac{dy}{dx}+\varphi'_3\frac{dz}{dx}=0$，解出

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\varphi'_3}\left(2x\varphi'_1+e^y\varphi'_2\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi'_2),$$

所以

$$\frac{du}{dx}=f_x+f_y\cos x-\frac{f_z}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi'_2).$$

8.5.2 隐函数求偏导数的方法

设 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 可用以下三种方法求得.

(1)公式法. 用以下公式求出偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

注 F_x,F_y,F_z 分别是三元函数 $F(x,y,z)$ 的 3 个偏导数. 在求 F_x 和 F_y 时，z 都应视为常数.

(2)直接求导法. 方程 $F(x,y,z)=0$ 两端对指定自变量(x 或 y)求偏导数，

此时要将 z 视为函数 $z(x,y)$，将其他自变量视为常数，然后解出所求的偏导数.

(3)全微分法. 方程 $F(x,y,z)=0$ 两端同时全微分，此时 3 个变量都平等地视为独立变量(在这个过程中 z 不能视为 x,y 的函数). 微分成为 $f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y+h(x,y)\mathrm{d}z=0$ 的形式后，再解出 z 的全微分 $\mathrm{d}z=\varphi(x,y)\mathrm{d}x+\psi(x,y)\mathrm{d}y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\psi(x,y)$.

[redacted] 当确定隐函数的方程的复合结构比较复杂时，宜用全微分法求解.

例 8.5.2 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

解 我们用全微分法来求解. 由 $\mathrm{d}F(x,y,t)=0$，即 $F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_t\mathrm{d}t=0$ 解出 $\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{F_t}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y)$. 于是 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x,t)=f_x\mathrm{d}x+f_t\mathrm{d}t=f_x\mathrm{d}x-\dfrac{f_t}{F_t}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y)$，得 $(F_t+f_tF_y)\mathrm{d}y=(f_xF_t-f_tF_x)\mathrm{d}x$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$.

8.5.3 由方程组所确定的隐函数的导数和偏导数

1. 隐函数的导数和偏导数公式

(1) 两个四元方程 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定的两个二元隐函数 $\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y)\end{cases}$ 有以下偏导数公式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)},$$

其中雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix},\qquad \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}f_x & f_y\\g_x & g_y\end{vmatrix}.$$

(2)两个三元方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ (两个曲面的交线)确定的两个一元函数 $\begin{cases}y=y(x),\\z=z(x)\end{cases}$ (两个柱面的交线)有以下导数公式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_z\\G_x & G_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_x\\G_y & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}.$$

2. *求方程组所确定的隐函数的偏导数的方法*

设方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定了隐函数$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y),\end{cases}$则可用以下三种方法求偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

(1)公式法. 用以下公式求出偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

(2)直接求导法. 方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$两端对 x 求偏导数(此时应将 u, v 视为函数, y 视为常数), 得

$$\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2ex]G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-F_x,\\[2ex]G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-G_x.\end{cases}$$

然后用克拉默法则解出$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

同理, 方程组两端对 y 求偏导数, 可解出$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

(3)全微分法. 方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$两端同时全微分(此时, 所有变量 x,y,u,v 都平等地视为独立变量), 得

$$\begin{cases}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_u\mathrm{d}u+F_v\mathrm{d}v=0,\\G_x\mathrm{d}x+G_y\mathrm{d}y+G_u\mathrm{d}u+G_v\mathrm{d}v=0,\end{cases}\ \text{即}\ \begin{cases}F_u\mathrm{d}u+F_v\mathrm{d}v=-F_x\mathrm{d}x-F_y\mathrm{d}y,\\G_u\mathrm{d}u+G_v\mathrm{d}v=-G_x\mathrm{d}x-G_y\mathrm{d}y.\end{cases}$$

然后用克拉默法则解出 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$, 得

$$\begin{cases}\mathrm{d}u=\varphi_1(x,y)\mathrm{d}x+\psi_1(x,y)\mathrm{d}y,\\\mathrm{d}v=\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x+\psi_2(x,y)\mathrm{d}y,\end{cases}$$

则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi_1(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial y}=\psi_1(x,y),\dfrac{\partial v}{\partial x}=\varphi_2(x,y),\dfrac{\partial v}{\partial y}=\psi_2(x,y)$.

[redacted] 以上三种方法中, 全微分法是最简单的, 因为它只须解一个线性方程组就可以求出全部 4 个偏导数.

例 8.5.3 设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 我们用全微分法求解. 方程组两端微分, 得

$$\begin{cases} dx = e^u\, du + \sin v \cdot du + u \cos v \cdot dv, \\ dy = e^u\, du - \cos v \cdot du + u \sin v \cdot dv, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (e^u + \sin v)du + u \cos v \cdot dv = dx, \\ (e^u - \cos v)du + u \sin v \cdot dv = dy, \end{cases}$$

用克拉默法则解出

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & u\cos v \\ dy & u \sin v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & u \cos v \\ e^u - \cos v & u \sin v \end{vmatrix}} = \frac{\sin v \cdot dx - \cos v \cdot dy}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$dv = \frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & dx \\ e^u - \cos v & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & u \cos v \\ e^u - \cos v & u \sin v \end{vmatrix}} = \frac{-(e^u - \cos v)dx + (e^u + \sin v)dy}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

8.5.4 反函数组的雅可比行列式

设函数组$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$确定了反函数组$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$则有

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}, \quad 即 \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

即反函数组的雅可比行列式等于直接函数组的雅可比行列式的倒数.

[redacted] 这是反函数的导数公式$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$的一种推广.

8.6 多元函数微分学的几何应用

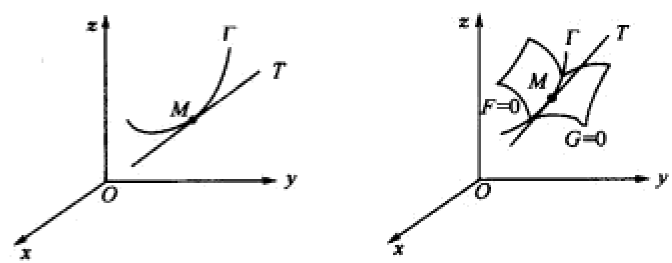
8.6.1 空间曲线的切线与法平面

(1)空间曲线$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases}$(参数式(图 8.6.1(a)))在参数 t_0 所对应的点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$，切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$



(a) (b)

图 8.6.1

(2)空间曲线$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$(交面式(图 8.6.1(b)))在曲线上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切向量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \nabla F \times \nabla G = \{F_x, F_y, F_z\} \times \{G_x, G_y, G_z\} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}},$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}(z-z_0)=0,$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}=0,$$

其中所有偏导数均取自点 M 处．

[redacted] 将两个曲面在点 M 处的法向量(两函数的梯度)作叉积就得到交线的切向量，这是求交线切向量最便捷的方法．

例 8.6.1 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程．

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6, G(x,y,z)=x+y+z$，则在点 $(1,-2,1)$ 处，$\nabla F=\{2x,2y,2z\}=\{2,-4,2\}, \nabla G=\{1,1,1\}$．故曲线在点 $(1,-2,1)$ 处的切向量 $\boldsymbol{T}=\nabla F\times\nabla G=\{2,-4,2\}\times\{1,1,1\}=\{-6,0,6\}$ 或取 $\boldsymbol{T}=\{1,0,-1\}$．于是所求切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$，法平面方程为 $1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$，即 $x-z=0$．

8.6.2 曲面的切平面与法线

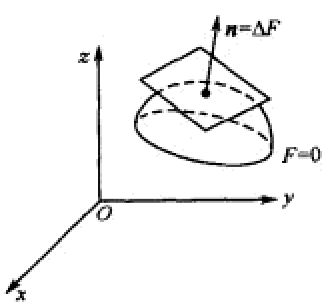


图 8.6.2

(1)曲面 $F(x,y,z)=0$(隐含式)在曲面上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\nabla F=\{F_x,F_y,F_z\}$($F$ 的梯度)，切平面方程为

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z},$$

其中所有偏导数均取自点 M 处(图 8.6.2)．

(2)曲面 $z=f(x,y)$(显含式) 在曲面上一点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{f_x,f_y,-1\}$(方向朝下)或 $\{-f_x,-f_y,1\}$(方向朝上)，切平面方程为

$$z=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0),$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

[redacted] 曲面 $F(x,y,z)=0$ 的法向量就是函数 $F(x,y,z)$ 的梯度：$\boldsymbol{n}=\nabla F$(法向量 = 梯度)．

8.6.3 二次曲面的切平面的简便求法

设二次曲面的切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$．将方程中的平方项 x^2,y^2,z^2 分别换成

x_0x, y_0y, z_0z，将交叉项 xy, yz, zx 分别换成$\frac{1}{2}(x_0y+xy_0)$，$\frac{1}{2}(y_0z+yz_0)$，$\frac{1}{2}(z_0x+zx_0)$，再将一次项 x, y, z 分别换成$\frac{1}{2}(x_0+x)$，$\frac{1}{2}(y_0+y)$，$\frac{1}{2}(z_0+z)$，就得到二次曲面在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程.

二次曲面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切平面为

$$a_{11}x_0x+a_{22}y_0y+a_{33}z_0z+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{13}(x_0z+xz_0)+a_{23}(y_0z+yz_0)+a_{14}(x+x_0)+a_{24}(y+y_0)+a_{34}(z+z_0)+a_{44}=0.$$

一些二次曲面的切平面方程(切点：$M(x_0, y_0, z_0)$)(表 8.6.1).

表 8.6.1

二次曲面	切平面
椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$
球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$	$x_0x+y_0y+z_0z=a^2$
旋转抛物面 $z=x^2+y^2$	$\frac{z+z_0}{2}=x_0x+y_0y$
双曲抛物面 $z=xy$	$z+z_0=y_0x+x_0y$
圆锥面 $z^2=x^2+y^2$	$z_0z=x_0x+y_0y$

例 8.6.2 试求出平面 $lx+my+nz=k$ 成为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充要条件.

解 椭球面在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$. 因此平面 $lx+my+nz=k$ 成为此切平面的充要条件是

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{l}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{m}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{n}=\frac{1}{k}.$$

得 $x_0=\frac{a^2l}{k}, y_0=\frac{b^2m}{k}, z_0=\frac{c^2n}{k}$，将 x_0, y_0, z_0 代入椭球面方程，得 $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=k^2$. 这就是该平面成为椭球面的切平面的充要条件.

8.7 方向导数与梯度

8.7.1 方向导数和梯度的定义

1. 方向导数的定义(图 8.7.1)

函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x, y)$处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{\cos\alpha, \cos\beta\}$的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\cos\beta)-f(x,y)}{\rho}.$$

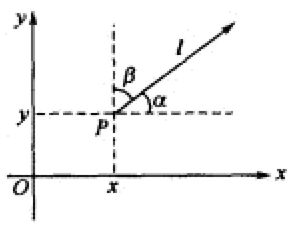


图 8.7.1

2. 梯度的定义

函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度定义为以下向量：

$$\mathbf{grad}\ f=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}.$$

同理，三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\mathbf{grad}\ f=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}.$$

注　grad 是英文 gradient(梯度)的简写 .

3. 梯度的几何意义

梯度 **grad** f 是函数 f 在点 M 处方向导数取得最大值的方向，最大的方向导数为梯度的模，即

$$|\mathbf{grad}\ f|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

8.7.2　方向导数的计算公式

函数 $f(x,y)$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathbf{grad}\ f\cdot\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\mathbf{grad}\ f\cdot\boldsymbol{l}^0\quad 或\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta,$$

其中 $\boldsymbol{l}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$.

方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ 是梯度 **grad** f 在 $\boldsymbol{l}$ 上的投影(图 8.7.2).

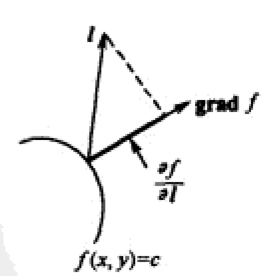


图 8.7.2

同理，函数 $f(x,y,z)$ 在 M 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathbf{grad}\ f\cdot\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\mathbf{grad}\ f\cdot\boldsymbol{l}^0$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\boldsymbol{l}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

[redacted] 用梯度 **grad** f 点乘 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量 $\boldsymbol{l}^0$ 就得到方向导数$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$. 这是计算方向导数最便捷的方法.

例 8.7.1(1992 年 1) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$处的梯度 $\mathbf{grad}\ u\Big|_M=$ ________.

解

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\ln(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)$$
$$=\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}\xlongequal{(1,2,-2)}\frac{2}{9}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-2\mathrm{d}z),$$

得$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{9},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4}{9},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{4}{9}$. 所以 $\mathbf{grad}\ u\Big|_M=\left\{\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9}\right\}$.

例 8.7.2(1996 年 1) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数为________.

解 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\}$, $\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{3}\{2,-2,1\}$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\xlongequal{(1,0,1)}\frac{1}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\xlongequal{(1,0,1)}0$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\xlongequal{(1,0,1)}\frac{1}{2}$, 得 $\mathbf{grad}\ u\Big|_A=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$. 所以,所求的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathbf{grad}\ u\Big|_A\cdot\boldsymbol{l}^0=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}\cdot\frac{1}{3}\{2,-2,1\}=\frac{1}{2}.$$

8.7.3 梯度的运算律(表 8.7.1)

表 8.7.1

梯度的运算律	说 明
(1) $\nabla C=\mathbf{0}$ (C 是常数)	常数的梯度是零向量
(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$ (3) $\nabla(ku)=k\nabla u$ (k 是常数)	梯度的线性性质
(4) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$	积的梯度
(5) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$	商的梯度
(6) $\nabla(f(u))=f'(u)\nabla u$ (7) $\nabla(f(u,v))=f_u\nabla u+f_v\nabla v$	梯度的链式法则

[redacted] 梯度具有与导数相似的运算律.

8.8　多元函数的极值

8.8.1　多元函数极值的必要条件

定理8.8.1(极值的必要条件)　设 $f(x_0, y_0)$为函数 $f(x, y)$的极值，且偏导数 $f_x(x_0, y_0)$和 $f_y(x_0, y_0)$存在，则必有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

推论8.8.1　函数 $f(x, y)$在极值点处的梯度(如果存在)必为零向量：

$$\nabla f(x_0, y_0) = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\} = \mathbf{0}.$$

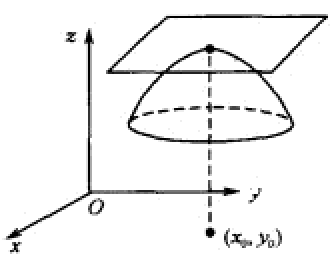


图 8.8.1

极值的几何意义　设函数 $z = f(x, y)$可微且在(x_0, y_0)处有极值，则曲面 $z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处有水平的切平面 $z = f(x_0, y_0)$(图 8.8.1).

驻点　满足方程组 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点(x_0, y_0)称为函数 $f(x, y)$的驻点.

$f(x, y)$的驻点就是使 $f(x, y)$的梯度为零向量的点. 在驻点处，$f(x, y)$沿任何方向的方向导数均为零.

极值的必要条件可重述为：可偏导的极值点必为驻点.

注　(1)极值点不一定是驻点，因为极值点处的偏导数不一定存在. 例如(经典反例)，函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$(圆锥面)的极小值点(0,0)不是函数的驻点(图 8.8.2(a))，因为函数在(0,0)的偏导数不存在.

(2)驻点也不一定是极值点. 例如(经典反例)，函数 $z = xy$(马鞍面)的驻点(0,0)不是函数的极值点(图 8.8.2(b)). (0,0)是 $z = xy$ 的鞍点.

(a)　　　　　　　　(b)

图 8.8.2

注 多元函数非极值点的驻点称为函数的鞍点.

以上二元函数极值的必要条件和驻点的概念同样适用于 n 元函数.

8.8.2 二元函数极值的充分条件

定理 8.8.2(二元函数极值的充分条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 有连续的一阶及二阶偏导数,且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$. 令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$, $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$, 则可按表 8.8.1 中的方式判断 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是否有极值.

表 8.8.1

$AC-B^2>0$		$AC-B^2<0$	$AC-B^2=0$
$A<0$	$A>0$	$f(x_0,y_0)$ 不是极值	$f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另作讨论(此法失效)
$f(x_0,y_0)$ 为极大值	$f(x_0,y_0)$ 为极小值		
注 由 $AC>B^2$ 知,此时 C 与 A 同号		(x_0,y_0) 是曲面的鞍点	

[redacted] 设 (x_0,y_0) 是函数的驻点,则当 $AC-B^2=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}>0$ 时,函数有极值($f_{xx}>0$ 时有极小值, $f_{xx}<0$ 时有极大值);当 $AC-B^2=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}<0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 非极值. 这种叙述方式可以推广成为 n 元函数极值的充分条件(见 8.8.4 节).

8.8.3 求二元函数极值的步骤

二元函数 $z=f(x,y)$ 的极值可按以下步骤求出:

(1)求函数的驻点. 解方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=0,\\ f_y(x,y)=0,\end{cases}$ 得驻点 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$.

(2)求二阶偏导数. $A=f_{xx}$, $B=f_{xy}$, $C=f_{yy}$.

(3)对每一个驻点 (x_i,y_i), 考察 $AC-B^2$ 和 A 的符号,并用极值的充分条件判定 $f(x_i,y_i)$ 是否为极值,是极大值,还是极小值.

(4)对于极值点 (x_i,y_i), 计算出极值 $f(x_i,y_i)$.

例 8.8.1(1991 年 3,4) 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售,售价分别为 p_1 和 p_2,销售量分别为 q_1 和 q_2,需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$,总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$,试问:厂家如何确定两个市场的售价,能使其获得的总利润最大?最大总

利润为多少?

解　总收入函数为

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 - 1395 + 12p_2.$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0,$$

得驻点 $p_1=80, p_2=120$. 又

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial p_1^2} = -0.4, \quad B = \frac{\partial^2 L}{\partial p_1 \partial p_2} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 L}{\partial p_2^2} = -0.1,$$

有 $AC - B^2 = 0.04 > 0$, 且 $A = -0.4 < 0$. 故当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时, 总利润最大, 最大总利润 $L(80,120) = 605$.

8.8.4　多元函数极值的充分条件

设 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有连续的一阶和二阶偏导数, 且在点 $M(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 处

$$\mathbf{grad}\, f(M) = \mathbf{0},$$

即 $f_{xi}(M) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ (M 是函数的驻点).

由 f 的二阶偏导数组成的 n 阶对称矩阵(称为黑塞矩阵)

$$H(M) = [f_{x_ix_j}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \cdots f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \cdots f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} \cdots f_{x_nx_n} \end{bmatrix},$$

则我们有如下结论:

(1)若 $H(M)$ 是正定矩阵, 则 $f(M)$ 是极小值;

(2)若 $H(M)$ 是负定矩阵, 则 $f(M)$ 是极大值;

(3)若 $H(M)$ 是不定矩阵, 则 $f(M)$ 非极值 .

注　以上极值的充分条件涉及线性代数的有关知识. 设有三阶对称阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

则 A 为正定矩阵的条件是 $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $|A| > 0$; A 为负定矩阵的条件

是$a_{11}<0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$, $|A|<0$. 如果 A 既非正定,也非负定,则 A 为不定矩阵.

例 8.8.2 求三元函数 $f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4$ 的极值.

解 先求驻点.

$$\begin{cases} f_x=4x+2y-2=0, \\ f_y=2y+2x-2=0, \\ f_z=2z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点}(0,1,2).$$

在$(0,1,2)$处,$f_{xx}=4$, $f_{xy}=2$, $f_{xz}=0$, $f_{yy}=2$, $f_{yz}=0$, $f_{zz}=2$,得黑塞矩阵

$$H(0,1,2)=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

因为$4>0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4>0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8>0$,故 $H(0,1,2)$为正定矩阵,于是 $f(0,1,2)=-1$ 为函数的极小值.

8.8.5 条件极值 拉格朗日乘数法

1. 有一个约束条件的情形

函数 $z=f(x,y)$(目标函数)在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值是指当点 $P(x,y)$在 xOy 面上的曲线$\varphi(x,y)=0$ 上变动时,相应函数值 $f(x,y)$ 的极值(图 8.8.3).

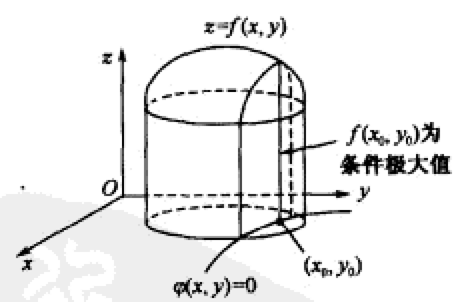


图 8.8.3

求函数 $z=f(x,y)$在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值的方法如下.

方法一(拉格朗日乘数法).

(1)作拉格朗日函数(λ 称为拉格朗日乘数)

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

(2)求三元函数 $F(x,y,\lambda)$的驻点. 解方程组

$$\begin{cases} F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{得驻点}(x_0,y_0,\lambda_0).$$

(3)$f(x_0,y_0)$就是可能的条件极值(如果题目要求求条件极值,则$f(x_0,y_0)$就是要求的条件极值).

[redacted] 拉格朗日乘数法是通过构造拉格朗日函数将二元函数 $f(x,y)$ 的条件极值问题转化为三元函数 $F(x,y,\lambda)$ 的无条件极值问题．

方法二(转化为一元函数的无条件极值问题)．从约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解 $y=y(x)$，则将约束条件 $y=y(x)$ 代入目标函数，得一元函数 $z=f[x,y(x)]$．然后求这个一元函数的极值．

[redacted] 这种方法只有容易从 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=y(x)$ 才能奏效．

2．有两个约束条件的情形

函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 下的条件极值是指当点 $P(x,y,z)$ 在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 的交线上变动时，相应函数值 $f(x,y,z)$ 的极值．

求这种条件极值的步骤如下：

(1)作拉格朗日函数(λ,μ 为拉格朗日乘数)

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z);$$

(2)求五元函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)$ 的驻点 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$；

(3) $f(x_0,y_0,z_0)$ 就是可能的条件极值．

例 8.8.3 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短．

解 解法一．设 $P(x,y)$ 是椭圆上任意一点，则 P 到直线的距离(图 8.8.4)为

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}.$$

为求 d 的最小值，只须求 $(2x+3y-6)^2$ 的最小值．

以 $f(x,y)=(2x+3y-6)^2$ 为目标函数，$x^2+4y^2=4$ 为约束条件，作拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4).$$

由

$$\begin{cases}F_x=4(2x+3y-6)+2\lambda x=0,\\F_y=6(2x+3y-6)+8\lambda y=0,\\F_\lambda=x^2+4y^2-4=0\end{cases}$$

解出 $(x_1,y_1)=\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，$(x_2,y_2)=\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，得 $d\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}}$，$d\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}$．由问题的实际意义，最短距离存在，因此 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 为所求的点．

解法二．在椭圆上距离直线最近(或最远)的点处的切线与该直线平行(图 8.8.5)．设最近(或最远)点为 (x_0,y_0)，则椭圆 $x^2+4y^2=4$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $x_0x+4y_0y=4$．因为切线平行于直线 $2x+3y-6=0$，得 $\frac{x_0}{2}=\frac{4y_0}{3}=t$．将 $x_0=2t$，$y_0=\frac{3t}{4}$ 代入椭圆方程，得 $4t^2+\frac{9t^2}{4}=$

4, 解出 $t=\pm\frac{4}{5}$. 于是$(x_0, y_0)=\left(\pm\frac{8}{5}, \pm\frac{3}{5}\right)$, 经计算$\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$为最近点, $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$为最远点(图 8.8.5).

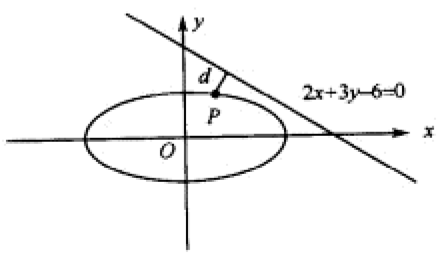


图 8.8.4

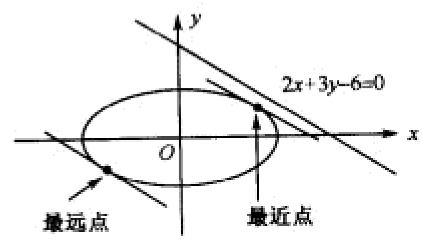


图 8.8.5

第9章 重积分

9.1 二重积分的概念与性质

9.1.1 二重积分的概念

1. 二重积分的定义

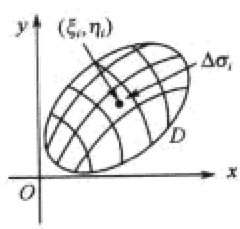


图 9.1.1

定义 9.1.1 函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上的二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 λ 是 $\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$ 的直径的最大者(图 9.1.1).

2. 二重积分的几何意义

设 $f(x,y)\geqslant 0((x,y)\in D)$,则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 等于以D 为底,曲面 $z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积 V(图 9.1.2(a)),即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = V.$$

由二重积分的几何意义可得以下重要公式:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\pi a^3 \quad (\text{上半球体的体积(图 9.1.2(b))}).$$

图 9.1.2

3. 面积元素

$$d\sigma = dxdy \quad (\text{直角坐标系中}),$$
$$d\sigma = r dr d\theta \quad (\text{极坐标系中}).$$

在直角坐标系中(图 9.1.3), 二重积分记作 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, 即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

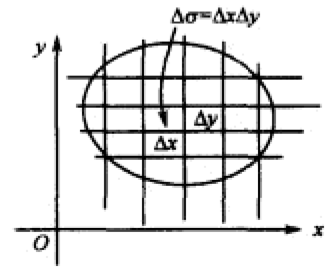


图 9.1.3

9.1.2　二重积分的性质

二重积分具有与定积分类似的性质.这里只列出常用的几个性质(表 9.1.1).

表 9.1.1

性　质	说　明
$\iint\limits_D [f \pm g]d\sigma = \iint\limits_D f d\sigma \pm \iint\limits_D g d\sigma$ $\iint\limits_D kf d\sigma = k\iint\limits_D f d\sigma$	二重积分的线性性质
$\iint\limits_D f d\sigma = \iint\limits_{D_1} f d\sigma + \iint\limits_{D_2} f d\sigma$ $D = D_1 + D_2$	二重积分的区域可加性 
$\iint\limits_D d\sigma = \sigma$ (D 的面积), $\iint\limits_D k d\sigma = k\sigma$	常用性质
若 $f(x,y) \geqslant g(x,y)((x,y) \in D)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geqslant \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$ 特别地, 若 $f(x,y) \geqslant 0((x,y) \in D)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geqslant 0$	二重积分的比较

例 9.1.1 (2005 年 3, 4)　设 $I_1 = \iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, $I_2 = \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$, $I_3 =$

$\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 \mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则(　　).

(A) $I_3>I_2>I_1$; (B) $I_1>I_2>I_3$; (C) $I_2>I_1>I_3$; (D) $I_3>I_1>I_2$.

解 在 D 上, $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$, 故 $(x^2+y^2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$, 得

$$\cos(x^2+y^2)^2\geqslant\cos(x^2+y^2)\geqslant\cos\sqrt{x^2+y^2},$$

且等式仅在 D 的边界上成立, 所以 $I_3>I_2>I_1$. 选(A).

● 9.2 二重积分的计算

9.2.1 利用直角坐标计算二重积分

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是通过将其化为二次定积分来进行计算的. 二次积分的积分次序取决于积分区域 D 的类型.

1. *D 是 X 型区域*

$$D: \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b \quad (图 9.2.1).$$

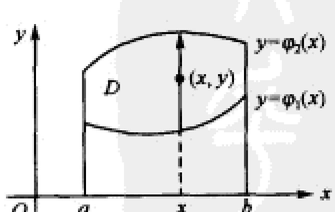
此时, 二重积分用以下公式计算:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

或

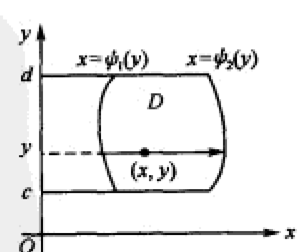
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \quad (积分次序:先 y 后 x).$$

[redacted] 在第一次积分 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 中, 将 x 视为常数, 积分限从下方曲线 $y=\varphi_1(x)$ 到上方曲线 $y=\varphi_2(x)$. 第二次积分的积分限从左端点 a 到右端 b.



X 型区域

图 9.2.1



Y 型区域

图 9.2.2

2. D 是 Y 型区域

$$D: \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant d \quad (\text{图 } 9.2.2).$$

此时，二重积分用以下公式计算：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

或

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \quad (\text{积分次序：先 } x \text{ 后 } y).$$

[redacted] 在第一次积分 $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 中，将 y 视为常数，积分限从左方曲线 $x=\psi_1(y)$ 到右方曲线 $x=\psi_2(y)$. 第二次积分的积分限从下端点 c 到上端点 d.

3. D 是矩形区域

$$D: a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d \quad (\text{图 } 9.2.3).$$

此时，二重积分用以下公式计算：

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

特别地，当 $f(x,y)=g(x)h(y)$ 时，二重积分可化为两个定积分的乘积：

$$\iint\limits_D g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

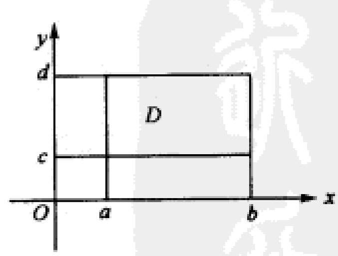


图 9.2.3

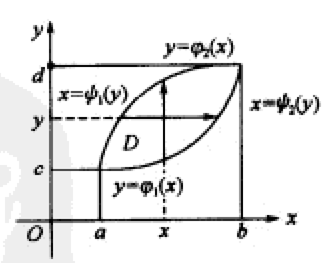


图 9.2.4

4. D 既是 X 型、也是 Y 型区域

$$D: \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), a \leqslant x \leqslant b \text{ 或}$$

$$D:\psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d \quad (图 9.2.4).$$

此时,二重积分可用两种不同次序的二次积分进行计算:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \quad (先\ y\ 后\ x)$$

或

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_2(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x \ (先\ x\ 后\ y).$$

[redacted] 这种情况比较普遍.此时应根据被积函数和 D 的边界曲线的特点选择简单和可行的积分次序.

最后我们指出,如果 D 既非 X 型,也非 Y 型区域,则可以通过添加辅助直线将 D 划分为若干个 X 型或 Y 型区域,再利用二重积分的区域可加性计算二重积分.

例如,图 9.2.5 中区域 D 上的二重积分

$$\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3}f\mathrm{d}\sigma.$$

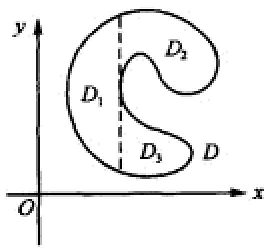


图 9.2.5

9.2.2 计算二重积分的步骤

在直角坐标系中计算二重积分可按以下步骤进行.

(1) 作图:作出积分区域 D 的图形.

(2) 选序:判断 D 的类型并选择相应的积分次序(X 型区域:先 y 后 x, Y 型区域:先 x 后 y.若 D 既是 X 型,又是 Y 型区域,则选择方便、可行的积分次序).

(3) 定限:将二重积分化为二次积分(注意:下限<上限).

(4) 计算:计算二次积分.

例 9.2.1 设 $F(z)=\iint\limits_{\substack{x\geq0,y\geq0\\x+2y\leq z}}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 求 $F(z)$的表达式.

解 积分区域 D 由 $x=0$, $y=0$ 和直线 $x+2y=z$(即 $y=\frac{1}{2}(z-x)$(将 z 暂时看作常数))所围成(图 9.2.6),故

$$\begin{aligned}F(z)&=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(z-x)}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(z-x)}2\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y\\&=-\int_0^z\mathrm{e}^{-x}[\mathrm{e}^{-2y}]_0^{\frac{1}{2}(z-x)}\mathrm{d}x=-\int_0^z\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x-z}-1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}.\end{aligned}$$

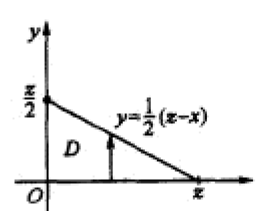


图 9.2.6

9.2.3 交换积分次序

如果积分区域 D 既是 X 型, 也是 Y 型, 则二次积分的积分次序既可以是"先 y 后 x", 也可以是"先 x 后 y". 如果已知某一种积分次序的二次积分, 要求将其改变成另一积分次序的二次积分, 这就是所谓的交换积分次序的问题. 交换积分次序无论是对于二重积分的计算, 还是对于证明积分等式都是很重要的一类题型.

交换积分次序的步骤如下.

(1) 根据已知的二次积分的上、下限作出积分区域 D 的图形(这是交换积分次序的关键步骤), 并确定 D 的类型(是 X 型, 还是 Y 型).

(2) 将 D 视为另一类型的区域, 重新定限即可.

交换二次积分 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序的过程如图 9.2.7 所示.

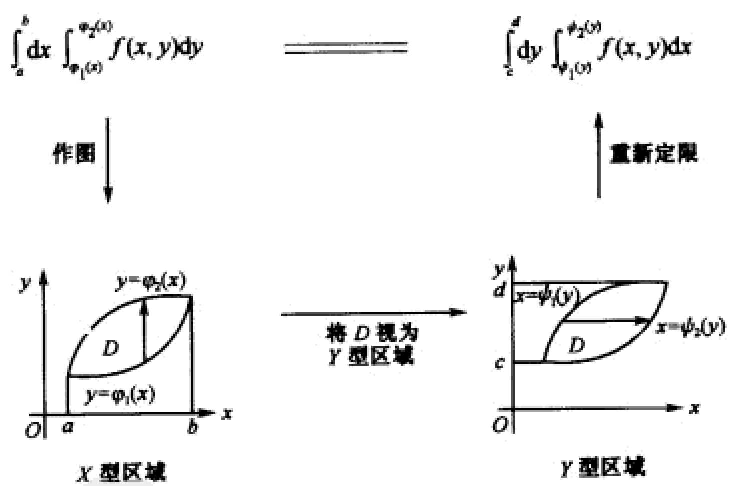


图 9.2.7

如果遇见 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, $\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 等二次积分, 由于 $\int \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y, \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ "积不出"(原函数不是初等函数), 因此必须先交换积分次序才能进行计算.

例 9.2.2 (1988 年 4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$.

解 解法一. 由于 $\int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 无法积出, 须交换积分次序.

积分区域 D(Y 型): $y\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}, 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{6}$ 是一个三角形区域(图 9.2.8). 交换积分次序,

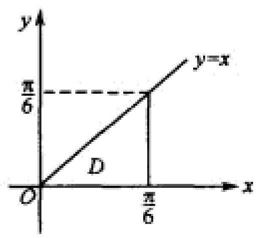


图 9.2.8

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}x\int_0^x \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\cdot x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

解法二. 将 $\int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 视为 y 的函数, 利用分部积分法,

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$= \left[y\int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\mathrm{d}\left(\int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{6}} y\cdot\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

9.2.4　利用对称性化简二重积分

如果积分区域 D 关于坐标轴对称, 被积函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 或 y 有相应的奇偶性, 则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可按以下公式进行化简.

约定: $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数是指 $f(-x,y)\equiv -f(x,y)$, $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数是指 $f(-x,y)\equiv f(x,y)$. $f(x,y)$ 关于 y 的奇(偶)性可类似地定义.

(1) 若 D 关于 y 轴 $(x=0)$ 对称, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}, \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}, \end{cases}$$

其中 $D_1=\{(x,y)\in D\mid x\geqslant 0\}$ 是 D 的右半部分(图 9.2.9).

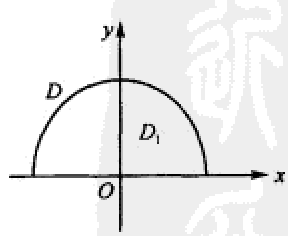


图 9.2.9

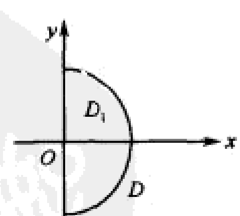


图 9.2.10

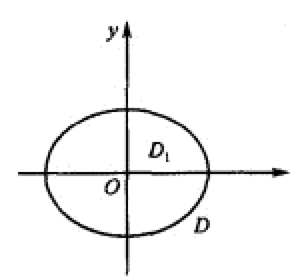


图 9.2.11

(2) 若 D 关于 x 轴 $(y=0)$ 对称, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,y)\text{ 关于 }y\text{ 为奇函数},\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)\text{ 关于 }y\text{ 为偶函数},\end{cases}$$

其中 $D_1=\{(x,y)\in D\mid y\geqslant 0\}$ 为 D 的上半部分(图 9.2.10).

(3) 若 D 关于 x 轴和 y 轴都对称,且 $f(x,y)$关于 x 和 y 均为偶函数,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_1=\{(x,y)\in D\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$是 D 在第一象限部分(图 9.2.11).

(4) 若 D 关于原点对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(-x,-y)\equiv -f(x,y),\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,-y)\equiv f(x,y),\end{cases}$$

其中 D_1 是 D 中关于原点对称的两部分之一(图 9.2.12).

(5) 若 D 关于直线 $y=x$ 对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地, $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 从而有 $\iint\limits_D [f(x)+f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

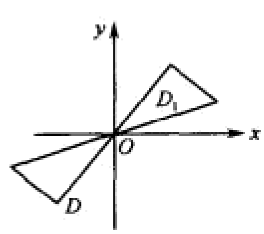


图 9.2.12

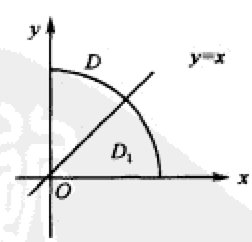


图 9.2.13

(6) 若 D 关于直线 $y=x$ 对称,且 $f(x,y)$关于 x 和 y 也对称(即 $f(x,y)\equiv f(y,x)$),则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_1 是 D 的位于直线 $y=x$ 的一侧的部分(图 9.2.13).

注 不能仅由积分区域 D 的某种对称性就使用以上公式,一定要检查被积函

数 $f(x,y)$是否有相应的奇偶性或对称性. 否则会造成严重错误.

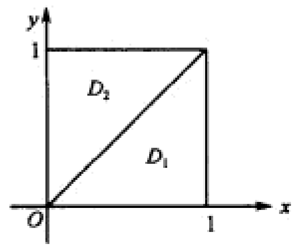


图 9.2.14

例 9.2.3（2002 年 1）　计算 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$.

解　被积函数是 D 上的一个分段函数：

$$e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases}e^{x^2}, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ e^{y^2}, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$, $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$，则 $D=D_1+D_2$(图 9.2.14).

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称, 被积函数 $e^{\max\{x^2,y^2\}}$关于 x 和 y 也对称, 故

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y = 2\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x = e-1.$$

例 9.2.4　计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　由于积分区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 关于 x 轴和 y 轴都对称, 被积函数$|x|+|y|$关于 x 和 y 均为偶函数, 故

$$I = 4\iint\limits_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$(图 9.2.15). 利用极坐标,

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r\cos\theta+r\sin\theta)r\mathrm{d}r \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

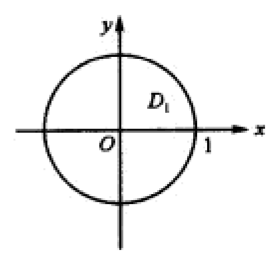


图 9.2.15

例 9.2.5　$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解　因为 $D:x^2+y^2\leqslant R^2$ 关于 $y=x$ 对称, 所以

$$I=\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是 $2I=\iint\limits_D(a+b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a+b)\pi R^2$, $I=\dfrac{1}{2}(a+b)\pi R^2$.

9.2.5　利用极坐标计算二重积分

当积分区域 D 是圆域或圆域的一部分时, 采用极坐标计算二重积分往往比较方便.

二重积分从直角坐标到极坐标的变换公式为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中各部分的变换为

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ \text{面积元素}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

常用的变换还有

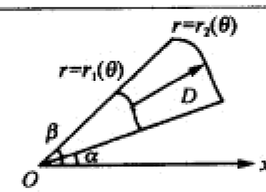
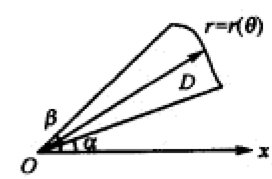
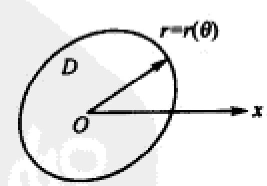
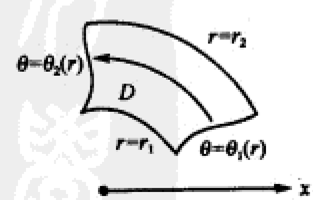
$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta.$$

二重积分 $\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 要进一步化为二次积分来计算. 记 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(r,\theta)$,则二重积分

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_D F(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

可按表 9.2.1 化为二次积分.

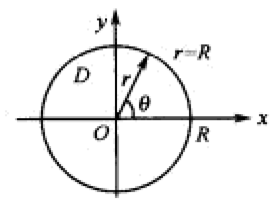
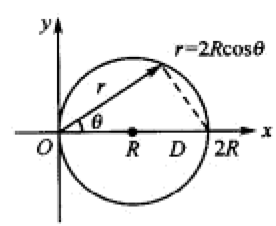
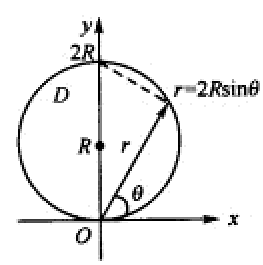
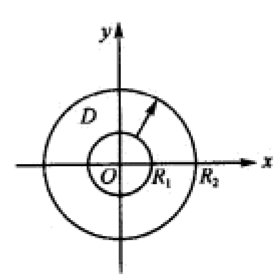
表 9.2.1

积分区域	二次积分	图 形
(1) D 是曲边扇形区域 $D: r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$ $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$	$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} F(r,\theta)r\mathrm{d}r$	
(2) D 是曲边扇形区域 $D: 0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$	$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} F(r,\theta)r\mathrm{d}r$	
(3) D 是包含极点的区域 $D: 0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} F(r,\theta)r\mathrm{d}r$	
(4) D 是以下区域 $D: \theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r)$ $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ (圆环域的一部分)	$\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} F(r,\theta)\mathrm{d}\theta$	

[redacted] 最后一种区域很少见.因此极坐标下的二次积分一般总是先关于 r 积分,再关于 θ 积分.

一些圆域上的二次积分的极坐标形式(表 9.2.2).

表 9.2.2

积分区域	二次积分	图　形
(1) 圆域 $D: x^2+y^2 \leqslant R^2$ $D: 0 \leqslant r \leqslant R$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R F(r,\theta) r dr$	
(2) 圆域 $D: x^2+y^2 \leqslant 2Rx$ $D: 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\theta$ $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} F(r,\theta) r dr$	
(3) 圆域 $D: x^2+y^2 \leqslant 2Ry$ $D: 0 \leqslant r \leqslant 2R\sin\theta$ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$	$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} F(r,\theta) r dr$	
(4) 圆环域 $D: R_1^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R_2^2$ $D: R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} F(r,\theta) r dr$	

[redacted] (1) 若 D 是上(下)半圆域或左(右)半圆域，则只需对 θ 的变化范围作相应调整即可.

(2) 一般地，若二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的积分区域 D 是圆域(或其部分)，而被积函数中含有 x^2+y^2 或 $\dfrac{y}{x}$，则应考虑用极坐标计算二重积分.

例 9.2.6 证明：$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证

$$I^2=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4},$$

所以 $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 9.2.7 (1994 年 1) 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$，求 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 解法一.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left[\frac{(r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r\sin\theta)^2}{b^2}\right]r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

解法二. 由积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，得

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4,$$

所以

$$\text{原式}=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

解法三. 由于积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{交换}x,y}\iint\limits_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$2I=\iint\limits_D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\pi}{2}R^4,$$

$$I=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

9.2.6 二重积分的变量替换

如果在直角坐标系中积分区域 D 的形状“很难看”(不规则)，则可以通过变换

将 xOy 面上的区域 D 映射成另一坐标系 uOv 上的一个“很好看”(规则)的区域 D'.

1．二重积分的变量替换公式

设一对一的变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 将 uOv 坐标面上的闭区域 D' 映射成 xOy 坐标面上的闭区域 D(T 的逆映射 T^{-1} 将 D 映射成 D')，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中各部分的变换方式是

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\quad \text{面积元素 } \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 是变换前后面积的伸缩率，即面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是面积元素 $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 的 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 倍.

2．二重积分变量替换的几个经典例子

(1) 极坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases}$

伸缩率 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$

区域变换(图 9.2.16).

$$D:\underset{(\text{圆域})}{x^2+y^2\leqslant R^2}\ \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftharpoons}}\ D':\underset{(\text{矩形域})}{0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}.$$

积分变换 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$

注　此变换常用来处理 xOy 面上的圆域上的二重积分.

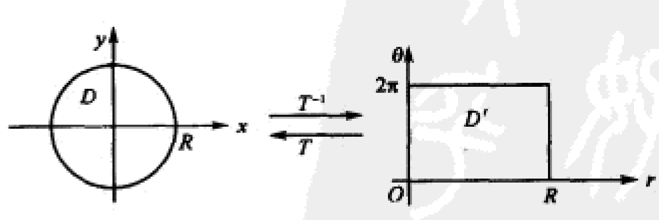


图 9.2.16

(2) 广义极坐标变换 $T:\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta.\end{cases}$

伸缩率 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

区域变换(图 9.2.17)

$$D:\underset{(\text{椭圆域})}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\ \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}}\ D':\underset{(\text{矩形域})}{0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}.$$

积分变换

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(ar\cos\theta,br\sin\theta)abr\mathrm{d}r.$$

注 此变换常用来处理 xOy 面上的椭圆域上的二重积分.

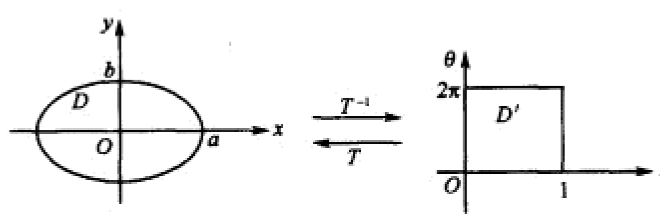


图 9.2.17

(3) 曲线坐标变换 $T^{-1}:\begin{cases}u=\varphi(x,y),\\ v=\psi(x,y).\end{cases}$

伸缩率 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$.

区域变换(图 9.2.18)

$$D:\underset{(\text{曲四边形区域})}{a\leqslant\varphi(x,y)\leqslant b,c\leqslant\psi(x,y)\leqslant d}\ \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}}\ D':\underset{(\text{矩形域})}{a\leqslant u\leqslant b,c\leqslant v\leqslant d}.$$

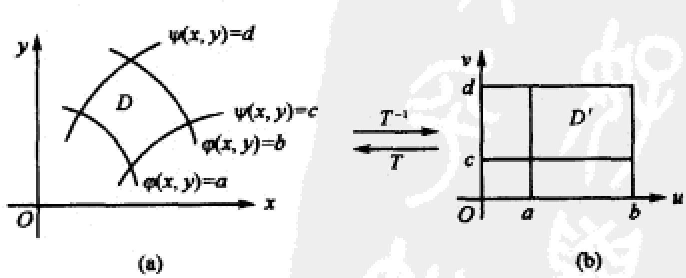


图 9.2.18

积分变换

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant\varphi(x,y)\leqslant b\\ c\leqslant\psi(x,y)\leqslant d}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}u\int_c^d f[x(u,v),y(u,v)]\frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}\mathrm{d}v.$$

特别地，曲四边形 $D: a\leqslant\varphi(x,y)\leqslant b, c\leqslant\psi(x,y)\leqslant d$ 的面积

$$\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}u\int_c^d \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}\mathrm{d}v.$$

注 此变换常用来处理 xOy 面上四条曲线所围成的曲四边形区域上的二重积分.

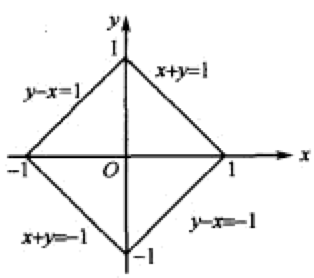


图 9.2.19

例 9.2.8 证明：$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$.

证 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}=\{(x,y)\mid -1\leqslant x+y\leqslant 1, -1\leqslant y-x\leqslant 1\}$（图 9.2.19）.

令 $x+y=u, y-x=v$，则 $D'=\{(u,v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1\}$，且

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(u)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{-1}^1\mathrm{d}v\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$$
$$= \int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

9.3 二重积分的应用

9.3.1 二重积分的几何应用

1. 立体的体积

(1) 以曲面 $z=f(x,y)(f(x,y)\geqslant 0)$ 为顶，区域 D 为底的曲顶柱体的体积（图 9.3.1(a)）

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 设 $f(x,y)\geqslant g(x,y)((x,y)\in D)$，则夹在曲面 $z=f(x,y)$ 和 $z=g(x,y)$ 之间的那部分柱体的体积（图 9.3.1(b)）

$$V=\iint\limits_D [f(x,y)-g(x,y)]\mathrm{d}\sigma.$$

[redacted] 大函数减小函数，再在 D 上积分就是体积.

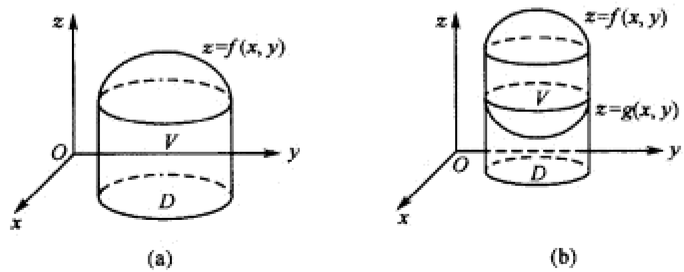


图 9.3.1

2. 曲面的面积

(1) 曲面 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$ 的面积(图 9.3.2(a))

$$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是曲面在 xOy 面上的投影区域.

(2) 曲面 $x=g(y,z)((y,z)\in D_{yz})$ 的面积(图 9.3.2(b))

$$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(3) 曲面 $y=h(z,x)((z,x)\in D_{zx})$ 的面积(图 9.3.2(c))

$$A=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+h_z^2+h_x^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

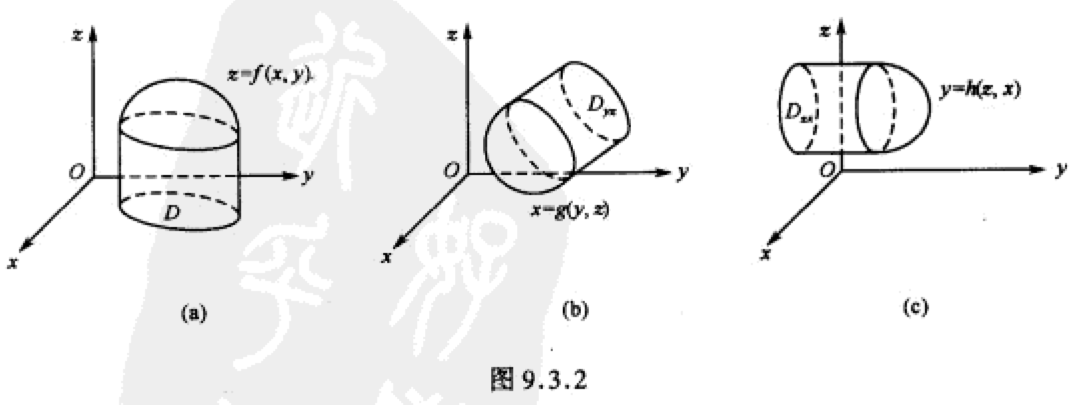
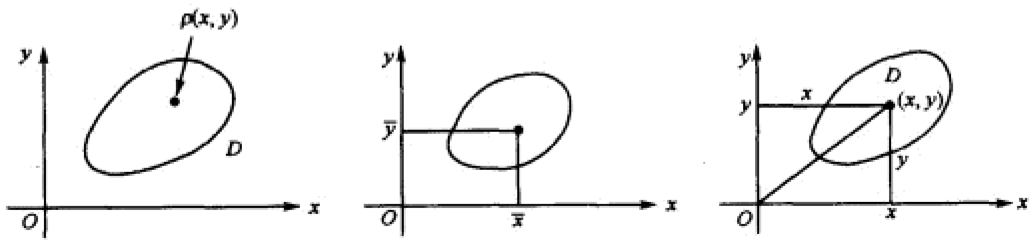


图 9.3.2

9.3.2　二重积分的物理应用

这里列出与平面薄片的质量有关的物理应用.

设平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，薄片在点 $(x, y) \in D$ 处的面密度为 $\rho(x, y)$.



(a) (b) (c)

图 9.3.3

(1) 平面薄片的质量(图 9.3.3(a))：

$$M = \iint_D \rho(x, y) \mathrm{d}\sigma.$$

[redacted] 面密度的积分＝质量.

(2) 平面薄片的重心 $(\bar{x}, \bar{y})$(图 9.3.3(b))：

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x, y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x, y)\mathrm{d}\sigma}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x, y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x, y)\mathrm{d}\sigma}.$$

特例 均匀薄片的形心 $(\bar{x}, \bar{y})$(ρ 是常数)：

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}\sigma, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}\sigma,$$

其中 A 是薄片的面积.

(3) 平面薄片关于 x 轴, y 轴和原点的转动惯量 I_x, I_y 和 I_O(图 9.3.3(c))：

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)\mathrm{d}\sigma, \qquad I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_O = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

[redacted] 公式中的 x^2, y^2 和 $x^2 + y^2$ 分别是点 (x, y) 的旋转半径的平方.

● 9.4 三重积分的概念与计算

9.4.1 三重积分的概念与性质

1. 三重积分的定义

定义 9.4.1 函数 $f(x, y, z)$在区域 Ω 上的三重积分(图 9.4.1)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i.$$

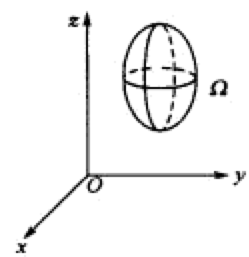


图 9.4.1

2. 三重积分的性质

三重积分的性质与二重积分的性质类似,值得一提的性质是 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = v$($\Omega$ 的体积).

3. 体积元素

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\text{(直角坐标系中)},$$
$$\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\text{(柱面坐标系中)},$$
$$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\text{(球面坐标系中)}.$$

在直角坐标系中,三重积分记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

9.4.2 利用直角坐标计算三重积分

三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是通过将其化为三次定积分来进行计算的.具体作法取决于积分区域 Ω 的类型.

设 Ω 是 XY 型区域:

$$\Omega: z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y), \qquad (x, y) \in D,$$

其中 D 是 Ω 在 xOy 面上的投影区域(图 9.4.2),则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z \quad \text{(“先一后二” 法)}.$$

[redacted] 此法先计算一个定积分 $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$（将 x,y 视为常数），然后再在 Ω 的投影区域D 上计算一个二重积分，故称为“先一后二”法或形象地称为“切条法”或“穿针法”.

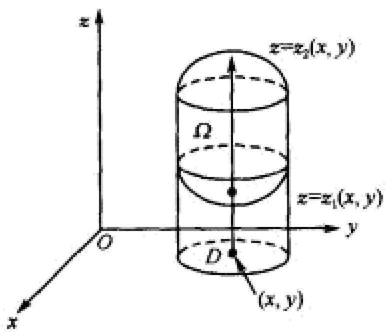


图 9.4.2

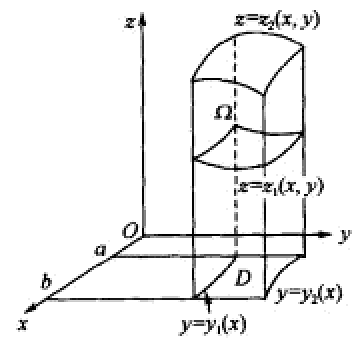


图 9.4.3

如果 D 是X 型区域：$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$（图 9.4.3），则

$$\Omega: z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

那么三重积分可化为三次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

（积分次序：z, y, x）.

如果 D 是 Y 型区域：$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)$, $c\leqslant y\leqslant d$，则三重积分可化为三次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\mathrm{d}x\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

（积分次序：z, x, y）.

9.4.3　三重积分的“先二后一”积分法

设积分区域

$$\Omega = \{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z,\ c_1\leqslant z\leqslant c_2\},$$

其中 D_z 是平面 $z=z$ 与 Ω 的截面在 xOy 面上的投影区域（图 9.4.4），则有以下三重积分的计算公式：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2}\left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

$$= \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{“先二后一”法}).$$

[redacted] 此法先在 D_z 上计算一个二重积分 $\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（将 z 视为常数），然后再计算一个定积分，故称为“先二后一”法或形象地称为“切片法”或“截面法”.

当被积函数 $f(z)$ 仅为 z 的函数（与 x, y 无关），且 D_z 的面积 $\sigma(z)$ 容易求出时，这种方法尤为方便. 因为此时三重积分可化为一个定积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2} f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2} f(z)\sigma(z)\mathrm{d}z.$$

于是求解此类问题的关键就是求出截面 D_z 的面积 $\sigma(z)$ $(c_1\leqslant z\leqslant c_2)$.

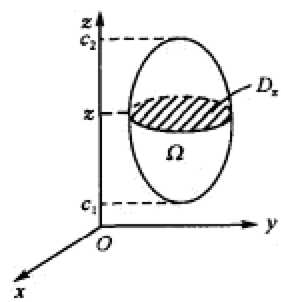


图 9.4.4

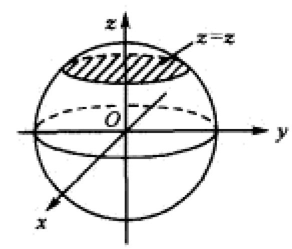


图 9.4.5

例 9.4.1 证明：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\mathrm{d}v = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u$.

证 利用“先二后一”积分法. $\forall z\in[-1,1]$，平面 $z=z$ 截球体的截面的半径 $r_z=\sqrt{1-z^2}$（图 9.4.5），得 D_z 的面积 $\sigma(z)=\pi r_z^2=\pi(1-z^2)$. 于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\mathrm{d}v &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} f(z)\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

9.4.4 利用对称性化简三重积分

如果积分区域 Ω 关于坐标面对称，被积函数 $f(x,y,z)$ 关于相应的自变量有奇偶性，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 可按以下公式进行化简.

约定：$f(x,y,z)$ 关于 z 为奇函数是指 $f(x,y,-z)\equiv -f(x,y,z)$，$f(x,y,z)$ 关于 z 为偶函数是指 $f(x,y,-z)\equiv -f(x,y,z)$. $f(x,y,z)$ 关于 x 和 y 的奇（偶）性可类似地定义.

(1) 若 Ω 关于 xOy 面 $(z=0)$ 对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & f(x,y,z)\text{ 关于 } z \text{ 为奇函数}, \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, & f(x,y,z)\text{ 关于 } z \text{ 为偶函数}, \end{cases}$$

其中 $\Omega_1=\{(x,y,z)\in\Omega \mid z\geqslant 0\}$ 是 Ω 的上半部分.

若 Ω 关于 yOz 面(或 zOx 面)对称, $f(x,y,z)$关于 x(或 y)有奇(偶)性, 也有相应的结论.

(2) 若 Ω 关于三个坐标面都对称, 且 $f(x,y,z)$关于 x,y,z 均为偶函数, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 8\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω_1 是 Ω 在第一卦限部分.

(3) 设 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性(即若$(x,y,z)\in\Omega$, 则将 x,y,z 任意互换后的点也属于Ω), 则被积函数中的自变量可以任意轮换而不改变积分值:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(y,z,x)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(z,y,x)\mathrm{d}v.$$

特别地, $\iiint\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(y)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v$, 从而有

$$\iiint\limits_{\Omega} [f(x)+f(y)+f(z)]\mathrm{d}v = 3\iiint\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}v.$$

例 9.4.2 (1988 年 1) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$; $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$, 则(　　).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$;　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$;　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

解 因为上半球体 Ω_1 关于坐标面 xOz 和 yOz 对称, Ω_2 是 Ω_1 在第一卦限部分, 又函数 $f(x,y,z)=z$ 关于 x 和 y 均为偶函数, 故(C)正确.

因为 x 和 xyz 关于 x 为奇函数, y 关于 y 为奇函数, 故(A), (B)和(D)中等式左端的三重积分为零, 但右端的三重积分不为零, 因此这三个等式不成立.

例 9.4.3 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(lx^2+my^2+nz^2)\mathrm{d}v$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$.

解 由于 Ω 关于 x,y,z 具有轮换对称性, 故

$$I_1 = \iiint\limits_{\Omega} lx^2\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} ly^2\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} lz^2\mathrm{d}v,$$

得 $I_1 = \dfrac{l}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$.

同理,

$$I_2 = \iiint\limits_{\Omega} my^2\mathrm{d}v = \frac{m}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,\ I_3 = \iiint\limits_{\Omega} nz^2\mathrm{d}v = \frac{n}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

所以

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3}(l+m+n)\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$\xlongequal{\text{球面坐标}} \frac{1}{3}(l+m+n)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3}(l+m+n)\cdot\frac{4\pi}{5}a^5 = \frac{4}{15}(l+m+n)\pi a^5.$$

● 9.5 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分

9.5.1 柱面坐标

如果 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D 适合用极坐标处理(如 D 是圆域),则应考虑利用柱面坐标计算三重积分.

(1) 直角坐标与柱面坐标的关系(图 9.5.1)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

其中 $0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, -\infty < z < +\infty$.

基本关系:$x^2+y^2=r^2$.

注 柱面坐标=极坐标+竖坐标.

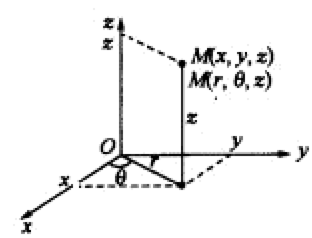
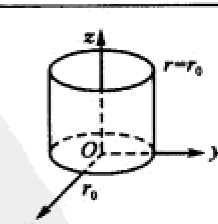
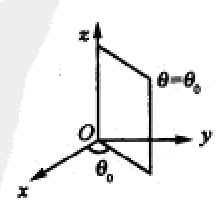


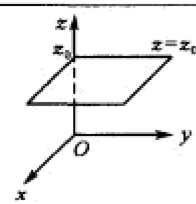
图 9.5.1

(2) 柱面坐标的三组坐标面(表 9.5.1).

表 9.5.1

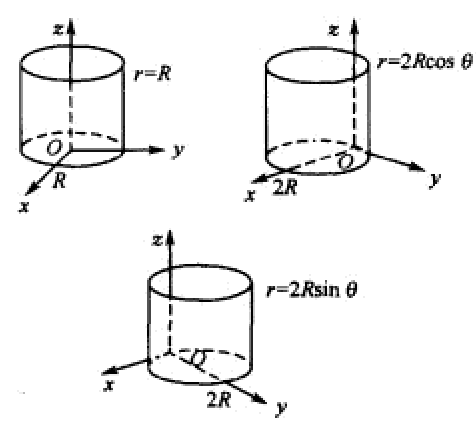
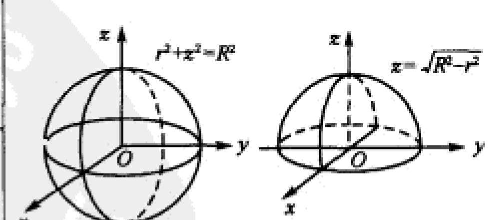
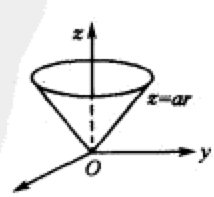
坐标面	说明	图形
$r=r_0$	以 z 轴为轴,半径为 r_0 的圆柱面(柱面坐标因此得名)	
$\theta=\theta_0$	过 z 轴,角度为 θ_0 的半平面	

续表

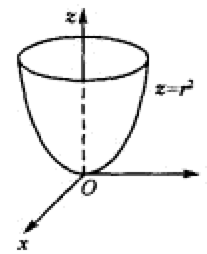
坐标面	说 明	图 形
$z=z_0$	平行于 xOy 面，高度为 z_0 的平面	

(3) 一些曲面的柱面坐标方程(表 9.5.2).

表 9.5.2

曲面名称	直角坐标方程	柱面坐标方程	曲面图形
圆柱面	$x^2+y^2=R^2$	$r=R$	
	$x^2+y^2=2Rx$	$r=2R\cos\theta$	
	$x^2+y^2=2Ry$	$r=2R\sin\theta$	
球面	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$r^2+z^2=R^2$	
	$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	$z=\sqrt{R^2-r^2}$	
圆锥面	$z^2=a^2(x^2+y^2)$	$z^2=a^2r^2$	
	$z=a\sqrt{x^2+y^2}$	$z=ar$	
	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$z=r$	

续表

曲面名称	直角坐标方程	柱面坐标方程	曲面图形
旋转抛物面	$z=x^2+y^2$	$z=r^2$	

9.5.2 利用柱面坐标计算三重积分

(1) 三重积分从直角坐标到柱面坐标的变换公式.

三重积分从直角坐标到柱面坐标的变换公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

其中各部分的变换为

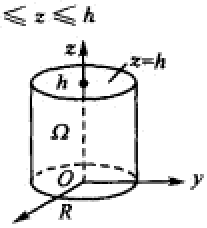
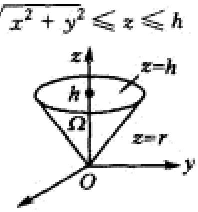
$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z,\quad 体积元素\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

(2) 将柱面坐标下的三重积分化为三次积分.

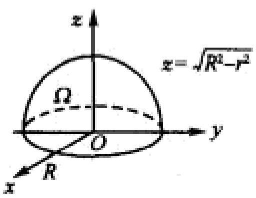
三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ 要进一步化为三次积分来计算.

表 9.5.3 中是一些常见区域的柱面坐标三次积分(记 $f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = F(r,\theta,z)$).

表 9.5.3

积分区域	直角坐标刻画	柱面坐标刻画	三次积分
圆柱体	$\Omega: x^2+y^2\leqslant R^2$ $0\leqslant z\leqslant h$ 	$\Omega: 0\leqslant z\leqslant h$ $0\leqslant r\leqslant R$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^h F(r,\theta,z)r\mathrm{d}z$
圆锥体	$\Omega: \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant h$ 	$\Omega: r\leqslant z\leqslant h$ $0\leqslant r\leqslant h$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\mathrm{d}r\int_r^h F(r,\theta,z)r\mathrm{d}z$

续表

积分区域	直角坐标刻画	柱面坐标刻画	三次积分
半球体	$\Omega: 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 	$\Omega: 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2 - r^2}$ $0 \leqslant r \leqslant R$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} F(r,\theta,z) r dz$

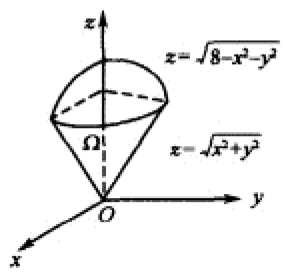


图 9.5.2

例 9.5.1 计算三重积分 $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z dz$.

解 直接计算很困难，下面分别用柱面坐标和球面坐标来计算. 积分区域是圆锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 和上半球面 $z = \sqrt{8-x^2-y^2}$ 所围成的球顶锥体在第一卦限部分(图 9.5.2).

用柱面坐标,

$$\Omega = \left\{(r,\theta,z) \mid r \leqslant z \leqslant \sqrt{8-r^2}, 0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\},$$

所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r dr \int_r^{\sqrt{8-r^2}} z dz = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r \cdot \frac{1}{2}[(8-r^2) - r^2] dr = 2\pi.$$

用球面坐标计算,

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = 2\pi.$$

9.5.3 球面坐标

当 Ω 为球体或其部分时，用球面坐标计算三重积分比较方便.

(1) 直角坐标与球面坐标的关系(图 9.5.3)

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

其中 $0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

基本关系：$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

注 点 $M(r,\varphi,\theta)$ 的球面坐标中，r 是 M 到原点的距离，φ 是 M 的纬度，θ 是 M 的经度.

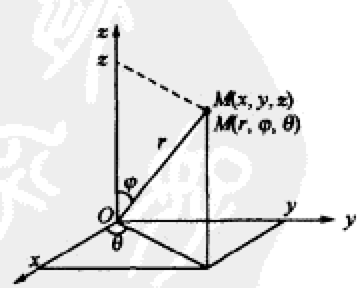
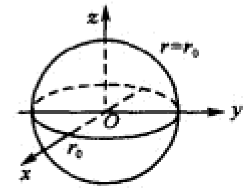
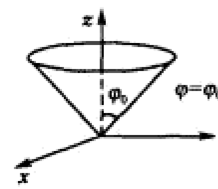
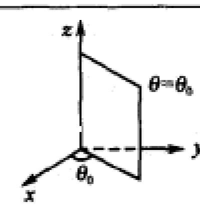


图 9.5.3

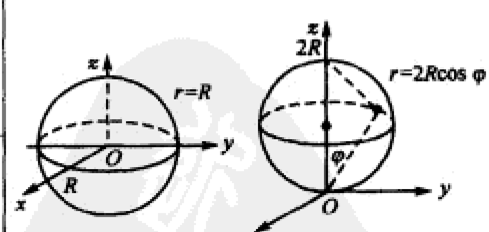
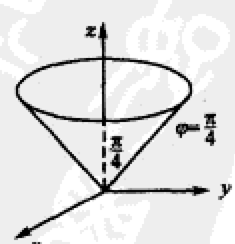
(2) 球面坐标的三组坐标面(表 9.5.4).

表 9.5.4

坐标面	说　明	图　形
$r=r_0$	以原点为球心，半径为 r_0 的球面（球面坐标因此得名）	
$\varphi=\varphi_0$	以原点为顶点，半顶角为 φ_0 的圆锥面	
$\theta=\theta_0$	过 z 轴，角度为 θ_0 的半平面	

(3) 一些曲面的球面坐标方程(表 9.5.5).

表 9.5.5

曲面名称	直角坐标方程	球面坐标方程	曲面图形
球面	$x^2+y^2+z^2=R^2$	$r=R$	
	$x^2+y^2+z^2=2Rz$	$r=2R\cos\varphi$	
圆锥面	$z=\tan\alpha\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\alpha$	
	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$\varphi=\frac{\pi}{4}$	

9.5.4　利用球面坐标计算三重积分

(1) 三重积分从直角坐标到球面坐标的变换公式.

三重积分从直角坐标到球面坐标的变换公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

其中各部分的变换为

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\varphi.$$

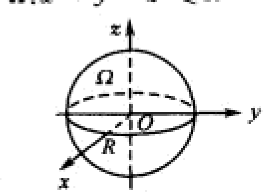
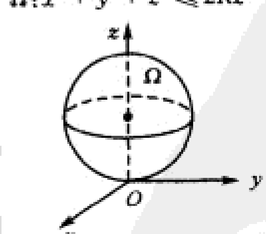
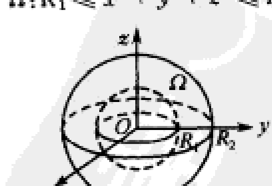
体积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

(2) 将球面坐标下的三重积分化为三次积分.

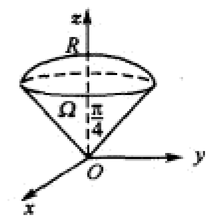
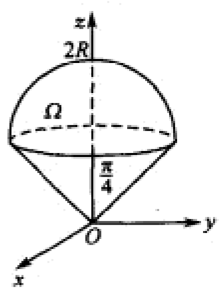
三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ 要进一步化为三次积分来计算.

表 9.5.6 中是一些常见区域的球面坐标三次积分(记 $f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) = F(r,\varphi,\theta)$).

表 9.5.6

积分区域	直角坐标刻画	球面坐标刻画	三次积分
球体	$\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 	$\Omega: 0 \leqslant r \leqslant R$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$
	$\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$ 	$\Omega: 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$
两个同心球体之差	$\Omega: R_1^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R_2^2$ 	$\Omega: R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{R_1}^{R_2}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

续表

积分区域	直角坐标刻画	球面坐标刻画	三次积分
球顶锥体	Ω: $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 	$\Omega: 0 \leqslant r \leqslant R$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R F(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\varphi dr$
	Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 所围成. 	$\Omega: 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$	$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} F(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\varphi dr$

注 若 Ω 为球体或锥体的一部分，则对 φ 和 θ 的变化范围作相应调整即可.

例 9.5.2 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 f 为连续函数，$f'(0)$存在且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}$.

解 利用球面坐标，

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr = 4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)dr,$$

于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{5t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi t^2 f(t^2)}{5t^4}=\frac{4\pi}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)}{t^2}$$

$$=\frac{4\pi}{5}\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2}=\frac{4\pi}{5}f'(0)=\frac{4\pi}{5}.$$

9.5.5 选择适当的坐标计算三重积分的方法

三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 有较多的计算方法，我们应当如何去选择适

当的计算方法呢？

首先应将积分区域 Ω 投影到 xOy 面上，得投影区域 D.

(1) 如果 D 是 X 型或 Y 型区域，则可选择直角坐标计算三重积分（当 Ω 的边界曲面中有较多的平面时，常用直角坐标计算）.

(2) 如果 D 是圆域（或其部分），且被积函数形如 $f(x^2+y^2)$, $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 时，则可选择柱面坐标计算三重积分（当 Ω 为圆柱体或圆锥体时，常用柱面坐标计算）.

(3) 如果 Ω 是球体或球顶锥体，且被积函数形如 $f(x^2+y^2+z^2)$ 时，则可选择球面坐标计算三重积分.

9.5.6　三重积分的变量替换

(1) 三重积分的变量替换公式.

设一对一的变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ 将坐标系 $Ouvw$ 中的闭区域 Ω' 映射成坐标系 $Oxyz$ 中的区域 Ω（T 的逆映射 T^{-1} 将 Ω 映射成 Ω'），则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint\limits_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

(2) 三重积分变量替换的几个经典例子（表 9.5.7）.

表 9.5.7

变　换	伸缩率	说　明
柱面坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$	$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$	用于圆柱体上的三重积分
球面坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$	$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$	用于球体上的三重积分
广义球坐标变换（椭球面坐标变换） $T:\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$	$J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi$	用于椭球体上的三重积分

例 9.5.3 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 作广义球坐标变换：

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = cr\cos\varphi,$$

则 $\Omega'=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$. 所以

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{\Omega'} r^2\cdot abcr^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\ &= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi abc;\end{aligned}$$

9.5.7 三重积分的物理应用

这里只列出与空间物体的质量有关的物理应用.

设物体占有空间区域 Ω，物体在点 $(x,y,z)\in\Omega$ 处的密度为 $\rho(x,y,z)$（图 9.5.4）.

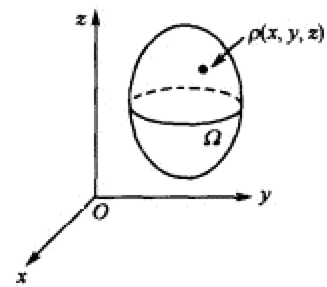


图 9.5.4

(1) 物体的质量

$$M = \iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

[redacted] 密度的积分 = 质量.

(2) 物体的重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$：

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}v},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}v},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}v}.$$

特例 均匀物体的形心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$（$\rho$ 是常数）：

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v,\qquad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v,\qquad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v,$$

其中 V 是物体的体积.

(3) 物体关于 xOy 面，x 轴和原点的转动惯量 I_{xy}, I_x 和 I_O：

$$I_{xy}=\iiint\limits_{\Omega}z^2\rho\mathrm{d}v,\quad I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho\mathrm{d}v,$$

$$I_O=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho\mathrm{d}v.$$

[redacted] 公式中的 z^2, y^2+z^2 和 $x^2+y^2+z^2$ 分别是点 (x,y,z) 的旋转半径的平方.

第10章 曲线积分与曲面积分

10.1 对弧长的曲线积分

10.1.1 对弧长的曲线积分的概念

1. 对弧长的曲线积分的定义

定义 10.1.1 函数 $f(x,y)$在平面曲线 L 上对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为弧微分(图 10.1.1).

同理,函数 $f(x,y,z)$在空间曲线 L 上对弧长的积分为

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

注 对弧长的曲线积分也称为第一类曲线积分.

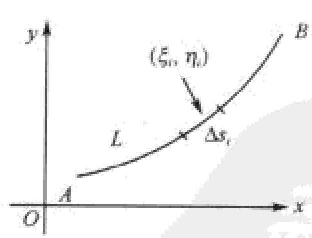


图 10.1.1

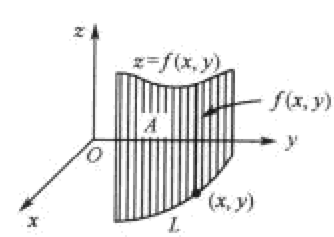


图 10.1.2

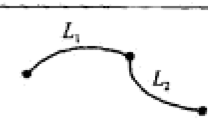
2. 对弧长的曲线积分的几何意义

设 $f(x,y)\geqslant 0$,则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 表示以 L 为准线,母线平行于 z 轴的柱面夹在 $z=0$ 和 $z=f(x,y)$之间那部分面积 A(图 10.1.2),即

$$A = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$$

10.1.2　对弧长的曲线积分的性质(表 10.1.1)

表 10.1.1

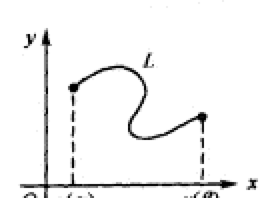
性　质	说　明
$\int_L (f \pm g)\mathrm{d}s = \int_L f\mathrm{d}s \pm \int_L g\mathrm{d}s$ $\int_L kf\mathrm{d}s = k\int_L f\mathrm{d}s$	曲线积分的线性性质
$\int_L f\mathrm{d}s = \int_{L_1} f\mathrm{d}s + \int_{L_2} f\mathrm{d}s$ $L = L_1 + L_2$	 曲线积分的分段可加性
$\int_L \mathrm{d}s = s$(L 的弧长)	常用性质
若曲线 L 的方程为 $f(x,y)=k$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L k\mathrm{d}s = ks$ s 为 L 的弧长	例如,设 L 的方程为 $x^2+y^2=a^2$,则 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{e}^a\mathrm{d}s = 2\pi a\mathrm{e}^a$.

$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 表示闭曲线 L 上的曲线积分.

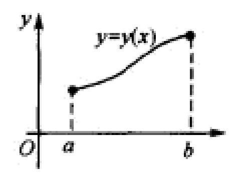
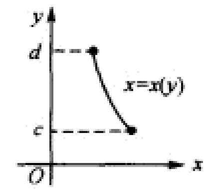
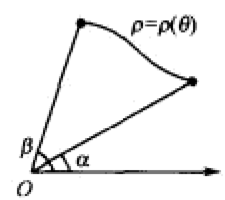
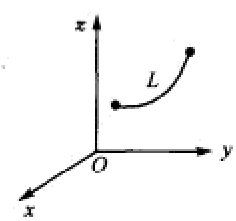
10.1.3　对弧长的曲线积分的计算

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 是通过将其化为定积分来进行计算的,计算公式取决于曲线 L 的方程的类型.基本原则是:①将曲线方程中的 x 和 y 代入被积函数 $f(x,y)$;②将弧微分的表达式代入积分式中的 $\mathrm{d}s$.具体计算公式如表 10.1.2 所示.

表 10.1.2

对弧长的曲线积分的计算公式	图　示
(1) 参数方程 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$　$(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$	

续表

对弧长的曲线积分的计算公式	图示
(2) 直角坐标方程 $L: y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$	
(3) 直角坐标方程 $x=x(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y$	
(4) 极坐标方程 $L:\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$	
(5) 参数方程(空间曲线)$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\\ z=\omega(t)\end{cases}$ 弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t$ $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t$	

10.1.4　对弧长的曲线积分化为定积分的步骤

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 化为定积分的步骤如下.

(1) 作出曲线 L 的图形.

(2) 写出曲线 L 的方程,并指出参数变化的范围,然后确定定积分的下限和上限(注意:下限一定要小于上限).

(3) 根据曲线 L 的方程的类型写出相应的弧微分 $\mathrm{d}s$ 的表达式.

(4) 因为被积函数 $f(x,y)$中的点(x,y)是在曲线 L 上变动,因此点(x,y)必须满足 L 的方程.所以,要将 L 的方程中 x 和 y 的表达式代入被积函数.

(5) 最后写出曲线积分的定积分计算公式并计算定积分.

例 10.1.1　求 $\oint_L x^2\mathrm{d}s$, 其中 $L: x^2+y^2=1$.

解 解法一(直接计算). L 的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$(图 10.1.3), $ds=\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}d\theta=d\theta$, 所以

$$\oint_L x^2 ds = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\theta)d\theta = \pi.$$

解法二(利用对称性). 曲线 L 关于直线 $y=x$ 对称, 故 $\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds$, 于是

$$\oint_L x^2 ds = \frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)ds = \frac{1}{2}\oint_L ds = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

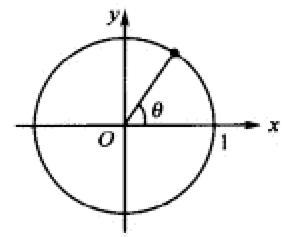


图 10.1.3

10.1.5 利用对称性化简对弧长的曲线积分

如果积分曲线 L 关于坐标轴对称, 被积函数 $f(x,y)$关于自变量 x 或 y 有相应的奇(偶)性, 则对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 可按以下公式进行化简(函数 $f(x,y)$关于自变量的奇(偶)性的定义见 9.2.4 节).

(1) 若 L 关于 y 轴($x=0$)对称, 则

$$\int_L f(x,y)ds = \begin{cases}0, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 为奇函数},\\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, & f(x,y)\text{ 关于 } x \text{ 为偶函数},\end{cases}$$

其中 L_1 为 L 的右半部分(图 10.1.4).

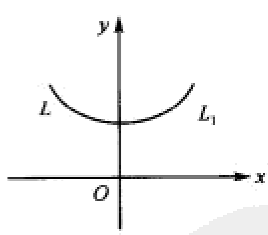


图 10.1.4

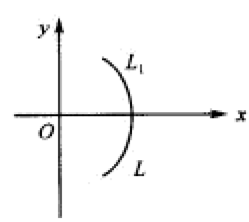


图 10.1.5

(2) 若 L 关于 x 轴($y=0$)对称, 则

$$\int_L f(x,y)ds = \begin{cases}0, & f(x,y)\text{ 关于 } y \text{ 为奇函数},\\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, & f(x,y)\text{ 关于 } y \text{ 为偶函数},\end{cases}$$

其中 L_1 为 L 的上半部分(图 10.1.5).

(3) 若 L 关于 x 轴和 y 轴都对称, 且 $f(x,y)$关于 x 和 y 均为偶函数, 则

$$\int_L f(x,y)ds = 4\int_{L_1} f(x,y)ds,$$

其中 L_1 为 L 在第一象限部分(图 10.1.6).

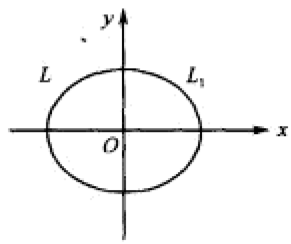


图 10.1.6

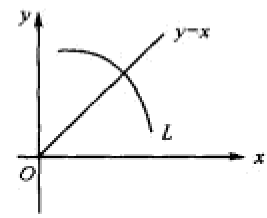


图 10.1.7

(4) 若 L 关于直线 $y=x$ 对称(图 10.1.7),则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\mathrm{d}s.$$

特别地,$\int_L f(x)\mathrm{d}s = \int_L f(y)\mathrm{d}s$,从而有$\int_L [f(x)+f(y)]\mathrm{d}s = 2\int_L f(x)\mathrm{d}s$.

(5) 若空间闭曲线 L 的方程$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$关于三个变量 x,y,z 具有轮换对称性(即对换任意两个变量,方程不变.),则有

$$\oint_L f(x)\mathrm{d}s = \oint_L f(y)\mathrm{d}s = \oint_L f(z)\mathrm{d}s,$$

从而有 $\oint_L [f(x)+f(y)+f(z)]\mathrm{d}s = 3\oint_L f(x)\mathrm{d}s$.

例 10.1.2 (1998 年 1)　设 L 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$ = __________.

解　因为 L 关于 y 轴对称,而 $2xy$ 关于 x 为奇函数,故 $\oint_L 2xy\mathrm{d}s = 0$. 又 L 的方程满足 $3x^2+4y^2=12$,故

$$\text{原式} = \oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = \oint_L 12\mathrm{d}s = 12\oint_L \mathrm{d}s = 12a.$$

例 10.1.3　计算曲线积分 $I = \oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s$,其中 Γ 为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解　曲线 Γ 为半径为 R 的圆周,其方程关于变量 x,y,z 具有轮换对称性,故

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s &= \oint_\Gamma y^2\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma R^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}R^2\oint_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{1}{3}R^2\cdot 2\pi R = \frac{2}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

10.1.6 对弧长的曲线积分的应用

1. 柱面的面积(图 10.1.8)

$$A = \int_L f(x, y)\mathrm{d}s.$$

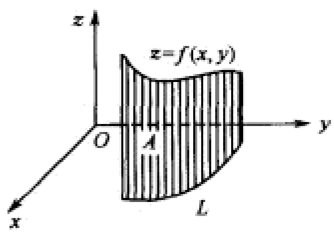


图 10.1.8

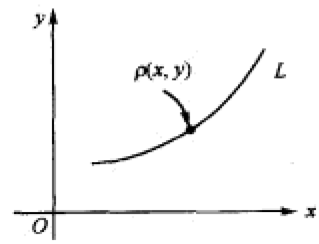


图 10.1.9

2. 与质量有关的物理应用

设曲线形构件占有曲线 L 的位置,构件在点$(x, y)\in L$ 处的线密度为 $\rho(x, y)$(图 10.1.9).

(1) 构件的质量:

$$M = \int_L \rho(x, y)\mathrm{d}s.$$

(2) 构件的重心$(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\rho\mathrm{d}s}{\int_L \rho\mathrm{d}s}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\rho\mathrm{d}s}{\int_L \rho\mathrm{d}s}.$$

(3) 构件关于 x 轴, y 轴和原点的转动惯量 I_x, I_y 和 I_O:

$$I_x = \int_L y^2\rho\mathrm{d}s, \quad I_y = \int_L x^2\rho\mathrm{d}s, \quad I_O = \int_L (x^2 + y^2)\rho\mathrm{d}s.$$

公式中的 y^2, x^2 和 $x^2 + y^2$ 分别是点(x, y)的旋转半径的平方.

10.1.7 对弧长的曲线积分的其他物理应用

这一节的内容仅供对物理问题感兴趣的读者参考.

1. 平面流体的流量

平面流速场 $\boldsymbol{v}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 在单位时间流过曲线 L 的流量

(流体面积)

$$\Phi = \int_L (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta) \mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 是 L 指定一侧的单位法向量(图 10.1.10).

2. 环流量

平面流速场 $\boldsymbol{v}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 在单位时间沿闭曲线 L 的环流量

$$\mu = \oint_L (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathrm{d}s = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta) \mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 是 L 指定方向的单位切向量(图 10.1.11).

3. 变力沿曲线所做的功

力场 $\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 沿曲线 L 所做的功

$$W = \int_L (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta) \mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 是 L 指定方向的单位切向量(图 10.1.12).

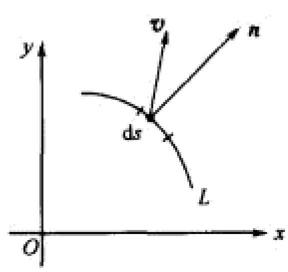


图 10.1.10

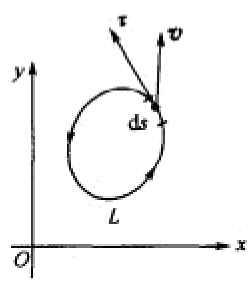


图 10.1.11

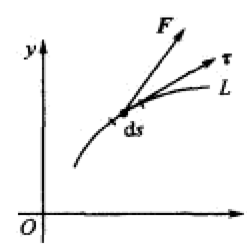


图 10.1.12

● 10.2　对坐标的曲线积分

10.2.1　对坐标的曲线积分的概念

定义 10.2.1　函数 $P(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的曲线积分(图 10.2.1)

$$\int_L P(x, y) \mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

函数 $Q(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x, y) \mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

注 对坐标的曲线积分也称为第二类曲线积分.

记

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

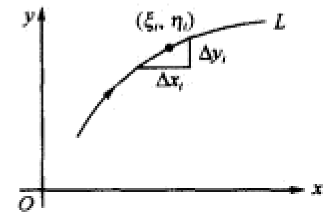


图 10.2.1

其向量形式为

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L \{P, Q\} \cdot \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\} = \int_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{A} = \{P, Q\}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$. 因此, 对坐标的曲线积分也称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的曲线积分.

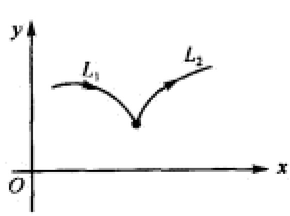
类似地, 可以定义空间有向曲线 L 上对坐标的曲线积分. 设 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, 则

$$\int_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i].$$

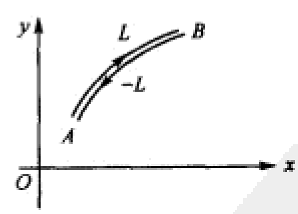
10.2.2 对坐标的曲线积分的性质

(1) 曲线积分的分段可加性. 若 $L = L_1 + L_2$(图 10.2.2(a)), 则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$



(a)



(b)

图 10.2.2

(2) 设 $-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线(图 10.2.2(b)), 则

$$\int_{-L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

或

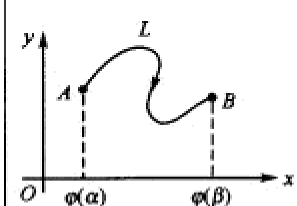
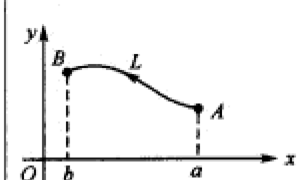
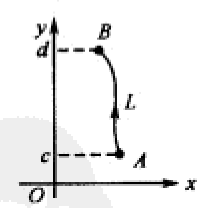
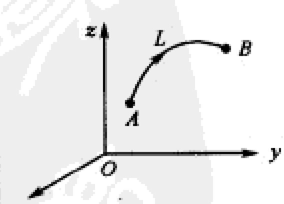
$$\int_{\overset{\frown}{BA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

即改变曲线的方向，曲线积分变号.

10.2.3 对坐标的曲线积分的计算

对坐标的曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是通过将其化为定积分来进行计算的，计算公式取决于曲线 L 的方程的类型. 基本原则是：① 将曲线方程中的 x 和 y 代入被积函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$；② 将曲线方程中的 x 和 y 的微分代入公式中的 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$；③ 以 L 的起点和终点的参数作为定积分的下限和上限. 具体的计算公式如表 10.2.1 所示.

表 10.2.1

对坐标的曲线积分的计算公式	图　示
(1) 参数方程 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(t:\alpha\to\beta)$ $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ $=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$	
(2) 直角坐标方程 $y=y(x)(x:a\to b)$ $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\mathrm{d}x$	
(3) 直角坐标方程 $L:x=x(y)(y:c\to d)$ $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\{P[x(y),y]x'(y)+Q[x(y),y]\}\mathrm{d}y$	
(4) 参数方程(空间曲线)$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)(t:\alpha\to\beta)\\ z=\omega(t)\end{cases}$ $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ $=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$ $+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$	

10.2.4 对坐标的曲线积分化为定积分的步骤

对坐标的曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 化为定积分的步骤如下：

(1) 作出曲线 L 的图形，并标出曲线的方向；

(2) 写出曲线 L 的方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$，并指出有向曲线 L 的起点和终点的参数 α 和 β (记作 $t:\alpha\to\beta$)(注意：α 不一定小于 β)；

(3) 将 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 以及 $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t, \mathrm{d}y=\psi'(t)\mathrm{d}t$ 代入积分表达式，并以 α 为下限，β 为上限写出定积分.

注 与第一类曲线积分一样，被积函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 中的点 (x,y) 在曲线 L 上变动，因此点 (x,y) 必须满足 L 的方程.

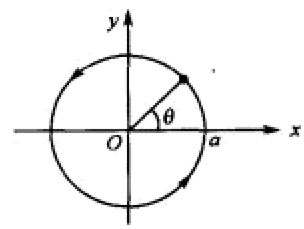


图 10.2.3

例 10.2.1 计算 $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(逆时针方向).

解 圆的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta(\theta:0\to2\pi)$(图 10.2.3).

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}[a(\cos\theta+\sin\theta)(-a\sin\theta)-a(\cos\theta-\sin\theta)a\cos\theta]\mathrm{d}\theta=-2\pi.$$

10.2.5 对坐标的曲线积分的应用

1. 变力沿曲线所做的功

力场 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿有向曲线 L 所做的功(图 10.2.4)

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

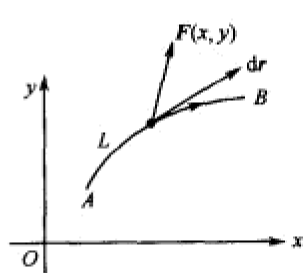


图 10.2.4

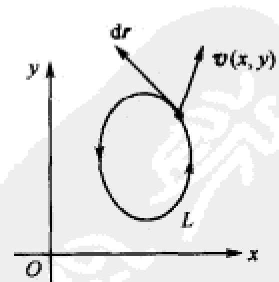


图 10.2.5

2. 环流量

平面流速场 $\boldsymbol{v}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 在单位时间沿有向闭曲线 L 的

环流量(图 10.2.5)

$$\mu = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

10.2.6　两类曲线积分之间的联系

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 与对坐标的曲线积分 $\int_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 既有区别,又有联系.前者是数量场 $f(x,y)$ 的曲线积分,而后者是向量场 $\boldsymbol{A}$ 的曲线积分.下面,我们以变力沿曲线做功为例来说明这两类曲线积分之间的联系.

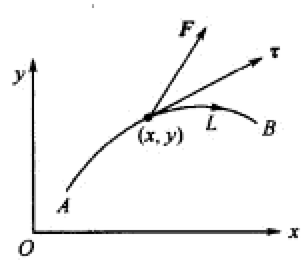


图 10.2.6

设力场 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿有向曲线 L 所做的功为 W(图 10.2.6).

用第一类曲线积分表示

$$W = \int_L (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 是曲线 L 的单位切向量(见 10.1.7 节).

用第二类曲线积分表示

$$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

所以两类曲线积分有以下联系:

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

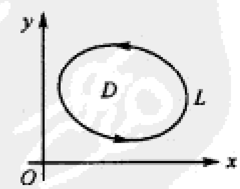
或

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s \qquad (\text{向量形式}).$$

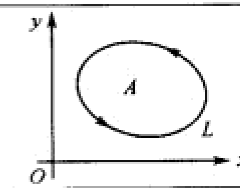
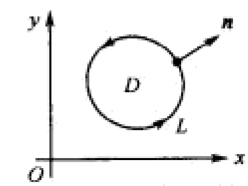
10.3　格林公式

10.3.1　格林公式(表 10.3.1)

表 10.3.1

	公　式	说明与图形
格林公式	$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 其中 L 是 D 的正向边界曲线, P, Q 在 D 上具有一阶连续偏导数	

续表

公式		说明与图形
直观形式	$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$	此行列式形式便于记忆
面积公式	$A = \dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ 其中 A 是 L 所围成的图形的面积	
格林公式的另一形式	$\oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或 $\oint_L (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s = \iint\limits_D \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 是 L 的单位法向量, $\boldsymbol{A} = \{P, Q\}$, $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ 是 A 的散度	 格林公式的这个形式在三维空间可以推广为高斯公式

10.3.2 利用格林公式计算对坐标的曲线积分

利用格林公式可以将闭曲线上对坐标的曲线积分转化为曲线所围的区域上的二重积分. 如果以下条件满足, 则可以考虑用格林公式计算曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv k$(常数). 此时

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D k\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\sigma,$$

其中 σ 是 D 的面积.

(2) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 不是常数, 但二重积分 $\iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 容易计算.

注 (1) 若 L 不是闭曲线时, 可以添加一条辅助直线 l, 使 $L + l$ 成为闭曲线, 再利用格林公式计算 $\int_{L+l} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. 最后将 l 上的曲线积分减去即可. 这种加一条边再用格林公式计算曲线积分的方法(称为"加边法")是一种重要技巧(见例 10.3.1).

(2) 若区域 D 内有奇点(偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 不连续), 则可采用"挖洞法"避开奇点, 再用格林公式(见例 10.3.2).

例10.3.1 (1999年1)　求 $I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解　如图10.3.1所示，直接沿半圆周曲线 L 积分很困难. 令 $P=e^x\sin y-b(x+y)$，$Q=e^x\cos y-ax$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-a-e^x\cos y+b=b-a.$$

为了利用格林公式，须添加从点 $O(0,0)$ 沿 x 轴到点 $A(2a,0)$ 的有向线段 L'. 于是

$$\oint_{L+L'}Pdx+Qdy=\iint_D(b-a)dxdy=(b-a)\frac{\pi a^2}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_{L+L'}Pdx+Qdy-\int_{L'}Pdx+Qdy=(b-a)\frac{\pi a^2}{2}-\int_0^{2a}(-bx)dx\\&=\frac{\pi a^2}{2}(b-a)+2a^2b.\end{aligned}$$

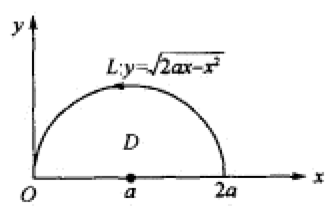


图10.3.1

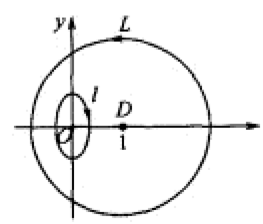


图10.3.2

例10.3.2 (2000年1)　计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，取逆时针方向.

解　直接计算比较困难，现考虑用格林公式. 在 L 所围的区域内，被积函数有唯一的奇点 $(0,0)$（图10.3.2），所以用“挖洞法”挖掉这个奇点. 作一足够小的椭圆 $l:4x^2+y^2=a^2$（取顺时针方向），在 L 和 l 所围成的区域 D 上利用格林公式. 由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得

$$\oint_{L+l}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_D 0dxdy=0.$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0-\oint_l\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\oint_{-l}xdy-ydx\\&=\frac{1}{a^2}(2A)\qquad(A\text{ 为椭圆的面积})\\&=\frac{1}{a^2}\left(2\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cdot\pi\right)=\pi.\end{aligned}$$

注　也可以利用椭圆的参数方程 $x=\frac{a}{2}\cos\theta$，$y=a\sin\theta$ $(\theta:2\pi\to0)$ 计算曲线积

分 $\oint_l \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$.

● 10.4 平面上曲线积分与路径无关的条件

10.4.1 曲线积分与路径无关的等价条件

定理 10.4.1 设 $\boldsymbol{A}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ 是连通开区域D上的连续向量场,则在 D 上以下四个条件等价:

(1) 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关;

(2) $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, 其中 L 是D内任意有向闭曲线;

(3) $\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ 是梯度场,即存在函数 $f(x, y)$,使得 $\boldsymbol{A} = \mathbf{grad} f$(即 $f_x = P$, $f_y = Q$);

(4) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某个函数$f(x, y)$的全微分:$\mathrm{d}f = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

如果 D 是单连通区域,则以上诸条件与以下条件等价:

(5) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$在$D$上恒成立(常用条件).

[redacted] 以上诸条件中,条件(5)最简单、最方便,因此在单连通区域上,我们总是用恒等式$\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$来判断曲线积分与路径无关.

10.4.2 曲线积分的基本定理

定理 10.4.2 设函数 $f(x, y)$具有一阶连续偏导数, $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (t: $\alpha \to \beta$)是一条有向光滑曲线, (x_1, y_1)和(x_2, y_2)分别是 L 的起点和终点(图 10.4.1),则梯度场$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 的曲线积分为

$$\int_L \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

或

$$\int_L \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}(\alpha)) - f(\boldsymbol{r}(\beta)),$$

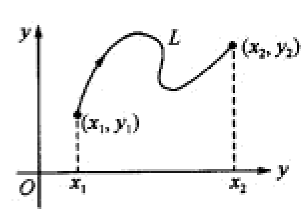


图 10.4.1

其中 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$. 这表明梯度场的曲线积分与路径无关.

以上公式还可以写成以下形式:

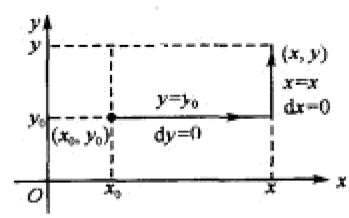
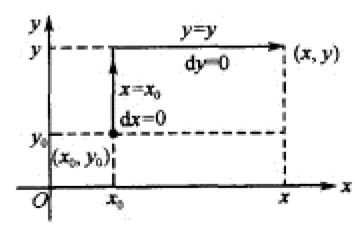
$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1).$$

这个公式类似于定积分的牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

10.4.3　利用曲线积分与路径无关的条件计算曲线积分

如果曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，则可以不沿曲线 L 积分，而另选一条方便的积分路径. 一般我们选择平行于坐标轴的折线路径计算曲线积分. 计算公式如表 10.4.1 所示（设 L 的起点和终点分别是 (x_0,y_0) 和 (x,y)）.

表 10.4.1

曲线积分公式	图　　示
$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$	
$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$	

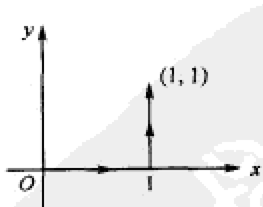


图 10.4.2

例 10.4.1（1989 年 1）　设曲线积分 $\int_C xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

解　$P(x,y)=xy^2, Q(x,y)=y\varphi(x)$. 由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得 $2xy = y\varphi'(x)$ 或 $\varphi'(x)=2x$. 积分得 $\varphi(x)=x^2+C$，再由 $\varphi(0)=0$，得 $\varphi(x)=x^2$. 所以沿图 10.4.2 所示的折线积分，得

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

10.4.4 二元函数的全微分求积

设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通区域内具有一阶连续偏导数，且满足条件 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$，则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分：$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. 因为曲线积 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，我们可以用以下公式求原函数 $u(x, y)$（图 10.4.3）：

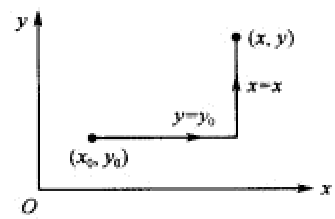


图 10.4.3

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathrm{d}u = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

[redacted] $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 类似于定积分中的积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

例 10.4.2（1996 年 1） 已知 $\frac{(x + ay)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x + y)^2}$ 为某函数的全微分，求 a 的值.

解 设该式为函数 $u(x, y)$ 的全微分：$\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y$，则

$$u_x = \frac{x + ay}{(x + y)^2}, \qquad u_y = \frac{y}{(x + y)^2}.$$

由 $u_{xy} = u_{yx}$ 得

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x + ay}{(x + y)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{(x + y)^2}\right],$$

即

$$\frac{(a - 2)x - ay}{(x + y)^3} = \frac{-2y}{(x + y)^3},$$

得 $a = 2$.

10.4.5 选择对坐标的曲线积分的计算方法

对坐标的曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的计算方法和技巧较多. 一般可按以下步骤来选择恰当的计算方法.

(1) 如果在单连通区域内 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\left(即 \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0\right)$，则曲线积分与路径无

关,可另选方便的积分路径(通常是平行于坐标轴的折线路径).

(2) 如果$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq 0$,但它比较简单$\left(\text{如}\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\text{常数}\right)$,则可以考虑用格林公式计算曲线积分(如果 L 不是闭曲线,则可加一条边,再用格林公式).

(3) 如果以上条件都不满足,则采用直接计算曲线积分的方法.

● 10.5　对面积的曲面积分

10.5.1　对面积的曲面积分的概念与性质

1. 对面积的曲面积分的定义

定义 10.5.1　函数 $f(x,y,z)$在曲面 Σ 上对面积的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 dS 为面积元素(图 10.5.1).

注　对面积的曲面积分也称为第一类曲面积分.

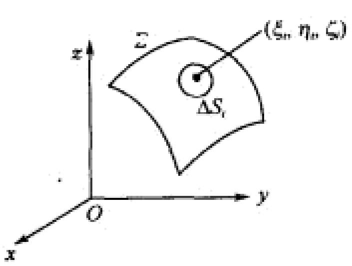


图 10.5.1

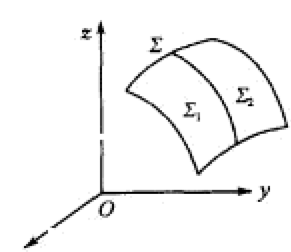


图 10.5.2

2. 对面积的曲面积分的性质

(1) $\iint\limits_{\Sigma} f\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$(图 10.5.2);

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=S(\Sigma\text{ 的面积})$;

(3) 若曲面 Σ 的方程为$f(x,y,z)=k$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} k\mathrm{d}S=kS\quad(S\text{ 为}\Sigma\text{ 的面积}),$$

$\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 表示闭曲面 Σ 上的曲面积分 .

10.5.2 对面积的曲面积分的计算

对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$ 是通过将其化为二重积分来进行计算.计算公式如下.

(1) 设曲面 $\Sigma: z = z(x, y)((x, y)\in D)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中面积元素 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域(图 10.5.3).

同理可得以下计算公式.

(2) 设曲面 $\Sigma: x = x(y, z)((y, z)\in D_{yz})$(图 10.5.4),则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z]\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

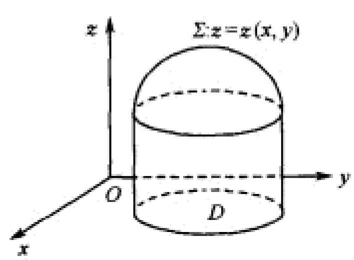


图 10.5.3

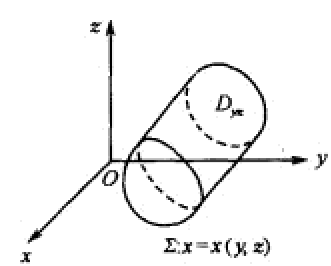


图 10.5.4

(3) 设曲面 $\Sigma: y = y(z, x)((z, x)\in D_{zx})$(图 10.5.5),则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{zx}} f[x, y(z, x), z]\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

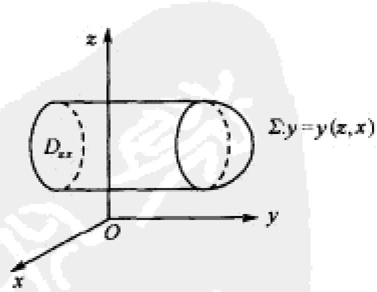


图 10.5.5

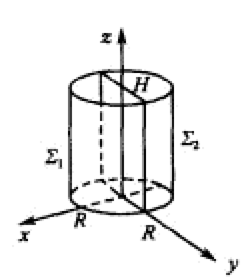


图 10.5.6

例 10.5.1 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2(0\leqslant z\leqslant H)$.

解 Σ 在 yOz 面上的投影为矩形区域 $D:-R\leqslant y\leqslant R, 0\leqslant z\leqslant H$(图 10.5.6). 由 $x^2+y^2=R^2$ 可得前半柱面 Σ_1 的方程 $x=\sqrt{R^2-y^2}$. 又

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

由对称性(后半柱面 Σ_2 上的曲面积分与前半柱面上的曲面积分相等)，得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{R^2+z^2}=2\iint\limits_{D}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{-R}^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

10.5.3 对面积的曲面积分化为二重积分的步骤

对面积的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 化为二重积分的步骤如下：

(1) 作出曲面 Σ 的图形，并写出 Σ 的显函数方程 $z=z(x,y)$；

(2) 将 Σ 投影到 xOy 面上，得投影区域 D；

(3) 计算面积元素 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(4) 计算二重积分 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注 (1) 被积函数 $f(x,y,z)$ 中的点 (x,y,z) 在曲面 Σ 上变动，因此点 (x,y,z) 必须满足 Σ 的方程.

(2) 如果曲面 Σ 的方程形如 $x=x(y,z)$(或 $y=y(z,x)$)，则须将 Σ 投影到 yOz 面(或 zOx)面上，并用相应的公式计算曲面积分.

10.5.4 利用对称性化简对面积的曲面积分

如果积分曲面 Σ 关于坐标面对称，被积函数 $f(x,y,z)$ 关于相应的自变量具有奇(偶)性，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 可按以下公式化简(函数 $f(x,y,z)$ 关于自变量的奇(偶)性定义见 9.4.4 节).

(1) 若 Σ 关于 xOy 面 $(z=0)$ 对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}0, & f(x,y,z)\text{ 关于 }z\text{ 为奇函数},\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,z)\text{ 关于 }z\text{ 为偶函数},\end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Σ 的上半部分.

若 Σ 关于 yOz 面(或 zOx 面)对称, $f(x,y,z)$关于 x(或 y)有奇(偶)性,也有相应的结论.

(2) 若 Σ 关于三个坐标面都对称,且 $f(x,y,z)$关于 x,y,z 均为偶函数,则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 8\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ_1 是 Σ 在第一卦限部分.

(3) 若闭曲面 Σ 的方程 $F(x,y,z)=0$ 关于 x,y,z 具有轮换对称性(即对换任意两个变量,方程不变),则有

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} f(y)\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} f(z)\mathrm{d}S,$$

从而有 $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} [f(x)+f(y)+f(z)]\mathrm{d}S = 3\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}S.$

例 10.5.2 计算 $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} |xyz|\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$.

解 由于 Σ 关于三个坐标面对称,函数 $|xyz|$ 关于 x,y,z 均为偶函数,于是

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} |xyz|\mathrm{d}S = 8\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S,$$

其中 Σ_1 为 Σ 在第一卦限部分: $x+y+z=1(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$(图 10.5.7).由 $z=1-x-y$,得

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$\begin{aligned}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} |xyz|\mathrm{d}S &= 8\iint_{D} xy(1-x-y)\cdot\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 8\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{15}.\end{aligned}$$

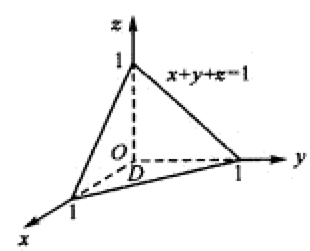


图 10.5.7

例 10.5.3 求曲面积分 $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 直接计算比较复杂.由于 Σ 的方程关于 x,y,z 具有轮换对称性,故有

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S,$$

所以

$$\begin{aligned}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S &= \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} a^2\mathrm{d}S \\ &= \frac{a^2}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathrm{d}S = \frac{a^2}{3}\cdot 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^4,\end{aligned}$$

其中 $4\pi a^2$ 为球面面积.

10.5.5　对面积的曲面积分的应用

1．与质量有关的物理应用

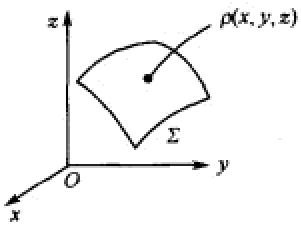


图 10.5.8

设曲面构件占有曲面 Σ 的位置，构件在点 $(x,y,z)\in\Sigma$ 处的面密度为 $\rho(x,y,z)$（图 10.5.8）．

(1) 构件的质量：

$$M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

(2) 构件的重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$：

$$\bar{x}=\frac{\iint_{\Sigma}x\rho\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S},\quad \bar{y}=\frac{\iint_{\Sigma}y\rho\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S},\quad \bar{z}=\frac{\iint_{\Sigma}z\rho\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S}.$$

(3) 构件关于 xOy 面，z 轴和原点的转动惯量 I_{xy}，I_z 和 I_O：

$$I_{xy}=\iint_{\Sigma}z^2\rho\mathrm{d}S,\qquad I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}S,$$

$$I_O=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho\mathrm{d}S.$$

[redacted]　公式中的 z^2，x^2+y^2 和 $x^2+y^2+z^2$ 分别是点 (x,y,z) 的旋转半径的平方．

2．流量

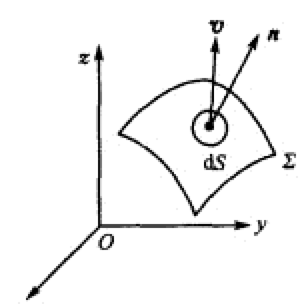


图 10.5.9

流速场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在单位时间流过曲面 Σ 的流量（流体体积）

$$\Phi=\iint_{\Sigma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是曲面 Σ 指定一侧的单位法向量（图 10.5.9）．

● 10.6　对坐标的曲面积分

10.6.1　对坐标的曲面积分的概念与性质

定义 10.6.1　函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x,y 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

同理,函数 $P(x,y,z)$在 Σ 上对坐标 y,z 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}.$$

函数 $Q(x,y,z)$在 Σ 上对坐标 z,x 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx},$$

其中$(\Delta S_i)_{xy}$, $(\Delta S_i)_{yz}$, $(\Delta S_i)_{zx}$分别是 ΔS_i 在三个坐标面上的有向投影.

注 对坐标的曲面积分也称为第二类曲面积分.

记

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其向量形式为

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\} = \iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$. 因此,对坐标的曲面积分也称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的曲面积分.

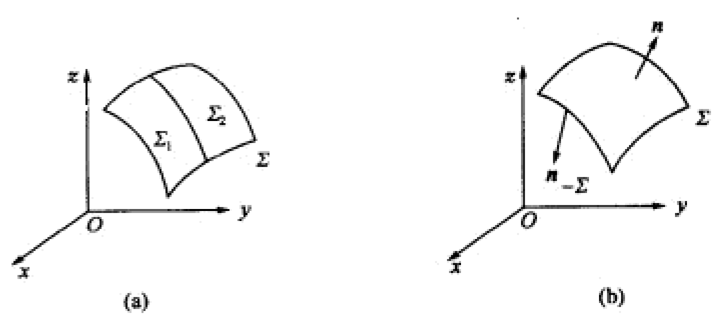


图 10.6.1

对坐标的曲面积分有以下性质:

(1) $\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 即曲面积分的分片可加性(图 10.6.1(a)).

(2) 设 $-\Sigma$ 是与 Σ 侧向相反的曲面(图 10.6.1(b)),则

$$\iint_{-\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即改变曲面的侧向,曲面积分变号.

10.6.2　对坐标的曲面积分的计算

对坐标的曲面积分是将其化为二重积分来进行计算.具体的计算公式如下:

(1)设曲面 $\Sigma: z=z(x,y)((x,y)\in D_{xy})$,则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 取上侧(下侧)时,取正号(负号)(图 10.6.2(a)).

(2)设曲面 $\Sigma: x=x(y,z)((y,z)\in D_{yz})$,则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 取前侧(后侧)时,取正号(负号)(图 10.6.2(b)).

(3)设曲面 $\Sigma: y=y(z,x)((z,x)\in D_{zx})$,则

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}} Q[(x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中 Σ 取右侧(左侧)时,取正号(负号)(图 10.6.2(c)).

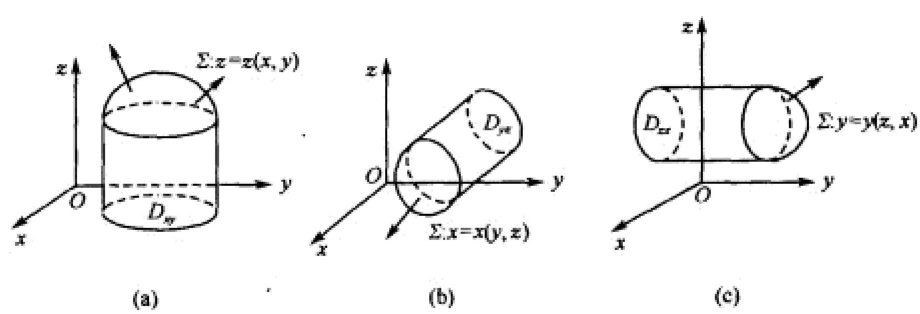


图 10.6.2

[redacted]　如果用以上公式计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则须将此积分分解成三部分分别用以上三个公式计算.为此,必须将 Σ 分别向三个坐标面投影,这是很麻烦的.下面介绍的"三合一"公式以及高斯公式可以部分地解决分三次积分的问题.

10.6.3　计算对坐标的曲面积分的"三合一"公式

以下计算公式将对三个坐标面的积分合在一起计算,故称为"三合一"公式(也称为向量点积法).此公式可由两类曲面积分的联系推出.

设曲面 $\Sigma: z=z(x,y)((x,y)\in D)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint\limits_{D}\left(-P\frac{\partial z}{\partial x} - Q\frac{\partial z}{\partial y} + R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 取上侧(下侧)时,取正号(负号)(图 10.6.3).

注 $-P\dfrac{\partial z}{\partial x} - Q\dfrac{\partial z}{\partial y} + R = \{P, Q, R\}\cdot\left\{-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1\right\} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$,其中 $\boldsymbol{A} = \{P, Q, R\}$,$\boldsymbol{n} = \left\{-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1\right\}$是曲面 $z = z(x, y)$的法向量(朝上).

[redacted] "三合一"公式的好处在于我们只须将曲面投影到一个坐标面上并计算一个二重积分.因此它是一个很有用的计算公式.国外的一些著名的微积分教材都介绍了这个公式.

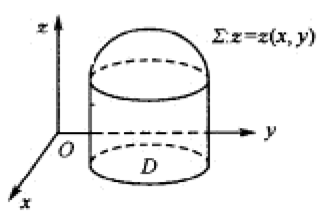


图 10.6.3

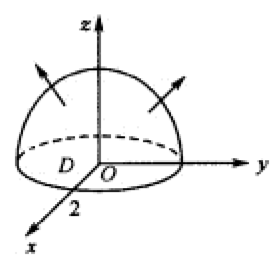


图 10.6.4

例 10.6.1 (1990 年 1) 求曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geqslant 0$ 的部分.

解 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$的上侧(图 10.6.4).$P = 0, Q = yz, R = 2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

利用"三合一"公式($D: x^2 + y^2 \leqslant 4$)

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D}\left(-0\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - yz\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + 2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D}\left(-y\sqrt{4 - x^2 - y^2}\cdot\frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + 2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D}(y^2 + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 (r\sin\theta)^2 r\mathrm{d}r + 2\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 4\pi + 8\pi = 12\pi. \end{aligned}$$

[redacted] 此例也可以用高斯公式求解(用"封口法")(见例 10.7.1).

10.6.4 对坐标的曲面积分的应用

设有流速场

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

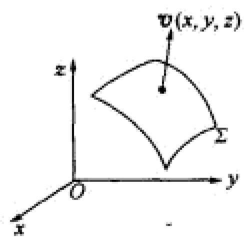


图 10.6.5

则在单位时间内流速场流过曲面 Σ 的流量(流体体积)(图 10.6.5)

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

10.6.5　两类曲面积分之间的联系

对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 既有区别,也有联系.前者是数量场 $f(x,y,z)$的曲面积分,后者是向量场 $\boldsymbol{A}$ 的曲面积分.下面,我们以流量为例来说明这两类曲面积分之间的联系.

设流速场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在单位时间流过曲面 Σ 的流量为 Φ.

用第一类曲面积分表示(图 10.6.6)

$$\Phi=\iint_{\Sigma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是曲面 Σ 指定一侧的单位法向量(见 10.5.5 节).

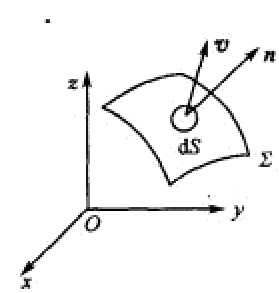


图 10.6.6

用第二类曲面积分表示

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以两类曲面积分有以下联系:

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

或

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\qquad(向量形式).$$

● 10.7　高斯公式

10.7.1　高斯公式

设 Ω 是由闭曲面 Σ(取外侧)所围成的空间闭区域(图 10.7.1),函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在 Ω 上具有一阶连续偏导数,则有以下高斯公式.

(1) 对坐标的曲面积分的形式

$$\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 对面积的曲面积分的形式

$$\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

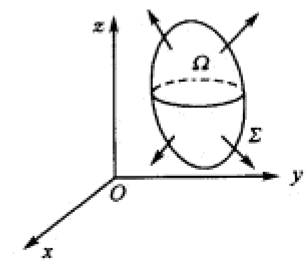


图 10.7.1

(3) 向量形式

$$\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v\quad 或$$
$$\oiint_{\Sigma}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v,$$

其中 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$, $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是曲面 Σ 外侧的单位法向量.

10.7.2 利用高斯公式计算对坐标的曲面积分

高斯公式

$$\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

是计算对坐标的曲面积分的重要公式.

使用高斯公式应注意以下几点.

(1) 曲面 Σ 是取外侧的闭曲面. 如果 Σ 取内侧, 则应改为外侧, 但应记住添加一个负号.

(2) 使用高斯公式时, 要求散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 比较简单, 以便于计算三重积分.

(3) 如果 Σ 不是闭曲面, 则应补一块曲面 Σ_1(一般是一块平行于坐标面的平面), 再用高斯公式. 最后, 还应该将 Σ_1 上的曲面积分减去(这种方法叫做"封口法", 见例 10.7.1).

(4) 在高斯公式左端, 动点(x, y, z)在曲面 Σ 上变动, 它满足 Σ 的方程; 而在公式右端, 动点(x, y, z)是在 Σ 所包围的整个区域Ω 上变动. 记住这一点很重要.

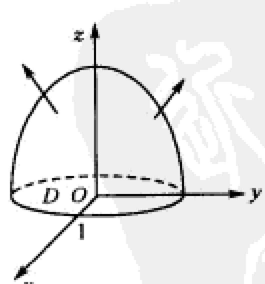


图 10.7.2

例 10.7.1 (2004 年 1) 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant0)$ 的上侧.

解 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D: x^2+y^2\leqslant1$(图 10.7.2). 添加平面 $\Sigma': z=0(x^2+y^2\leqslant1)$(下侧). 由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} (6x^2+6y^2+6z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(r^2+z)\mathrm{d}z \quad (\text{利用柱面坐标})$$
$$= 12\pi\int_0^1 r\left[r^2(1-r^2)+\frac{1}{2}(1-r^2)^2\right]\mathrm{d}r = 2\pi.$$

又 $\iint\limits_{\Sigma'} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D} 3\cdot(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\pi$, 所以 $I = 2\pi - 3\pi = -\pi$.

10.7.3　选择对坐标的曲面积分的计算方法

对坐标的曲面积分的计算方法和技巧较多，一般可按以下步骤来选择恰当的计算方法.

(1) 对于闭曲面 Σ 上的曲面积分，一般都要考虑用高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

将曲面积分转化为 Σ 所围区域 Ω 上的三重积分.

(2) 如果曲面 Σ 由显函数 $z=z(x,y)$ 给出，则可利用两类曲面积分的关系，将第二类曲面积分转化为第一类曲面积分，再转化为 Σ 的投影区域 D 上的二重积分. 这就是所谓的“三合一”公式(见 10.6.3 节)：

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{D}\left(-P\frac{\partial z}{\partial x} - Q\frac{\partial z}{\partial y} + R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 如果以上方法均不适用，则只能采用直接计算的方法，即将 Σ 分别投影到三个坐标面，再分别用相应的公式计算三个二重积分.

● 10.8　散度与旋度　斯托克斯公式

10.8.1　散度与旋度

设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

散度是一个数量，它是向量场 $\boldsymbol{A}$ 在一点散发流体的强度的度量(图 10.8.1).

$\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

旋度是一个向量.在一点处与旋度垂直的单位面积的平面的边缘的环流量最大(图 10.8.2).

注 旋度也常记作 $\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$.

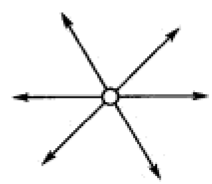


图 10.8.1

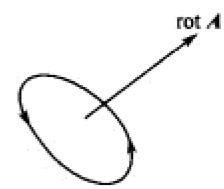


图 10.8.2

散度和旋度的向量形式:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

其中$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 为哈密顿算子.

例 10.8.1 (2001 年 1) 设 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}r)\big|_{(1,-2,2)} =$ ________.

解 因为 $\mathrm{d}r = \mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\dfrac{1}{r}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)$,得 $\mathbf{grad}r = \left\{\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right\}$.于是

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right).$$

又因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{r - x \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r - x \cdot \dfrac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

同理(由对称性),$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r}\right) = \dfrac{r^2-y^2}{r^3}$,$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r}\right) = \dfrac{r^2-z^2}{r^3}$,得

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}r) = \frac{3r^2 - (x^2+y^2+z^2)}{r^3} = \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = \frac{2}{r} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

所以 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}r)\big|_{(1,-2,2)} = \dfrac{2}{3}$.

10.8.2 散度和旋度的运算法则

设有数量场 $\varphi(x,y,z)$和向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$, $\boldsymbol{B}(x,y,z)$.

(1) 散度的运算法则.

$$\operatorname{div}(\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B})=\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\mu\operatorname{div}\boldsymbol{B}\,(\lambda,\mu\text{ 为常数}),$$

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.$$

(2) 旋度的运算法则.

$$\operatorname{rot}(\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B})=\lambda\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\mu\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\,(\lambda,\mu\text{ 为常数}),$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\varphi\times\boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\operatorname{div}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\operatorname{div}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}.$$

10.8.3　梯度、散度、旋度的二阶运算

设有数量场 $\varphi(x,y,z)$和向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$(表 10.8.1).

表 10.8.1

二阶运算	说　明
$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=0$	旋度场是无源场
$\operatorname{rot}(\mathbf{grad}\varphi)=\mathbf{0}$	梯度场是无旋场
$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi$	$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ 为拉普拉斯算子
$\mathbf{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$	
$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$	

10.8.4　斯托克斯公式

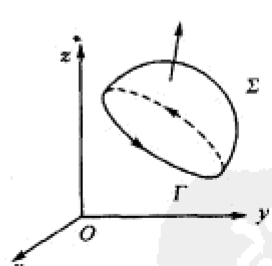


图 10.8.3

设 Σ 是以空间有向闭曲线 Γ 为边界的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧向符合右手规则(图 10.8.3), 函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在包含曲面 Σ 的一个空间区域内具有一阶连续偏导数, 则有以下斯托克斯公式:

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

斯托克斯公式的行列式形式:

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\quad（第二类曲面积分）$$

或

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S\quad（第一类曲面积分），$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为 Σ 的单位法向量.

斯托克斯公式的向量形式：

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

或

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{A}=\{P,Q,R\}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

例 10.8.2（1997 年 1） 计算曲线积分 $\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 是曲线 $x^2+y^2=1$，$x-y+z=2$，从 z 轴正向往负向看，L 的方向是顺时针的.

解 解法一（直接计算）. 曲线 L 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x-y+z=2$ 的交线. 这是一个椭圆（图 10.8.4），其参数方程为

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ z=2-\cos\theta+\sin\theta\ (\theta\ 从\ 2\pi\ 变到\ 0),$$

所以

$$\begin{aligned}原式&=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos\theta)(-\sin\theta)+(2\cos\theta-\sin\theta-2)\cos\theta\\&\quad+(\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta+\cos\theta)]\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}[2(\sin\theta+\cos\theta)-2\cos^2\theta-\cos2\theta]\mathrm{d}\theta=-2\pi.\end{aligned}$$

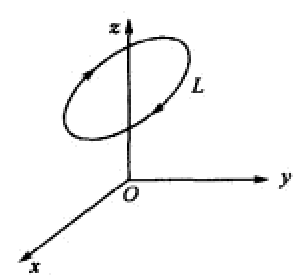


图 10.8.4

解法二（利用斯托克斯公式）. 设 Σ 是平面 $x-y+z=2$ 上的以 L 为边界的那部分的下侧. 记 $\boldsymbol{A}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}$，则

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}=2\boldsymbol{k}.$$

由斯托克斯公式

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_{\Sigma(下侧)}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma(下侧)}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi.$$

第 11 章　无穷级数

11.1　常数项级数的概念与性质

11.1.1　无穷级数的收敛与发散

无穷级数：$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，其中 u_n 称为一般项(通项)。

部分和 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$，余项 $r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i$.

用部分和表示一般项：$u_n=s_n-s_{n-1}$.

级数收敛的定义　若部分和数列$\{s_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且其和为 s，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s=\lim_{n\to\infty}s_n \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i.$$

若部分和数列$\{s_n\}$发散，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$，则

$$s=s_n+r_n,\qquad r_n=s-s_n,$$

得

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0,$$

即收敛级数的余项趋于零，所以

$$s\approx s_n \qquad (截断误差|r_n|\to 0).$$

11.1.2　无穷级数的性质(表 11.1.1)

表 11.1.1

性　质	说　明
性质 1　若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$	收敛级数的分配律

续表

性　质	说　明
推论 1 若 $k\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性	乘上一个非零的数不改变级数的敛散性
性质 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛，且 $$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$	记忆口诀：收敛＋收敛＝收敛 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ 收敛
推论 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散	记忆口诀：收敛＋发散＝发散 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$ 发散
注 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 不一定发散	记忆口诀：发散＋发散$\nRightarrow$发散 **经典反例** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-n)$ 都发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[n+(-n)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0=0$ 收敛
推论 3 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ku_n+lv_n)=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+l\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$	收敛级数的线性运算
性质 3 改变级数的有限项不会改变级数的敛散性．特别地，添加或去掉有限项不会改变级数的敛散性	级数的敛散性与它的有限项无关 例如，$\sum\limits_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n}$ 仍然发散，$\sum\limits_{n=10}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 仍然收敛
性质 4 收敛级数的项任意加括号后所成的级数仍然收敛，且其和不变	收敛级数的结合律 收敛级数的各项可以任意组合（但顺序不能改变），其和不变
注 发散级数不能任意加括号，否则新的级数可能收敛．反之，加括号后收敛的级数也不能随意去掉括号，否则新的级数可能发散．但是，正项级数可以任意加括号，且敛散性不变	**经典反例** $1-1+1-1+\cdots$ 发散，但 $(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$ 收敛
性质 5（级数收敛的必要条件） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$	级数收敛的必要条件是一般项趋于零

续表

性　　质	说　　明
推论 4　若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散	级数发散的充分条件是一般项不趋于零．这个性质常用来判断级数发散 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 发散，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e} \neq 0$
注意　$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛	一般项趋于零的级数不一定收敛 **经典反例**　调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，尽管 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

11.1.3　几个重要的级数

(1)等比级数(几何级数)($a \neq 0$, q 为公比)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & |q| \geqslant 1. \end{cases}$$

特例　$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$ 发散($q=-1$)，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a = a+a+a+\cdots$ 发散($a \neq 0$, $q=1$).

注　对于等比级数，不但要会判断它的敛散性，还要会求其和．收敛等比级数的求和公式是

$$\text{和} = \frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}.$$

例如，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{\dfrac{1}{3^2}}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{6}$.

(2)p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leqslant 1. \end{cases}$$

(3)调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty(\text{发散}).$$

注　p 级数的和很难求．因此只要求判断其敛散性，不要求求其和．

(4)交错 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{绝对收敛}, & p>1,\\ \text{条件收敛}, & 0<p\leqslant 1,\\ \text{发散}, & p\leqslant 0.\end{cases}$$

(5)交错调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.$$

例 11.1.1 (1993 年 3) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为______.

解 这是公比 $q=\frac{\ln 3}{2}$ 的等比级数,因为 $|q|=\frac{\ln 3}{2}<1$,级数收敛,其和为

$$s=\frac{1}{1-\frac{\ln 3}{2}}=\frac{2}{2-\ln 3}.$$

● 11.2 正项级数的审敛法

11.2.1 正项级数的收敛定理

正项级数 若 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为正项级数.

正项级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 是单调增加数列. 正项级数的敛散性见表 11.2.1.

表 11.2.1

定　　理	说　　明
基本定理 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界	单调有界数列必收敛
推论 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{s_n\}$ 无界	**注** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则必有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty$ 正项级数发散,一定发散到正无穷大
若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也发散	正无穷大+正无穷大=正无穷大

11.2.2 比较审敛法

1. 比较审敛法的不等式形式

设 $0\leqslant u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,那么

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

[redacted] 正项级数:“较大的都收敛,较小的也收敛”;反之,“较小的都发散,较大的也发散”.

2. 比较审敛法的极限形式

有时以下极限形式用起来比不等式形式更方便.

设 $u_n, v_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$,且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \qquad (0 < l < +\infty),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性.

注 若 u_n 和 v_n 都趋于零,则 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ 表明 u_n 和 v_n 是同阶无穷小. 于是,两个同阶无穷小组成的正项级数有相同的敛散性.

推论 11.2.1 若 $u_n \sim v_n (n \to \infty)$,则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性.

[redacted] 一般项等价的两个正项级数有相同的敛散性.

特别地,若 $u_n \sim \frac{1}{n^p} (n \to \infty)$ 或 $\lim_{n \to \infty} n^p u_n = 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leqslant 1, \end{cases}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 有相同的敛散性.

例如, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ 收敛$\left(因为 \sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} \right)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散$\left(因为 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \right)$.

特例 正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} \text{收敛}, & q > p + 1, \\ +\infty, & q \leqslant p + 1. \end{cases}$$

例如, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n(n+2)}$ 收敛.

注 用“保留最大项法”,以上级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ 有相同的敛散性.

注意 对于非正项级数，由等价无穷小 $u_n \sim v_n(n\to\infty)$ 不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性.

例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}\right]$ 发散，尽管 $(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sim(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}(n\to\infty)$.

例 11.2.1 设 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$ 也收敛. 又 $0<a_n-b_n\leqslant c_n-b_n(n=1,2,\cdots)$，由正项级数的比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(a_n-b_n)+b_n]$ 也收敛.

3. 比较审敛法极限形式的补充形式

若 $u_n,v_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

注 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$，说明 u_n 远小于 v_n，即 $u_n<v_n$（从某项起）. 因此若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(2) 如果 u_n 和 v_n 都趋于零，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$ 表明 u_n 是 v_n 的高阶无穷小. 于是，对于正项级数而言，低阶无穷小级数收敛，高阶无穷小级数也收敛；反之，高阶无穷小级数发散，则低阶无穷小级数也发散.

例如，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/\mathrm{e}^n}{1/n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}=0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$ 也收敛.

4. 比较审敛法不等式形式的补充形式

设 $u_n,v_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$（从某项起），那么

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

11.2.3　常用来进行比较的正项级数

以下三类正项级数是常用来比较其他正项级数的标准正项级数.

(1) 正项等比级数($a>0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & 0<q<1, \\ +\infty, & q\geqslant 1. \end{cases}$$

(2) p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 收敛, & p>1, \\ +\infty, & p\leqslant 1. \end{cases}$$

(3) 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} = \begin{cases} 收敛, & p>1, \\ +\infty, & p\leqslant 1 \end{cases} \qquad (见例 11.2.5).$$

以上三类正项级数收敛(或发散)的速度,从快到慢依次为

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^r}.$$

这是因为,当它们都收敛时(即 $0<q<1$, $p>1$, $r>1$ 时),有

$$aq^n < \frac{1}{n^p} < \frac{1}{n(\ln n)^r} \qquad (n\ 充分大时),$$

且前者是后者的高阶无穷小($n\to\infty$ 时).而当它们都发散时($q>1$, $p\leqslant 1$, $r\leqslant 1$ 时),有

$$aq^n > \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n(\ln n)^r} \qquad (n\ 充分大时),$$

且前者是后者的高阶无穷大($n\to\infty$时).

例如, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^4}$ 都收敛,但后面的级数比前面的级数收敛得更慢.因为当 n 充分大时,$2^n>n^3>n(\ln n)^4$,从而$\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{1}{n(\ln n)^4}$.

在一般项趋于零的前提下,等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n}$($a>1$)和 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$($p>0$)的一般项之间有以下关系(当 n 充分大时):

$$\underbrace{\underset{0<p<1}{\frac{1}{n^p}} > \underset{p=1}{\frac{1}{n}}}_{级数发散} > \underbrace{\underset{p>1}{\frac{1}{n^p}} > \underset{a>1}{\frac{1}{a^n}}}_{级数收敛}.$$

当 $n\to\infty$时,右边的一般项是左边的一般项的高阶无穷小.

例 11.2.2 (2004 年 1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,下列结论正确的是( ).

(A)若 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(B)若存在非零常数 λ,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n=\lambda$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(C)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n=0$;

(D)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n=\lambda$.

解 (A) $\lim_{n\to\infty} na_n=0$,即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=0$,说明 a_n 是 $\frac{1}{n}$ 的高阶无穷小(当 $n\to\infty$),但这不足以保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 反例:取 $a_n=\frac{1}{n\ln n}$. (B) $\lim_{n\to\infty} na_n=\lambda\neq 0$ 说明 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 是同阶无穷小(当 $n\to\infty$). 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散,选(B). (C)是错误的. 例如,取 $a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. (D)是错误的. 例如,取 $a_n=\frac{1}{n\ln n}$.

11.2.4 比值审敛法

设 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$,那么(1) 若 $\rho<1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;(2) 若 $\rho>1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;(3) 若 $\rho=1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

注 当 $\rho=1$ 时,比值审敛法失效. 例如,对任何 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$(不管它收敛或发散)都有 $\rho=1$.

当 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在时,可以考虑用以下方法判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

(1) 若从某项起恒有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<r<1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若从某项起恒有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 11.2.3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0)$ 的敛散性.

解 利用比值审敛法.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\bigg/\frac{a^n n!}{n^n}=a\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}},$$

于是,当$\frac{a}{\mathrm{e}}<1$即$a<\mathrm{e}$时,级数收敛;当$\frac{a}{\mathrm{e}}>1$,即$a>\mathrm{e}$时,级数发散;当$\frac{a}{\mathrm{e}}=1$即$a=\mathrm{e}$时,比值审敛法失效.

若$a=\mathrm{e}$,则$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.因为数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增加且趋于e,故$\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,于是$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,即$\{u_n\}$是单调增加数列,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.所以级数发散.

综上所述,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$当$0<a<\mathrm{e}$时收敛,当$a\geqslant\mathrm{e}$时发散.

注　此结论可以当公式使用.

11.2.5　根值审敛法

设$u_n>0(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$,那么(1)若$\rho<1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;(2)若$\rho>1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散;(3)若$\rho=1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛也可能发散(根值法失效).

注　可以证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$(见1.2.4节).这说明根值审敛法中的$\rho$和比值审敛法中的$\rho$是相同的.

当$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$不存在时,可以考虑用以下方法判断正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

(1)若从某项起恒有$\sqrt[n]{u_n}\leqslant r<1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2)若从某项起恒有$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

根值审敛法常常用到以下极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}.$$

例 11.2.4　讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$的敛散性.

解　利用根值审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{2^{(-1)^n}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}2^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

注　此例不能用比值审敛法,因为极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2^{-1+2\cdot(-1)^n}$$

不存在.这也说明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$可能不存在.因此根值审敛法的应用范围要比比值审敛法的范围更广一些.

11.2.6 积分审敛法

设函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上非负,单调减少且连续,则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性(图 11.2.1).

特例 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$与$p$ 积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性.

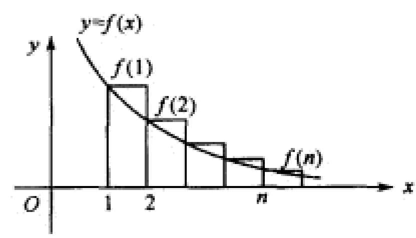


图 11.2.1

[redacted] 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$是离散的和,而广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是连续的和. 以上审敛法表明它们有相同的敛散性. 一般说来,$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的和容易求得,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$的和则很难求得.

例 11.2.5 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$的敛散性($p>0$).

解 由积分审敛法,此级数与广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 有相同的敛散性. 而此广义积分当 $p>1$时收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时发散(见 5.4.2 节). 故该级数当 $p>1$ 时收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时发散.

11.2.7 正项级数的一些性质

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是正项级数.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 也收敛.

证 因为 $v_n\to 0$,所以从某项起,$0\leqslant u_nv_n<u_n$(或利用 u_nv_n 是 u_n 的高阶无穷小的事实).

特例 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 也收敛.

注意 非正项级数不具有这个性质. 例如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$收敛,但一般项

平方后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nv_n}$也收敛.

证 利用不等式$\sqrt{u_nv_n}\leqslant\dfrac{u_n+v_n}{2}$.

特例 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$也收敛.

证 取 $v_n=\dfrac{1}{n^2}$.

推论 11.2.2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$也收敛.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$也发散.

注 正无穷大+正无穷大=正无穷大.

● 11.3 任意项级数的敛散性

11.3.1 绝对收敛与条件收敛

定理 11.3.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

定义 11.3.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

推论 11.3.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$必发散.

注 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛$\nRightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$也收敛.

经典反例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

定义 11.3.2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

例如, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$为条件收敛.

注 收敛但不绝对收敛即为条件收敛.

11.3.2 绝对收敛的审敛法

1. 绝对收敛的比值审敛法

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$，那么(1) 若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；(2) 若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2. 绝对收敛的根值审敛法

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$，那么(1) 若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；(2) 若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

3. 绝对收敛的比较审敛法

(1) 不等式形式. 设 $|u_n|\leqslant|v_n|(n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也绝对收敛.

(2) 极限形式. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right|=l(0\leqslant l<+\infty)$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也绝对收敛.

例 11.3.1 (1996 年 3) 下列各选项正确的是( ).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛；

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛；

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\geqslant\dfrac{1}{n}$；

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

解 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，由 $(|u_n|-|v_n|)^2=u_n^2+v_n^2-2|u_nv_n|\geqslant0$ 得 $2|u_nv_n|\leqslant u_n^2+v_n^2$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_nv_n$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+2u_nv_n+v_n^2)$ 也收敛. 选(A).

(B) 不正确. 例如，取 $u_n=\dfrac{1}{n}$，$v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (C) 不正确. 例如，取 $\{u_n\}$ 为 $1,0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3},0,\cdots$. (D) 不正确. 例如，取 $u_n=0$，$v_n=-n(n=1,2,\cdots)$.

11.3.3 绝对收敛(条件收敛)级数的运算性质(表11.3.1)

表11.3.1

性　质	说　明
(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也绝对收敛	**记忆** 绝对收敛+绝对收敛=绝对收敛 **证** 利用不等式 $\lvert u_n+v_n\rvert \leqslant \lvert u_n\rvert+\lvert v_n\rvert$
(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 一定条件收敛	**记忆** 绝对收敛+条件收敛=条件收敛 **证** 利用反证法
(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 可能条件收敛,也可能绝对收敛	条件收敛+条件收敛$\nRightarrow$条件收敛 例如,取 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $v_n=-u_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$ 绝对收敛
(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{n} v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛	绝对收敛×收敛=绝对收敛 **证** $\lvert u_n v_n\rvert=\lvert u_n\rvert\lvert v_n\rvert<\lvert u_n\rvert$(当 n 充分大时)
(5) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛	**证** 利用不等式 $\lvert u_n\rvert\lvert v_n\rvert \leqslant u_n^2+v_n^2$
特例 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1}$ 都绝对收敛	分别取 $v_n=\frac{1}{n}$ 和 $v_n=u_{n+1}$

例11.3.2 (1987年1) 设常数 $k>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$(　　).

(A) 发散; (B) 绝对收敛; (C) 条件收敛; (D) 敛散性与 k 的取值有关.

解 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k}{n^2}$ 绝对收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛,故原级数条件收敛(绝对收敛+条件收敛=条件收敛).选(C).

11.3.4 交错级数及其审敛法

若 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数.

交错级数的莱布尼茨审敛法 设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

(1) $u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$(绝对值递减);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$(一般项趋于零(这是级数收敛的必要条件)),

则级数收敛,且其和 $s \leqslant u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

注 若条件 $u_n \geqslant u_{n+1}$不满足,交错级数不一定就发散.

重要例子 交错 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{绝对收敛}, & p>1,\\ \text{条件收敛}, & 0<p\leqslant 1,\\ \text{发散}, & p\leqslant 0.\end{cases}$$

特例 交错调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$条件收敛,且其和为 ln2.

例 11.3.3 (1995 年 1) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数( ).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛; (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散; (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

解 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 满足莱布尼茨审敛法的条件,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2$ 的一般项$\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2\sim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{n}(n\to\infty)$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散. 选(C).

11.3.5 级数的重排 绝对收敛与条件收敛的区别

级数的绝对收敛与条件收敛有何区别? 以下结论回答了这个问题.

绝对收敛级数的交换律 绝对收敛级数的各项可以任意重排,且重排后的级数仍绝对收敛,其和不变.

条件收敛级数不具有交换性. 条件收敛级数的收敛性及其和的大小不仅与级数中各项的大小有关,还与各项的位置有关. 因此条件收敛级数的收敛性及其和的大小都是有条件的,不能随意改变级数中各项的先后次序,否则可能会改变级数的和与收敛性.

黎曼证明了这样一个令人吃惊的结论:条件收敛级数重排后,新的级数可以收敛于任何事先指定的实数,也可以使其发散.

黎曼的这个结论是基于以下事实:条件收敛级数的所有正项和所有负项所构成的级数分别发散到 $+\infty$和 $-\infty$. 因此,适当调整级数中的正项和负项的位置,就

可以使新的级数收敛于任何事先指定的实数,或使其发散.

对任意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n+|u_n|}{2}$ 为所有正项的和(称为级数的正部), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n-|u_n|}{2}$ 为所有负项的和(称为级数的负部). 我们有以下结论:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n+|u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n-|u_n|}{2}$ 都收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n+|u_n|}{2}=+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n-|u_n|}{2}=-\infty$(都发散);

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n+|u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n-|u_n|}{2}$ 至少有一个发散.

级数重排的经典例子:交错调和级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \qquad (\text{一正一负})$$

条件收敛,其和为 ln2. 现将级数各项重排成以下级数:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots \qquad (\text{一正二负}),$$

则新的级数将收敛到 $\frac{1}{2}\ln 2$.

例 11.3.4 (2003年3) 设 $p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是( ).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛;

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛;

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 敛散性都不定;

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 敛散性都不定.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 分别是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的所有正项和所有负项之和. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则由 $0\leqslant p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}\leqslant|a_n|$, 及 $|q_n|=\frac{|a_n|-a_n}{2}\leqslant|a_n|$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛. 选(B).

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n=+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n=-\infty$. 事实上,若 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-p_n)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 也收敛,于是 $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-q_n)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,矛

盾. 同理可证 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty$. 因此,(A),(C)和(D)都不正确.

11.3.6　判断级数敛散性的一般步骤

判断一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性的方法很多, 一般可按以下步骤进行(图11.3.1).

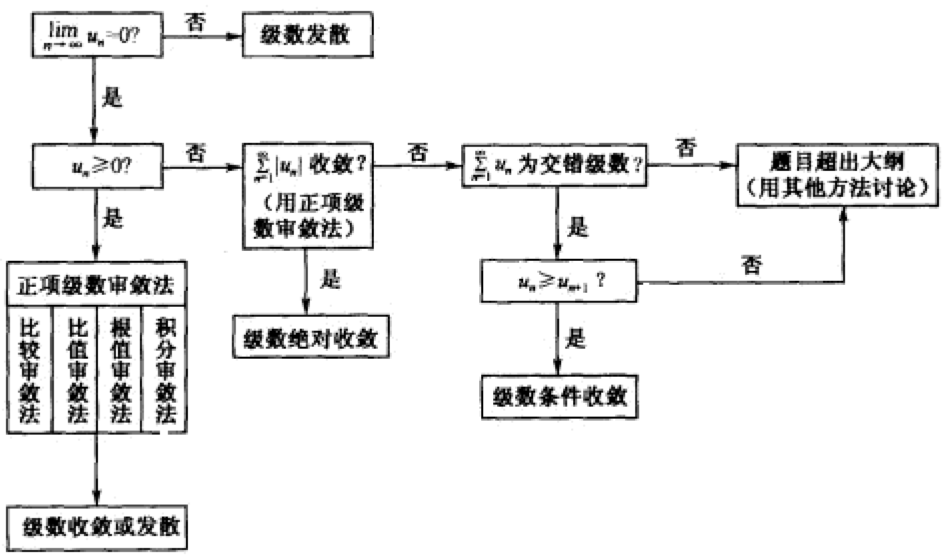


图 11.3.1

11.3.7　利用级数收敛的必要条件证明数列极限 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

基本原理　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

利用正项级数的比值审敛法和根值审敛法, 我们有(设 $u_n > 0(n=1,2,\cdots)$):

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; (2) 若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} < 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

例 11.3.5　证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$.

证　考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. 因为

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\bigg/\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛. 由级数收敛的必要条件, $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

11.3.8 一些无穷级数的和(表 11.3.2)

表 11.3.2

无穷级数的和	说明
$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots=1$	
$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots=\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots=\frac{1}{4}$	
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$	等比级数$\left(公比=\frac{1}{2}\right)$
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=+\infty$	调和级数
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln2$	交错调和级数
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$	p 级数($p=2$)
$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$	交错 p 级数($p=2$)
$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$	
$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=\mathrm{e}$	e 的展开式
$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$	π 的莱布尼茨展开式

● 11.4 幂 级 数

11.4.1 幂级数及其收敛性

1. 幂级数的定义

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的级数称为幂级数. 当 $x_0=0$ 时,得到 x 的幂级

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

令 $x-x_0=t$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 可化为 t 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

2. 幂级数的收敛点和发散点

使幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 收敛(或发散)的点 x 称为幂级数的收敛点(或发散点). 幂级数的全体收敛点的集合称为幂级数的收敛域.

3. 阿贝尔定理

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛且 $|x|<|x_0|$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 发散且 $|x|>|x_0|$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也发散.

①比收敛点 x_0 更接近原点的点 x 也是收敛点;②比发散点 x_0 更远离原点的点 x 也是发散点.

阿贝尔定理的一般形式:

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ 收敛且 $|x-x_0|<|x_1-x_0|$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 绝对收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ 发散且 $|x-x_0|>|x_1-x_0|$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 也发散.

①比收敛点 x_1 更接近收敛中心 x_0 的点 x 也是收敛点;②比发散点 x_1 更远离收敛中心 x_0 的点 x 也是发散点.

例 11.4.1 (1988 年 1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处(　　).

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 收敛性不能确定.

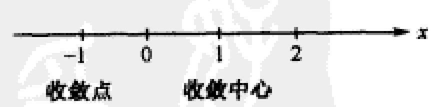


图 11.4.1

解 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则其收敛半径 $R\geqslant 1-(-1)=2$. 因为 $|2-1|=1<R$, 故由阿贝尔定理, 级数在 $x=2$ 处绝对收敛(图 11.4.1). 选(B).

11.4.2　幂级数的收敛半径和收敛区间

1．收敛半径和收敛区间

根据阿贝尔定理，若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必存在一个正数 R，使得当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；当 $x=R$ 或 $x=-R$ 时，幂级数可能收敛也可能发散.

这个正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，$(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间(图 11.4.2)

图 11.4.2

根据幂级数在 $x=R$ 和 $x=-R$ 处的敛散性，幂级数的收敛域有四种可能：$(-R, R)$，$[-R, R)$，$(-R, R]$或$[-R, R]$.

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛，则规定 $R=0$；若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个数轴上都收敛，则规定 $R=+\infty$.

2．收敛半径的求法

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (a_n \neq 0)$ 的收敛半径 R 用以下公式计算.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$　　(或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)　　$(0 \leqslant \rho \leqslant +\infty)$，则

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0(\text{幂级数处处收敛}), \\ 0, & \rho = +\infty(\text{幂级数仅在 } x = 0 \text{ 处收敛}). \end{cases}$$

以上公式仅适合 $a_n \neq 0$(即不缺幂)的情形，如果幂级数缺幂，则不能用这个公式.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn} (a_n \neq 0, m$ 是正整数)(后一项比前一项高 m 次幂)的收敛半径 R 用以下公式计算.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)$(0 \leqslant \rho \leqslant +\infty)$，则

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[m]{\rho}}, & 0<\rho<+\infty,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

特例 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$（只有偶次幂）或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$（只有奇次幂）$(a_n\neq0)$ 的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}, & 0<\rho<+\infty,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty,\end{cases}$$

其中 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$（或 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$）.

注 对缺幂的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{mn}$，也可以直接用绝对收敛的比值审敛法或根值审敛法来求收敛半径 R. 例如，由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{m(n+1)}}{a_nx^{mn}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|^m=\rho|x|^m<1$$

得 $|x|^m<\dfrac{1}{\rho}$ 或 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt[m]{\rho}}$，故 $R=\dfrac{1}{\sqrt[m]{\rho}}$.

例 11.4.2（1992 年 3） 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域.

解 由于幂级数仅有偶次幂，我们直接对幂级数用比值法. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{2n+2}}{(n+1)4^{n+1}}\Big/\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}\right|=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-2|^2=\frac{1}{4}|x-2|^2<1$$

得 $|x-2|<2$，即 $0<x<4$. 又当 $x=0$ 和 $x=4$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n4^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故幂级数的收敛域为 $(0,4)$.

11.4.3 求幂级数的收敛半径和收敛域的步骤

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径和收敛域可按以下步骤进行：

(1) 计算 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$（或 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$），得收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$ 和收敛区间 $(-R,R)$；

(2) 讨论幂级数在两个端点 $x=R$ 和 $x=-R$ 处的敛散性，然后写出幂级数的收敛域 $(-R,R)$，$[-R,R)$，$(-R,R]$ 或 $[-R,R]$.

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，可先作平移变换 $x-x_0=t$，然后求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛区间为 $|x-x_0|<R$ 或 (x_0-R, x_0+R). 最后讨论幂级数在两个端点 $x=x_0\pm R$ 处的敛散性并写出收敛域.

注 也可以直接用比值审敛法求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径，由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| = \rho|x-x_0| < 1$$

得 $|x-x_0|<\dfrac{1}{\rho}=R$.

11.4.4 幂级数的运算

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2. 记 $R=\min\{R_1, R_2\}$，则这两个幂级数在 $(-R, R)$ 内都绝对收敛，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n \qquad (-R<x<R),$$

即两个幂级数在其公共收敛区间内可以逐项相加(相减).

注 若 $R_1\neq R_2$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 的收敛半径 $R=\min\{R_1, R_2\}$；若 $R_1=R_2$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 的收敛半径 $R\geqslant R_1$.

例如，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)x^n$ 的收敛半径都是 1，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[1+(-1)]x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0x^n$ 的收敛半径 $R=+\infty$.

11.4.5 和函数的分析性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则函数

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-R<x<R)$$

称为幂级数的和函数. 和函数 $s(x)$ 有以下性质.

(1) $s(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续.

(2) $s(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导，且可以逐项求导：

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

逐项求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

(3) $s(x)$在$(-R,R)$内可积，且可以逐项积分：

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

逐项积分后的幂级数的收敛半径仍为 R.

例 11.4.3 (1990 年 1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.

解 因为 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+1} = 1$，所以收敛半径 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 都发散(因为一般项不趋于零)，故幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

幂级数的和函数 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}2nx^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = 2x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} + \dfrac{1}{1-x} = 2x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)' + \dfrac{1}{1-x} = 2x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2x}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

11.4.6 几个常见的幂级数的和函数

将函数的麦克劳林展开式反过来用，就得到一些幂级数的和函数. 几个常用的幂级数的和函数如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1),$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \\ &= \frac{1}{1+x} \quad (-1<x<1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \mathrm{e}^x \quad (-\infty<x<+\infty).\end{aligned}$$

求幂级数和函数的两个典型例子：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)' \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1);\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)\qquad(-1\leqslant x<1).$$

● 11.5 函数展开成幂级数

11.5.1 泰勒级数

1. 泰勒级数

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$内有各阶导数，则 $f(x)$在 $U(x_0)$内的泰勒级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

如果$\forall\, x\in U(x_0)$,

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

则在 $U(x_0)$内，函数 $f(x)$能展开成泰勒级数. 即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\qquad(x\in U(x_0)).$$

2. 麦克劳林级数

当 $x_0=0$ 时，得到函数 $f(x)$的麦克劳林级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

注 若$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)\neq 0$，则 $f(x)$的泰勒级数不收敛于 $f(x)$本身.

经典反例 函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处有各阶导数 $f^{(n)}(0)=0$，但 $f(x)$的麦克劳林级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0\neq f(x)$(当 $x\neq 0$ 时).

11.5.2　一些函数的麦克劳林级数(表 11.5.1)

表 11.5.1

麦克劳林级数	Σ 形式	适合范围
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$-\infty<x<+\infty$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$-\infty<x<+\infty$
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$-\infty<x<+\infty$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$-1<x\leqslant1$
$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$	$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$	$-1<x<1$
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$	$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$	$-1<x<1$
$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots$	$(1+x)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n$	$-1<x<1$ 端点 $x=\pm1$ 的收敛性取决于 μ
$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$	$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$-1<x\leqslant1$
$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$	$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$-1<x<1$
$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$	$\mathrm{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$-\infty<x<+\infty$
$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$\mathrm{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$-\infty<x<+\infty$
$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots$		$-1\leqslant x\leqslant1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\cdots$		$-1<x\leqslant1$
$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$		$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

注意　奇函数的展开式只有奇次幂,偶函数的展开式只有偶次幂. $\cos x$ 和 $\mathrm{ch}x$ 的展开式可分别由 $\sin x$ 和 $\mathrm{sh}x$ 的展开式逐项求导得到.

11.5.3　函数展开成幂级数的方法

将函数展开成幂级数主要有两种方法:直接展开法和间接展开法.

1. *直接展开法*

先求 $f^{(n)}(x_0)(n=0,1,2,\cdots)$,然后证明

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0\qquad(\forall x\in U(x_0)),$$

于是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\qquad(x\in U(x_0)).$$

2. 间接展开法

利用已知的展开式求函数的展开式. 例如,将 $\sin x$ 的展开式逐项求导,便得到 $\cos x$ 的展开式. 又如,将 x^2 代入 e^x 的展开式,便得到 e^{x^2}的展开式. 再如,将函数 $f(x)=\arctan x$ 求导,得 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,然后利用展开式 $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$,得 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$. 再逐项积分,便得到 $\arctan x$ 的展开式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1<x\leqslant 1)$.

例 11.5.1 (1989 年 1) 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展开为 x 的幂级数,并求 $f^{(7)}(0)$.

解 $f'(x)=\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}(-1<x<1)$. 于是

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

因为 $f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$,所以 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1\leqslant x<1)$.

因为 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, 故 $f(x)$的展开式中 x^7 的系数$(-1)^3\cdot\frac{1}{7}=\frac{f^{(7)}(0)}{7!}$,得 $f^{(7)}(0)=-6!=-720$.

例 11.5.2 证明: $\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证 因为$\frac{1}{1-xy}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(xy)^n$,所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1x^n\mathrm{d}x\int_0^1y^n\mathrm{d}y\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

● 11.6 傅里叶级数

11.6.1 傅里叶级数

设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数,且 $f(x)$可积.

$f(x)$的傅里叶系数计算公式：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

$f(x)$的傅里叶级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

其中 a_n 和 b_n 是 $f(x)$的傅里叶系数.

① 计算 $f(x)$的傅里叶系数一般要进行定积分的分部积分. ② 由于被积函数是以 2π 为周期的周期函数，因此可以用任何长度为 2π 的区间上的积分来计算傅里叶系数. 例如：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

总之，“哪里方便，就在哪里积分”.

11.6.2 傅里叶级数的收敛定理

狄利克雷收敛定理 设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，且满足以下条件：

(1) $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上至多有有限个极值点.

则 $f(x)$的傅里叶级数收敛，并且当 x 是$f(x)$的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

收敛定理表明，满足定理条件的函数 $f(x)$在其连续区间内可以展开成傅里叶级数，即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (x\text{ 是}f(x)\text{ 的连续点}).$$

例 11.6.1 (1992 年 1) 设 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x\leqslant 0, \\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi, \end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于________.

解 作出 $f(x)$的周期延拓后的函数 $F(x)$的图形(图 11.6.1). 由于 $x=\pi$ 是 $F(x)$的间断点，故 $f(x)$的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于

$$\begin{aligned} s(\pi) &= \frac{1}{2}[F(\pi-0)+F(\pi+0)] \\ &= \frac{1}{2}[(1+\pi^2)+(-1)] = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

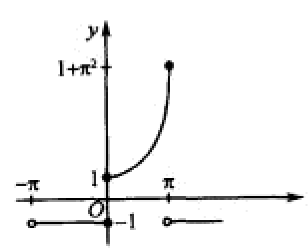


图 11.6.1

11.6.3 奇(偶)函数的傅里叶级数

设 $f(x)$是满足收敛定理条件的函数.

(1) 若 $f(x)$是以 2π 为周期的奇函数,则

$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1,2,3,\cdots), \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (x\text{ 是}f(x)\text{ 的连续点}),$$

即奇函数展开成正弦级数.

(2) 若 $f(x)$是以 2π 为周期的偶函数,则

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0,1,2,\cdots), \\ b_n = 0 & (n = 1,2,3,\cdots), \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (x\text{ 是}f(x)\text{ 的连续点}),$$

即偶函数展开成余弦级数.

11.6.4 周期函数展开成傅里叶级数的步骤

将周期为 2π 的周期函数 $f(x)$展开成傅里叶级数的步骤如下:

(1) 作出 $f(x)$在$(-2\pi,2\pi)$上的图形(注意观察 $f(x)$的间断点,不要漏掉 $\pm\pi$ 处的间断点);

(2) 计算 $f(x)$的傅里叶系数:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1,2,\cdots). \end{cases}$$

注意 $f(x)$有无奇偶性. 若 $f(x)$是奇函数,则 $a_n=0$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$;若 $f(x)$ 是偶函数,则 $b_n = 0, a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$.

(3) 写出 $f(x)$的傅里叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots \qquad (x\text{ 是}f(x)\text{ 的连续点}).$$

11.6.5 如何写出函数的傅里叶级数的和函数

由收敛定理,函数 $f(x)$的傅里叶级数的和函数 $s(x)$仅在 $f(x)$的间断点处与 $f(x)$有差别,在 $f(x)$的连续点处,$s(x)=f(x)$.事实上,

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & x \text{ 是} f(x) \text{ 的连续点}, \\ \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & x \text{ 是} f(x) \text{ 的间断点}. \end{cases}$$

因此,利用 $f(x)$的表达式就可以写出和函数 $s(x)$,而不必利用傅里叶级数.

写出和函数 $s(x)$的步骤如下:

(1) 作出函数 $f(x)$在$(-2\pi,2\pi)$上的图形,并观察 $f(x)$的间断点;

(2) 在 $f(x)$的连续点 x 处,$s(x)=f(x)$;在 $f(x)$的间断点 x 处,$s(x)=\dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$($f(x)$的左极限和右极限的平均值).

例 11.6.2 已知函数$f(x)$是以 2π 为周期的周期函数,$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi<x\leqslant 0,\\ x^2 & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 试按收敛定理写出 $f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上的和函数 $s(x)$.

解 作出 $f(x)$在$(-\pi+\epsilon,\pi+\epsilon)$上的图形(图 11.6.2). 从图中看出 $f(x)$有间断点 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

由收敛定理,和函数

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\pi^2+\pi+1), & x=\pm\pi,\\ 1-x, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x^2, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

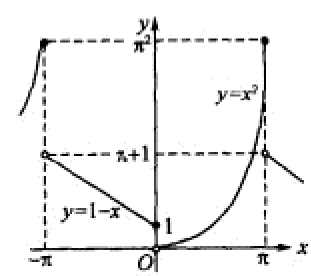


图 11.6.2

11.6.6 周期延拓与奇(偶)延拓

1. 周期延拓

设 $f(x)$仅在$[-\pi,\pi]$上有定义,并且满足收敛定理的条件,则 $f(x)$也可以展开成傅里叶级数,具体作法如下.

将 $f(x)$作周期延拓,得到以 2π 为周期的周期函数 $F(x)$(图 11.6.3),然后将 $F(x)$展开成傅里叶级数,最后限制 x 在$(-\pi,\pi)$内,则该级数就是 $f(x)$的傅里叶展开式.

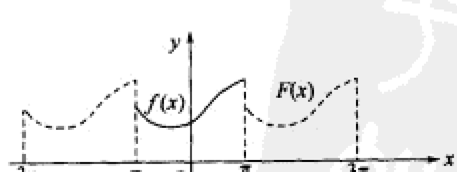


图 11.6.3

注 由于傅里叶系数的计算只涉及

$(-\pi,\pi)$上的函数 $f(x)$，因此没有必要写出周期延拓的函数 $F(x)$的表达式.

2. 奇(偶)延拓

设函数 $f(x)$仅在$[0,\pi]$上有定义，并且满足收敛定理的条件，则 $f(x)$也可以展开成傅里叶级数. 具体作法如下.

如果要将 $f(x)$展开成正弦级数(余弦级数)，则将 $f(x)$作奇延拓(偶延拓)，得到$(-\pi,\pi)$上的一个奇函数(偶函数)$F(x)$(图 11.6.4). 然后将 $F(x)$展开得到的正弦级数(余弦级数)限制在$(0,\pi)$上便得到 $f(x)$的正弦级数(余弦级数). 由于奇函数或偶函数的傅里叶系数的计算仅涉及$(0,\pi)$上的函数 $f(x)$，因此没有必要写出奇(偶)延拓的函数 $F(x)$的表达式.

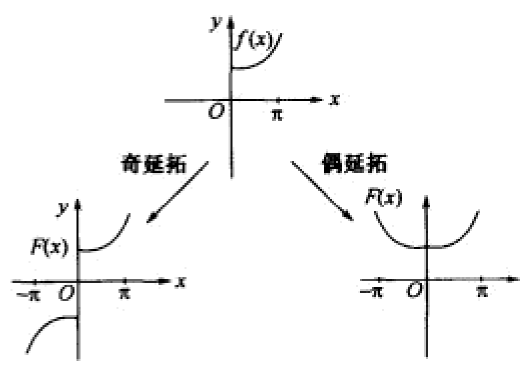


图 11.6.4

11.6.7 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

设 $f(x)$是周期为 $2l$ 的周期函数，且 $f(x)$满足收敛定理的条件，则 $f(x)$在其连续点处可以展开成傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中傅里叶系数为

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots).\end{cases}$$

当 $f(x)$为奇函数时，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad(x\text{ 是}f(x)\text{ 的连续点}),$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

当 $f(x)$ 为偶函数时，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (x\text{ 是 }f(x)\text{ 的连续点}),$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n = 0,1,2,\cdots).$$

例 11.6.3　将函数 $f(x)=10-x(5\leqslant x\leqslant 15)$ 展开为以 10 为周期的傅里叶级数.

解　将 $f(x)$ 周期延拓为 $F(x)$(图 11.6.5)，则 $F(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的表达式为 $F(x)=-x$. $F(x)$ 为奇函数，$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$，

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^5 x\mathrm{d}\cos\frac{n\pi x}{5} \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 - \int_0^5\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x\right] \\ &= (-1)^n\frac{10}{n\pi} \qquad (n = 1,2,3,\cdots), \end{aligned}$$

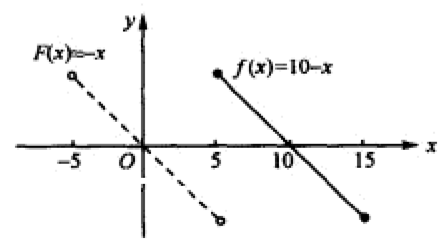


图 11.6.5

所以

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5} \qquad (5 < x < 15).$$

[redacted]　由于周期函数在一个周期上的定积分总是相同的，因此用 $y=-x$ 在 $[-5,5]$ 上求傅里叶系数比用 $y=10-x$ 在 $[5,10]$ 上求傅里叶系数要方便得多.

第12章 微分方程

12.1 微分方程的基本概念

12.1.1 微分方程

定义12.1.1 含有自变量、一元未知函数及其导数或微分的方程称为常微分方程,简称微分方程或方程.

例如,$\frac{dy}{dx}+2xy^2=0$, $\frac{d^2s}{dt^2}+3\frac{ds}{dt}+s=0$, $(3x+y)dy=4ydx$ 都是微分方程,其中 x,t 是自变量,y,s 是未知函数.

微分方程的阶 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.

例如,$y'+2xy^2=0$ 是一阶方程,$y'''+3xy^2+y'=0$ 是三阶方程.

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{12.1.1}$$

12.1.2 微分方程的解

设函数 $y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶连续导数,且满足

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]=0 \quad (\forall x\in I),$$

则称函数 $y=\varphi(x)$,是微分方程(12.1.1)在区间 I 上的解.

微分方程的通解 如果 n 阶微分方程(12.1.1)的解 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$中含有 n 个相互独立的任意常数$C_1,\cdots,C_n$,则称此解为方程(12.1.1)的通解.

微分方程的特解 微分方程不含任意常数的解称为方程的特解.

微分方程的积分曲线 微分方程的解 $y=\varphi(x)$所表示的曲线称为方程的积分曲线.

12.1.3 微分方程的初值问题

n 阶微分方程的特解一般是通过 n 个初始条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

确定通解中的 n 个任意常数来得到的.

含有初始条件的微分方程称为初值问题.

一阶微分方程的初值问题形如

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ y(x_0)=y_0, \end{cases}$$

其几何意义是过通过点(x_0,y_0)的积分曲线.

二阶微分方程的初值问题形如

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'')=0, \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, \end{cases}$$

其几何意义是求通过点(x_0,y_0)且在该点处的切线斜率为y'_0的积分曲线.

微分方程解的存在性定理　设函数$f(x,y)$及其偏导数$f_y(x,y)$在矩形区域$R=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$上连续,则存在一个区间$|x-x_0|\leqslant h<a$,在该区间上初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

有唯一的解$y=\varphi(x)$.

● 12.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

12.2.1　简单的一阶微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \quad 或 \quad dy=f(x)dx$$

的微分方程是最简单的一阶微分方程.这种方程只需积分便可得到通解:

$$y=\int f(x)dx+C.$$

12.2.2　可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \quad 或 \quad f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$$

的方程称为可分离变量的微分方程.

可分离变量的微分方程的解法如下:

(1) 分离变量：$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 积分：$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$；

(3) 得通解：$G(y)=F(x)+C$ （隐式解）.

12.2.3 齐次方程

可化为以下形式的微分方程称为齐次方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 齐次方程可以通过齐次函数来加以辨认.

齐次函数 若函数 $f(x,y)$满足恒等式

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y),$$

则称 $f(x,y)$是 n 次齐次函数.

例如，x^2+2xy 是二次齐次函数，x^3+x^2y 是三次齐次函数. 若 $M(x,y)$和 $N(x,y)$是同次齐次函数，则微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

就是齐次方程.

例如，$(6x^2-y^2)\mathrm{d}x-3xy\mathrm{d}y=0$ 或$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{6x^2-y^2}{3xy}$是齐次方程.

齐次方程可以通过变量代换化为可分离变量的方程来求解.

齐次方程的解法如下.

(1) 将齐次方程化为标准形式：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

(2) 令$\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 将此式代入原方程，则原方程化为可分离变量的方程：

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u).$$

(3) 分离变量，并积分$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，得 $F(u)=\ln x+C$. 因此原方程的通解为

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\ln x+C.$$

注 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$也是齐次方程. 令$\frac{x}{y}=u$ 可将原方程化为可分离变量的方程.

例 12.2.1 (1998 年 3) 设函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上连续. 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t(t>1)$与 x 轴所围成的平面图形绕x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y(2)=\frac{2}{9}$ 的解.

解 由旋转体体积公式 $V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$，得方程

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

求导，得微分方程 $3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t)$. 将此方程改写为 $x^2y'+2xy=3y^2$ 或

$$y'=\frac{3y^2-2xy}{x^2}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\cdot\frac{y}{x},$$

这是一个齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$，$y=xu$，$y'=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2-2u.$$

分离变量，并积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}=\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x,$$

得 $\frac{u-1}{u}=Cx^3$. 再将 $u=\frac{y}{x}$ 代入，得通解 $y=x+Cx^3y$. 最后将条件 $x=2$，$y=\frac{2}{9}$ 代入通解，得 $C=-1$. 所以，所求特解为 $y=x-x^3y$ 或 $y=\frac{x}{1+x^3}$.

[redacted] $x^2y'+2xy=3y^2$ 也是伯努利方程，可按伯努利方程的解法解之.

12.2.4 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x), \tag{12.2.1}$$

其对应齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0. \tag{12.2.2}$$

一阶线性微分方程(12.2.1)的通解由以下公式给出：

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

通解的结构：

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\bar{y}+y^*,$$

其中 $\bar{y}$ 是对应齐次线性方程(12.2.2)的通解，y^* 是原方程(12.2.1)的一个特解(对应于 $C=0$ 的特解).

例 12.2.2 (1997 年 3) 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $f(t)$.

解 先利用极坐标计算二重积分:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right) r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{r}{2}\right) r\mathrm{d}r,$$

于是 $f(t) = \mathrm{e}^{4\pi t^2} + 2\pi\int_0^{2\pi} f\left(\frac{r}{2}\right) r\mathrm{d}r$. 求导,得

$$f'(t) = 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t) \quad 或 \quad f'(t) - 8\pi t f(t) = 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}.$$

这是一个一阶线性微分方程,其通解为

$$f(t) = \mathrm{e}^{\int 8\pi t\mathrm{d}t}\left(\int 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}\mathrm{e}^{-\int 8\pi t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C\right) = \mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2 + C).$$

又因为 $f(0)=1$, 得 $C=1$,所以 $f(t)=(4\pi t^2+1)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$.

12.2.5 伯努利方程

伯努利方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (n \neq 0,1). \tag{12.2.3}$$

伯努利方程可以通过变量代换化为一阶线性方程求解.

伯努利方程的解法如下.

(1) 方程(12.2.3)两端同时除以 y^n,得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

或

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{1-n}) + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^{1-n}) + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x). \tag{12.2.4}$$

(2) 令 $z=y^{1-n}$,得 z 的一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \tag{12.2.5}$$

(3) 解方程(12.2.5),得

$$z = \mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)\mathrm{e}^{\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right).$$

将 $z=y^{1-n}$代入上式,得原方程的通解

$$y^{1-n} = \mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\left(\int(1-n)Q(x)\mathrm{e}^{\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) \tag{12.2.6}$$

或

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int (1-n)Q(x)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{1-n}}.$$

点评 也可以由方程(12.2.4)(看成 y^{1-n}的一阶线性方程)直接得出通解(12.2.6).

例 12.2.3 (1993 年 1) 求微分方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

解 这是一个伯努利方程. 方程两边同除以 y^2,得

$$\frac{x^2}{y^2}y' + \frac{x}{y} = 1 \quad 或 \quad -x^2(y^{-1})' + xy^{-1} = 1.$$

方程两边同除以 $-x^2$,得

$$y^{-1} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

这是 y^{-1}的一阶线性方程,故

$$y^{-1} = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= x\left(\int\left(-\frac{1}{x^3}\right)dx + C\right) = \frac{1}{2x} + Cx = \frac{1+2Cx^2}{2x}.$$

于是方程的通解为 $y = \frac{2x}{1+2Cx^2}$. 将 $x=1$, $y=1$ 代入通解,得 $C=\frac{1}{2}$. 所求特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

点评 $x^2y' + xy = y^2$ 也是齐次方程,可用齐次方程的解法解之.

12.2.6 全微分方程(恰当方程)

如果 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 恰好是某一个函数 $u(x,y)$的全微分,即 $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,则方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{12.2.7}$$

称为全微分方程(或恰当方程).

如果 $P(x,y)$和 $Q(x,y)$在单连通区域 G 内具有连续偏导数,则方程(12.2.7)是全微分方程的充分必要条件是等式 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立(见 10.4.1 节).

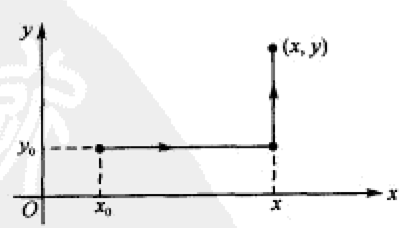


图 12.2.1

全微分方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\left(其中\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$的解法是通过对坐标的曲线积分求出原函数$u(x,y)$, 则方程的通解为 $u(x,y)=C$. 由于曲线积分与路径无关,于是方程的通解为(图 12.2.1)

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C$$

或

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\mathrm{d}y = C.$$

例 12.2.4（1997年2）　求微分方程$(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$的通解.

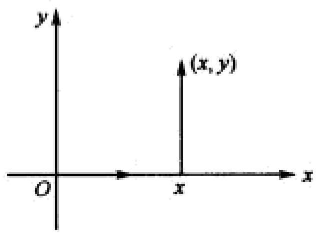


图 12.2.2

解　因为$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+2xy-y^2)=2x-2y=\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy)$，故方程为全微分方程，原函数（曲线积分与路径无关（图 12.2.2））为

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x 3x^2\mathrm{d}x + \int_0^y (x^2-2xy)\mathrm{d}y \\ &= x^3+x^2y-xy^2, \end{aligned}$$

于是方程的通解为$x^3+x^2y-xy^2=C$.

此方程也是齐次方程，可按齐次方程的解法解之.

● 12.3　可降阶的高阶微分方程

12.3.1　$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

形如$y^{(n)}=f(x)$的n阶微分方程只需连续进行n次积分就可以求出其通解：

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1 = F_1(x) + C_1 \qquad (\text{降为 } n-1 \text{ 阶方程}),$$

$$y^{(n-2)} = \int [F_1(x)+C_1]\mathrm{d}x + C_2 = F_2(x, C_1) + C_2 (\text{降为 } n-2 \text{ 阶方程}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = F_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}) + C_n \qquad (\text{通解}).$$

12.3.2　两种特殊的二阶微分方程

二阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

下面讨论两种特殊的二阶微分方程的解法.

1. $F(x,y',y'')=0$ 型的微分方程

方程的特点：不显含未知函数y.

这种方程可以通过变量代换降为一阶方程.解法如下：

(1) 令$y'=p$，则$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 原方程化为$p$的一阶方程：

$$F\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

解之，得 $p = \varphi(x, C_1)$.

(2) 再解一阶方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$，得通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2.$$

2. $F(y, y', y'') = 0$ 型的微分方程

方程的特点：不显含自变量 x.

这种方程可以通过变量代换降为一阶方程. 解法如下：

(1) 令 $y' = p$，则

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot p.$$

原方程化为 p 的一阶方程：

$$F\left(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right) = 0.$$

解之，得 $p = \varphi(y, C_1)$.

(2) 再解一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(y, C_1) \qquad (\text{可分离变量}),$$

分离变量，再积分，得通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 12.3.1 (2002 年 1,2) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = \frac{1}{2}$的特解是________.

解 方程是不显含 x 的特殊的二阶方程. 令 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 原方程化为 $p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p\right) = 0$. 因为 $p \neq 0$($y'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$)，约去 p，得方程 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p = 0$. 分离变量，并积分，得 $p = \frac{C_1}{y}$. 将 $y = 1, p = y' = \frac{1}{2}$代入，得 $C_1 = \frac{1}{2}$. 于是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y}$. 再分离变量，并积分，得 $y^2 = x + C_2$. 将 $x = 0$，$y = 1$ 代入，得 $C_2 = 1$，故所求特解为 $y^2 = x + 1$.

● 12.4 高阶线性微分方程

12.4.1 齐次线性微分方程的通解结构

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x). \tag{12.4.1}$$

若 $f(x)\not\equiv 0$,则称(12.4.1)为非齐次线性微分方程;若 $f(x)\equiv 0$,则称

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{12.4.2}$$

为齐次线性微分方程. 方程(12.4.2)也称为非齐次线性方程(12.4.1)所对应的齐次线性方程.

齐次线性微分方程的解的叠加原理 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是齐次线性方程(12.4.2)的 n 个解,则这些解的线性组合

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \tag{12.4.3}$$

也是方程(12.4.2)的解(齐次线性方程的解集对于解的线性运算是封闭的).

注 如果方程 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是齐次线性方程(12.4.2)的 n 个线性相关的解,则(12.4.3)不是方程(12.4.2)的通解.

齐次线性方程的通解结构定理 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是齐次线性方程(12.4.2)的 n 个线性无关的解,则

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

是方程(12.4.2)的通解.

12.4.2 函数组的线性相关性

定义 12.4.1 n 个函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在区间 I 上线性相关是指存在不全为零的 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使得

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0 \quad (\forall x \in I).$$

如果这样的 n 个数不存在,则称这 n 个函数在 I 上线性无关.

命题 12.4.1 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在区间 I 上线性相关的充分必要条件是这 n 个函数的朗斯基行列式在 I 上恒为零,即

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

推论 12.4.1 两个函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 I 上线性相关的充分必要条件是 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv$ 常数.

12.4.3 非齐次线性微分方程的通解结构

设有 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{12.4.4}$$

及其对应齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{12.4.5}$$

非齐次线性方程的通解结构定理 设 $y^*(x)$是非齐次线性方程(12.4.4)的一个特解, $Y(x)$是对应齐次线性方程(12.4.5)的通解,则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性方程(12.4.4)的通解.

命题 12.4.2 设 $y_1(x)$和 $y_2(x)$是非齐次线性方程(12.4.4)的两个解,则 $y_1(x) - y_2(x)$是对应齐次线性方程(12.4.5)的解.

例 12.4.1 (1989 年 1) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$的解, C_1, C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是( ).

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;　　(B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$;　　(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

解 因为 y_1, y_2, y_3 是非齐次线性方程的三个解,所以 $y_1 - y_3$ 和 $y_2 - y_3$ 是对应齐次方程的两个解. 由于 y_1, y_2, y_3 线性无关,因此 $y_1 - y_3$ 和 $y_2 - y_3$ 也线性无关. 所以非齐次线性方程的通解是 $y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3 = C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$. 选(D).

12.4.4 非齐次线性微分方程的解的叠加原理

1. 解的叠加原理

设 y_1^* 和 y_2^* 分别是非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_1(x)$$

和

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_2(x)$$

的特解,则 $y_1^* + y_2^*$ 是非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

2. 复数解的叠加原理

设线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) + \mathrm{i}g(x)$$

(其中 $a_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$, $f(x)$和 $g(x)$均为实函数)有复数解 $y = u^* + \mathrm{i}v^*$, 则这个解的实部 u^* 和虚部 v^* 分别是线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

和

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$$

的解.

12.4.5 二阶常系数齐次线性微分方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{12.4.6}$$

其中 p,q 为常数.

方程(12.4.6)的解法如下:

(1) 写出方程(12.4.6)的特征方程:

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{12.4.7}$$

(2) 解特征方程(12.4.7),得两个特征根:

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

(3) 根据特征根的不同情况,按表12.4.1写出方程(12.4.6)的通解.

表 12.4.1

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的判别式	特征根	两个线性无关的特解	齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
$\Delta=p^2-4q>0$	r_1,r_2 是两个不相等的实根	e^{r_1x}, e^{r_2x}	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$\Delta=p^2-4q=0$	$r_1=r_2=r=-\frac{p}{2}$ 是两个相等的实根	e^{rx}, xe^{rx}	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$ $=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$
$\Delta=p^2-4q<0$	$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 是一对共轭复根	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 12.4.2 设 $y_1=e^{-x}$ 和 $y_2=xe^{-x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程的两个解,则该微分方程为________.

解 由于 y_1,y_2 线性无关,该微分方程有通解 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}=(C_1+C_2x)e^{-x}$. 因此该微分方程有二重特征根 $r_1=r_2=-1$,特征方程为 $(r+1)^2=r^2+2r+1=0$. 所以该微分方程为 $y''+2y'+y=0$.

2. n 阶常系数齐次线性微分方程的通解

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0, \tag{12.4.8}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数.

方程(12.4.8)的解法如下.

(1) 写出方程(12.4.8)的特征方程:

$$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0. \tag{12.4.9}$$

(2) 解特征方程(12.4.9),得 n 个特征根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$.

(3) 根据特征根的不同情况,按表 12.4.2 写出各特征根所对应的通解中的项.

(4) 根据表 12.4.2 中通解的对应项写出方程(12.4.8)的通解.

表 12.4.2

特征根	方程的通解中的对应项
单实根 r	给出一项:Ce^{rx}
k 重实根 r	给出 k 项:$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对单复根 $\alpha\pm i\beta$	给出两项:$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对 k 重复根 $\alpha\pm i\beta$	给出 $2k$ 项:$e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x\right]$

12.4.6 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{12.4.10}$$

其中 p,q 是常数,$f(x)\neq 0$, 其对应齐次线性方程为

$$y''+py'+qy=0. \tag{12.4.11}$$

方程(12.4.10)的解法如下:

(1) 求出对应齐次方程(12.4.11)的通解 $Y=C_1y_1+C_2y_2$(用特征方程的方法).

(2) 求非齐次线性方程(12.4.10)的一个特解 y^*(用待定系数法).

(3) 则非齐次线性方程(12.4.10)的通解为

$$y=Y+y^*=C_1y_1+C_2y_2+y^*.$$

例 12.4.3 (1997 年 2) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶

常系数非齐次线性微分方程的三个解,求此微分方程.

解 因为 y_1,y_2,y_3 是非齐次线性方程的解,故 $y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x}$ 和 $y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应齐次线性方程的解. 又 $(y_1-y_2)+(y_1-y_3)=e^{2x}$ 也是对应齐次线性方程的解,因此,$Y_1=e^{2x}$ 和 $Y_2=e^{-x}$ 是对应齐次线性方程的两个线性无关的解,且对应齐次线性方程的特征方程为 $(r-2)(r+1)=r^2-r-2=0$. 故对应齐次方程为 $y''-y'-2y=0$.

因为 $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}=xe^x+Y_1-Y_2$,所以非齐次线性方程有特解 $y^*=xe^x$. 设非齐次线性方程为 $y''-y'-2y=f(x)$. 将 $y^*=xe^x$ 代入方程,得

$$\begin{aligned}f(x)&=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x\\&=(x+2)e^x-(x+1)e^x-2xe^x=(1-2x)e^x.\end{aligned}$$

因此所求微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$.

12.4.7 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解的求法

设有二阶常系数非齐次线性方程

$$y''+py'+qy=f(x),$$

其特征方程为 $r^2+pr+q=0$.

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

设 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$,其中 $P_m(x)$ 是 m 次多项式,则方程 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解形如

$$y^*=\begin{cases}Q_m(x)e^{\lambda x}, & \lambda\text{ 不是特征根 }(\lambda^2+p\lambda+q\neq 0),\\ xQ_m(x)e^{\lambda x}, & \lambda\text{ 是特征单根 }\left(\lambda^2+p\lambda+q=0\text{ 但 }\lambda\neq-\dfrac{p}{2}\right),\\ x^2Q_m(x)e^{\lambda x}, & \lambda\text{ 是特征重根 }\left(\lambda^2+p\lambda+q=0\text{ 且 }\lambda=-\dfrac{p}{2}\right),\end{cases}$$

其中 $Q_m(x)$ 是待定的 m 次多项式.

注意 $Q(x)=x^kQ_m(x)$ 满足方程

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x).$$

(1) 当 λ 是特征单根(即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,但 $\lambda\neq-\dfrac{p}{2}$)时,$Q(x)=xQ_m(x)$ 满足方程 $Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_m(x)$;

(2) 当 λ 是特征重根(即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,且 $\lambda=-\dfrac{p}{2}$)时,$Q(x)=x^2Q_m(x)$ 满足方程 $Q''(x)=P_m(x)$.

由此可以比较容易地求出待定多项式 $Q(x)$ 和特解 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$.

特例 设 $f(x)=P_m(x)(\lambda=0)$,则方程 $y''+py'+qy=P_m(x)$ 的特解形如

$$y^* = \begin{cases} Q_m(x), & 0\text{不是特征根}\ (q\neq 0), \\ xQ_m(x), & 0\text{是特征单根}\ (q=0\text{但}\ p\neq 0), \\ x^2Q_m(x), & 0\text{是特征重根}\ (q=0\text{且}\ p=0). \end{cases}$$

注 根据这个公式，$y''+py'+qy=P_m(x)(q\neq 0)$的特解形如 $y^*=Q_m(x)$；$y''+py'=P_m(x)(p\neq 0)$的特解形如 $y^*=xQ_m(x)$；$y''=P_m(x)$的特解形如 $y^*=x^2Q_m(x)$.

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_m(x)\sin\omega x]$型

设 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_m(x)\sin\omega x]$，其中 $P_l(x)$和 $P_m(x)$分别是 l 次和 m 次多项式，则方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_m(x)\sin\omega x]$$

的特解形如

$$y^* = \begin{cases} e^{\lambda x}[Q_n(x)\cos\omega x+R_n(x)\sin\omega x], & \lambda+i\omega\ \text{不是特征根}, \\ xe^{\lambda x}[Q_n(x)\cos\omega x+R_n(x)\sin\omega x], & \lambda+i\omega\ \text{是特征根}, \end{cases}$$

其中 $n=\max\{l,m\}$，$Q_n(x)$和 $R_n(x)$是待定的 n 次多项式.

特例 设 $f(x)=P_m(x)\cos\omega x$(或 $P_m(x)\sin\omega x$)，则方程

$$y''+py'+qy=P_m(x)\cos\omega x(\text{或}\ P_m(x)\sin\omega x)$$

的特解形如

$$y^* = \begin{cases} Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x, & i\omega\ \text{不是特征根}, \\ x[Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x], & i\omega\ \text{是特征根}. \end{cases}$$

例 12.4.4 (1996 年 2) 求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

解 这是二阶常系数非齐次线性方程. 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+r=0$. 解之，得特征根 $r_1=0$，$r_2=-1$，故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^0+C_2e^{-x}=C_1+C_2e^{-x}$.

因为 $\lambda=0$ 是特征单根，故设原方程的特解为 $y^*=x(ax^2+bx+c)$. 将 y^*代入原方程，得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-1$，$c=2$，故所求通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x.$$

点评 $y''+y'=x^2$ 也是可降阶的二阶微分方程，可用降阶法解之.

12.4.8 二阶常系数非齐次线性微分方程的复数解法

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)\cos\omega x \tag{12.4.12}$$

可以用以下复数法化为 $f(x)=e^{\mu x}P_m(x)$ 型的方程来求其特解. 具体作法如下：

(1) 将自由项补上虚部,得方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}P_m(x)(\cos\omega x + i\sin\omega x). \tag{12.4.13}$$

(2) 利用欧拉公式

$$\cos\omega x + i\sin\omega x = e^{i\omega x}$$

将方程(12.4.13)化为 $f(x)=e^{\mu x}P_m(x)$型的方程(复数方程):

$$y'' + py' + qy = e^{(\lambda+i\omega)x}P_m(x). \tag{12.4.14}$$

(3) 解方程(12.4.14),得特解(复数解):

$$y^* = y_1^* + iy_2^*. \tag{12.4.15}$$

(4) 则复数解(12.4.15)的实部 y_1^* 就是原方程(12.4.12)的特解.

同理,方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}P_m(x)\sin\omega x$$

也可以通过补上实部的方法化为 $f(x)=e^{\mu x}P_m(x)$型的方程 $y''+py'+qy=e^{(\lambda+i\omega)x}P_m(x)$, 则此方程的复数解 $y^*=y_1^*+iy_2^*$ 的虚部 y_2^* 即为原方程的特解.

例 12.4.5 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 得特征根 $r=\pm i$. 对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

现用复数法求原方程的特解. 考虑方程

$$y'' + y = x(\cos 2x + i\sin 2x) \quad 或 \quad y'' + y = xe^{2xi}. \tag{12.4.16}$$

因为 $2i$ 不是特征根,故设方程(12.4.16)有特解 $y^*=(ax+b)e^{2xi}$.求导

$$y^{*\prime} = [a + 2i(ax+b)]e^{2xi} = (a + 2bi + 2axi)e^{2xi},$$

$$y^{*\prime\prime} = [2ai + 2i(a + 2bi + 2axi)]e^{2xi} = (4ai - 4b - 4ax)e^{2xi}.$$

将 y^*和 $y^{*\prime\prime}$代入方程(12.4.16),得

$$4ai - 4b - 4ax + ax + b = x \quad 或 \quad 4ai - 3b - 3ax = x.$$

于是 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{4a}{3}i=-\frac{4}{9}i$, 得

$$y^* = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i\right)e^{2xi} = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}i\right)(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x - \left(\frac{1}{3}x\sin 2x + \frac{4}{9}\cos 2x\right)i.$$

所以 y^*的实部 $y_1^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$ 为原方程的一个解. 原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$$

12.4.9 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}xy' + p_n y = f(x) \tag{12.4.17}$$

(其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数)的微分方程称为欧拉方程.

欧拉方程是特殊的变系数线性微分方程,它可以通过变量代换化为常系数线性微分方程.

欧拉方程(12.4.17)的解法如下:

(1) 作变换 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

得 $xy'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 或 $xy'=Dy$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

得 $x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 或 $x^2y''=D^2y-Dy=D(D-1)y$,

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

得 $x^3y'''=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=D^3y-3D^2y+2D=D(D-1)(D-2)y$.

一般地,有

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$$

(2) 将以上关系代入欧拉方程(12.4.17),得到一个以 t 为自变量,y 为未知函数的 n 阶常系数线性方程. 解这个方程并将 $t=\ln x$ 代入其通解便得到欧拉方程(12.4.17)的通解.

例 12.4.6 (2004 年 1) 欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为________.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$,得

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=D(D-1)y+4Dy+2y=0,$$

得

$$D^2y+3Dy+2y=0\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0.$$

这个二阶常系数齐次线性方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}$. 于是原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$.

参考文献

高等学校工科数学课程教学指导委员会本科组. 1992. 高等数学释疑解难. 北京:高等教育出版社

谷超豪. 1992. 数学词典. 上海:上海辞书出版社

郭大钧. 1985. 大学数学手册. 济南:山东科学技术出版社

蒋传章等. 1993. 高等数学题解辞典——问题与解答. 西安:陕西科学技术出版社

全国高校工科数学课程指导委员会《工科数学》编委会. 1998. 工科数学,(14)5:1-300

沈永欢等. 1992. 实用数学手册. 北京:科学出版社

数学手册编写组. 1979. 数学手册. 北京:高等教育出版社

同济大学应用数学系. 2002. 高等数学(第五版)(上、下册). 北京:高等教育出版社

杨志和. 2001. 微积分(上、下册). 北京:高等教育出版社

杨志和. 2003. 微积分学习指导. 成都:四川大学出版社

Stewart J. 2003. Calculus(5th ed.). Brooks/Cole

Varberg D et al. 2000. Calculus(8th ed.). Prentice-Hall

Zwillinger D. 1996. Standard Mathematical Tables and Fo.mulae. CRC Press

附录A 常用初等数学公式

A.1 初等代数

A.1.1 乘法和因式分解

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
5. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
6. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
8. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
9. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$ 是正整数).
10. n 是正偶数时，$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$.
11. n 是正奇数时，$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$.
12. 二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

A.1.2 一元二次方程

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.
2. 根的公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
3. 根与系数的关系(韦达定理) $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.
4. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$:

$\Delta=b^2-4ac>0$ 方程有两个不等的实根；

$\Delta=b^2-4ac=0$ 方程有两个相等的实根；

$\Delta=b^2-4ac<0$ 方程有两个共轭的复根.

5. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点$\left(-\dfrac{b}{2a},c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$.

A.1.3 不等式

1. 不等式的基本性质：

(1) $a>b$, $b>c\Rightarrow a>c$.

(2) $a>b\Rightarrow a\pm c>b\pm c$.

(3) $a>b$, $c>0\Rightarrow ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$.

(4) $a>b$, $c<0\Rightarrow ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$.

2. 绝对值不等式：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$. (2) $|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

(3) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$. (4) $||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

(5) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

3. 均值不等式：

(1) 若 a, $b>0$, 则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,等式成立当且仅当 $a=b$, 即两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

(2) 若 $a_i>0$ ($i=1,2,\cdots,n$), 则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

等式成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

A.1.4 指数

1. 指数的定义：

$a^n=a\cdot a\cdots a(n\text{ 个 }a)$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0)$,

$a^0=1(a\neq0)$, $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0)$,

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq0)$,

其中 m,n 是正整数.

2. 指数的运算法则：

$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta},\quad \frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta},\quad (a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},\quad (ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

其中 a,b 是正实数, α,β 是任意实数.

A.1.5 对数

1. 对数的定义：

如果 $a^x=N(a>0,\ a\neq1)$, 则称 x 为 N 的以 a 为底的对数, 记作 $x=\log_aN$, N 称为真数. 即

$$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_aN.$$

2. 对数恒等式 $a^{\log_aN}=N$.

3. 对数的性质

(1) $\log_a1=0$; (2) $\log_aa=1$.

4. 对数的运算公式：

(1) $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$ (积的对数 = 对数的和);

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$ (商的对数 = 对数的差);

(3) $\log_aM^n=n\log_aM$ (幂的对数 = 对数的倍数);

(4) $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M$.

5. 换底公式　$\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.　特例　$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

6. 常用对数　$\lg M = \log_{10} M$.

7. 自然对数　$\ln M = \log_e M$　$(e = 2.71828\cdots)$.

8. 常用的对数公式

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1 \qquad a = e^{\ln a} \qquad a^b = e^{b\ln a} \qquad (a > 0).$$

A.1.6 复数

1. 虚数单位　$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

2. 复数的表示(图 A.1.1):

(1) 代数式: $z = a + bi$;

(2) 三角式: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

(3) 指数式: $z = re^{i\varphi}$,

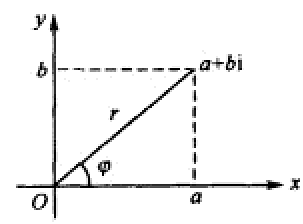


图 A.1.1

其中

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \tan\varphi = \dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

3. 欧拉公式　$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

4. 复数的四则运算

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$,

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$,

$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$.

A.1.7 数列

1. 等差数列　首项为 a_1,公差为 $d(d \neq 0)$的等差数列

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d, \cdots, a_1 + (n-1)d, \cdots.$$

(1) 通项公式　$a_n = a_1 + (n-1)d$;

(2) 前 n 项的和　$s_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

2. 等比数列　首项为 a_1,公比为 $r(r \neq 0)$的等比数列

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, \cdots, a_1 r^{n-1}, \cdots.$$

(1) 通项公式　$a_n = a_1 r^{n-1}$;

(2) 前 n 项的和 $s_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ $(r \neq 1)$.

特例　$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ $(r \neq 1)$.

3. 一些数列前 n 项的和：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　(前 n 个自然数的和)；

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$　(前 n 个正奇数的和)；

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　(前 n 个自然数的平方和)；

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$　(前 n 个自然数的立方和)；

(5) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$；

(6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

A.1.8　行列式

1. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

2. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

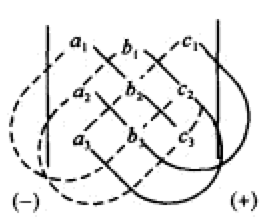


图 A.1.2

三阶行列式可用以下方法计算：

(1) 对角线展开(图 A.1.2)；

(2) 降阶展开　按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

A.1.9　线性方程组的解(克拉默法则)

1. 二元线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解 $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, 其中

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,\quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

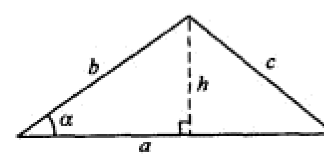
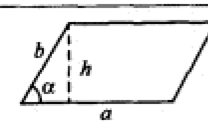
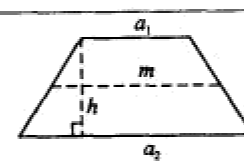
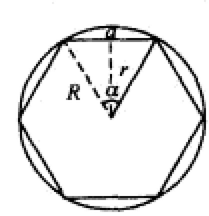
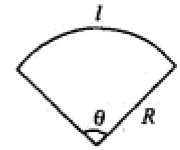
2. 三元线性方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 的解 $x=\dfrac{D_x}{D}$，$y=\dfrac{D_y}{D}$，$z=\dfrac{D_z}{D}$，其中

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0,\ D_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix},\ D_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}.$$

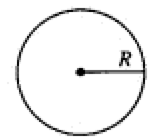
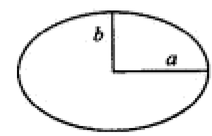
● A.2 初等几何

A.2.1 平面图形(表 A.2.1)

表 A.2.1

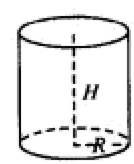
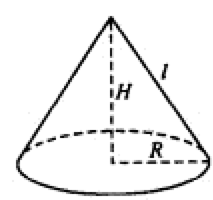
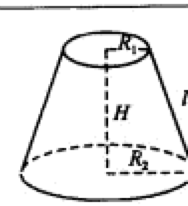
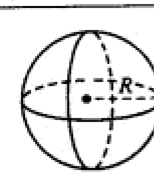
公　式	图　形
1. 三角形 面积 $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　（海伦公式） （其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$）	
2. 平行四边形 面积 $S=ah=ab\sin\alpha$	
3. 梯形 面积 $S=\frac{1}{2}(a_1+a_2)h=mh$ 中位线 $m=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$	
4. 正 n 边形 设a = 边长，α = 圆心角$\left(\alpha=\frac{360^\circ}{n}\right)$ R = 外接圆半径，r = 内接圆半径 面积 $S=\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha$ 边长 $a=2R\sin\frac{\alpha}{2}=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$	
5. 扇形 面积 $S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}Rl$ 弧长 $l=R\theta$（θ 是弧度）	

续表

公　　式	图　　形
6. 圆 面积 $S=\pi R^2$ 周长 $l=2\pi R$	
7. 椭圆 面积 $S=\pi ab$ 周长 $l\approx\pi\left[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right]$	

A.2.2　立体图形(表 A.2.2)

表 A.2.2

公　　式	图　　形
1. 圆柱体 体积 $=\pi R^2H$ 侧面积 $=2\pi RH$ 全面积 $=2\pi R(R+H)$	
2. 圆锥体 斜长 $l=\sqrt{R^2+H^2}$ 体积 $=\frac{1}{3}\pi R^2H$ 侧面积 $=\pi Rl$ 全面积 $=\pi R(R+l)$	
3. 圆台 斜长 $l=\sqrt{H^2+(R_2-R_1)^2}$ 体积 $=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$ 侧面积 $=\pi l(R_1+R_2)$ 全面积 $=\pi[R_1^2+R_2^2+l(R_1+R_2)]$	
4. 球体 体积 $=\frac{4}{3}\pi R^3$ 表面积 $=4\pi R^2$	

● A.3 三角函数

A.3.1 弧度和度的关系

1. $1^\circ=\frac{\pi}{180}$弧度$=0.01745$弧度.

2. 1弧度$=\frac{180^\circ}{\pi}=57.29578^\circ=57^\circ17'45''$.

A.3.2 三角函数的定义

1. 锐角三角函数的定义(图A.3.1):

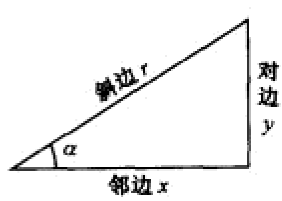
$$\text{正弦 } \sin\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\frac{y}{r},\quad \text{余弦 } \cos\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\frac{x}{r},$$

$$\text{正切 } \tan\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{y}{x},\quad \text{余切 } \cot\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}=\frac{x}{y},$$

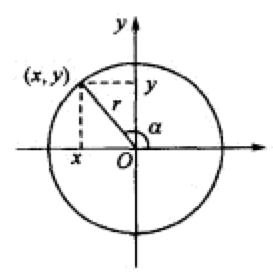
$$\text{正割 } \sec\alpha=\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}=\frac{r}{x},\quad \text{余割 } \csc\alpha=\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}=\frac{r}{y}.$$

2. 任意角三角函数的定义(图A.3.2):

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \tan\alpha=\frac{y}{x},\quad \cot\alpha=\frac{x}{y},\quad \sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$



图A.3.1



图A.3.2

A.3.3 三角函数的基本关系

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1,\quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad 1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha,\quad 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,$$

$$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1,\quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,\quad \sec^2\alpha-1=\tan^2\alpha,$$

$$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1,\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha,\quad \csc^2\alpha-1=\cot^2\alpha.$$

A.3.4 诱导公式(表 A.3.1)

表 A.3.1

角 θ / 函数	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin\theta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\theta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\theta$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\theta$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

记忆口诀 奇变偶不变,符号看象限("奇"指 90°, 270°,"偶"指 180°, 360°,"变"指正弦(正切)与余弦(余切)互变).

三角函数在四个象限中的符号如表 A.3.2 所示.

表 A.3.2

角 θ 所在象限 / 函数	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

A.3.5 特殊的三角函数值(表 A.3.3)

表 A.3.3

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

注 $\sec\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 的函数值可由 $\frac{1}{\cos\alpha}$ 和 $\frac{1}{\sin\alpha}$ 得出.

A.3.6 和差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\quad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

A.3.7 倍角公式与半角公式

1. 倍角公式：

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha),\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\quad \text{(降幂公式)},$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.$$

2. 半角公式：

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\quad\text{(降幂公式)},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

A.3.8 积化和差与和差化积公式

1. 积化和差公式：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

2. 和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

A.3.9 三角形的边角关系(图 A.3.3)

1. 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.
2. 余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

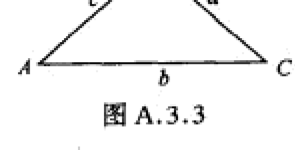


图 A.3.3

A.4 解析几何

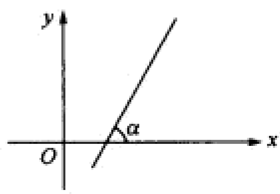


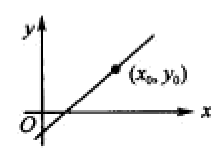
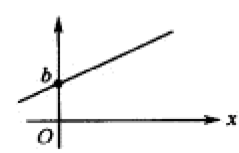
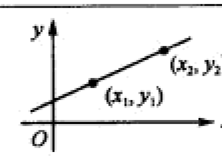
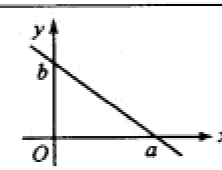
图 A.4.1

A.4.1 直线

1. 直线的斜率　$k=\tan\alpha$，其中 α 是直线的倾角(图 A.4.1)

2. 直线的方程(表 A.4.1).

表 A.4.1

直线的方程	说　明	图　示
一般式　$Ax+By+C=0$	A,B 不全为零	
点斜式　$y-y_0=k(x-x_0)$	直线过点(x_0,y_0)，斜率为 k	
斜截式　$y=kx+b$	斜率为 k，纵截距为 b	
两点式　$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	直线过两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)	
截距式　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	直线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a 和 b	

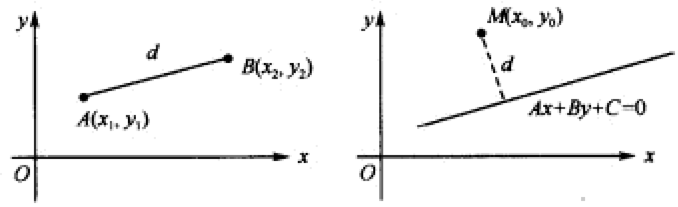
3. 距离公式：

(1) 两点间的距离　两点 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$间的距离(图 A.4.2(a))为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(2) 点到直线的距离　点 $M(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离(图 A.4.2(b))为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

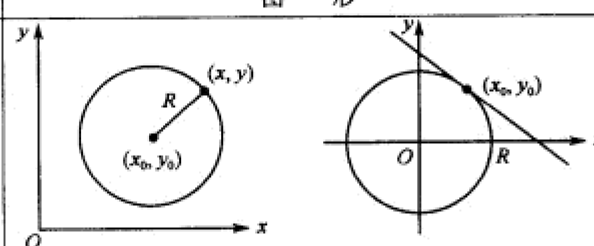
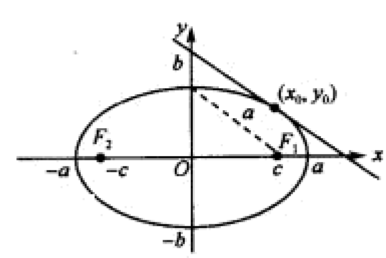
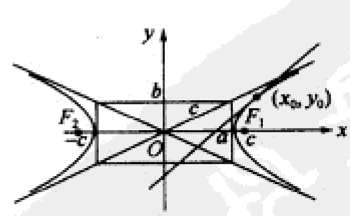


(a) (b)

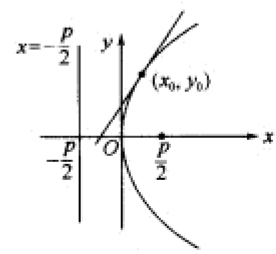
图 A.4.2

A.4.2 二次曲线(表 A.4.2)

表 A.4.2

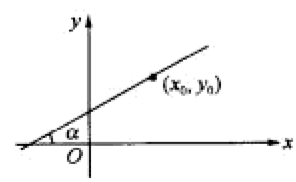
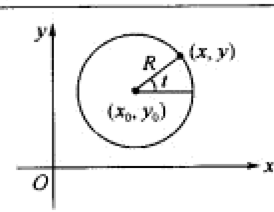
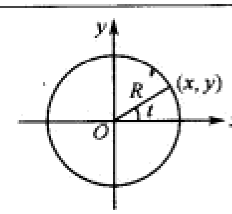
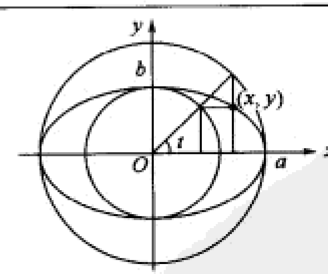
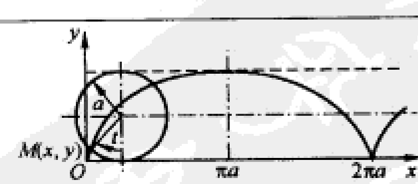
公 式	图 形
1. 圆 设半径 $=R$,圆心为(x_0, y_0) 圆的方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 设圆心为$(0,0)$,则 圆的方程 $x^2+y^2=R^2$ 切线方程 $x_0x+y_0y=R^2$ ((x_0, y_0)为切点)	
2. 椭圆 设 $a=$长半轴, $b=$短半轴, $c=$半焦距, $e=$离心率 (1) $c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a} \lt 1$ (2) 椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦点 $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ 切线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ ((x_0, y_0)为切点)	
3. 双曲线 设 $a=$实半轴, $b=$虚半轴, $c=$半焦距, $e=$离心率 (1) $c^2=a^2+b^2$, $e=\frac{c}{a} \gt 1$ (2) 双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦点 $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ 渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 切线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ ((x_0, y_0)为切点)	

续表

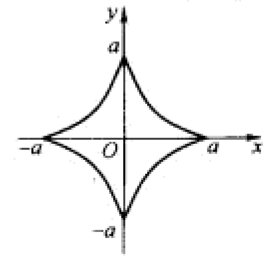
公　式	图　形
4. 抛物线 抛物线方程　$y^2=2px$　$(p>0)$ 焦点　$F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 准线　$x=-\frac{p}{2}$ 切线　$y_0y=p(x+x_0)$　((x_0,y_0)为切点)	

A.4.3　参数方程(表 A.4.3)

表 A.4.3

公　式	图　形
1. 直线 设直线过点(x_0,y_0)，斜率 $k=\tan\alpha=\frac{m}{l}$ (α 为直线的倾角) $\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\end{cases}$　或　$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$	
2. 圆 设圆心为(x_0,y_0)，半径$=R$ $\begin{cases}x=x_0+R\cos t\\y=y_0+R\sin t\end{cases}$ **特例**　若圆心在原点 $O(0,0)$ $\begin{cases}x=R\cos t\\y=R\sin t\end{cases}$	 
3. 椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$　$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$	
4. 旋轮线(摆线) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$	

续表

公式	图形
5. 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right)$	

A.4.4 极坐标

1. 极坐标与直角坐标的关系(图 A.4.3)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

注

$$\theta = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \right), \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0 \quad \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \right). \end{cases}$$

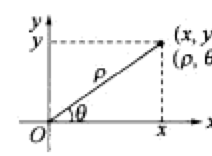
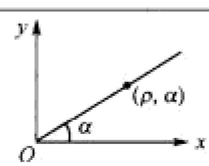
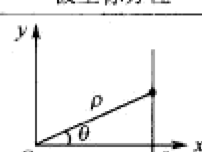
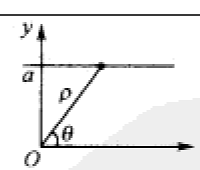
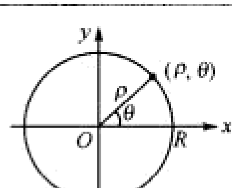
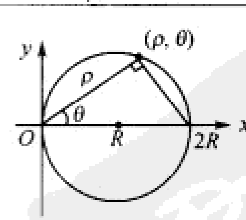
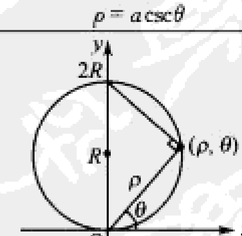


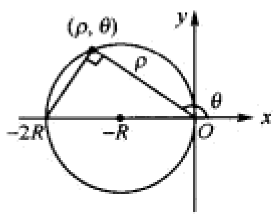
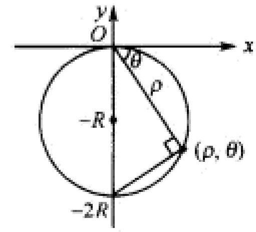
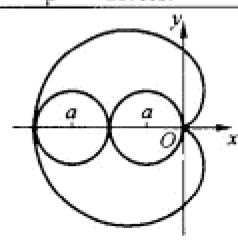
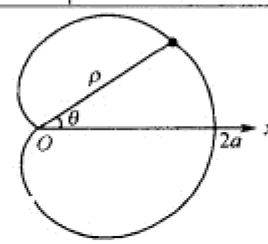
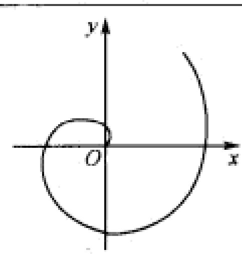
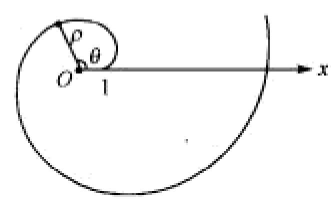
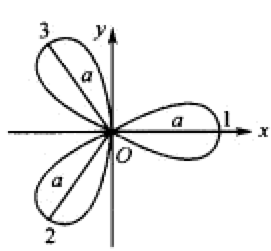
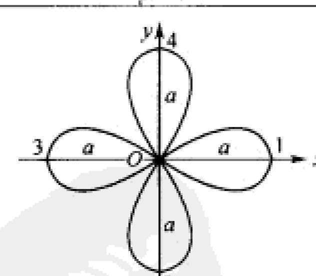
图 A.4.3

2. 曲线的极坐标方程(表 A.4.4)

表 A.4.4

曲线	极坐标方程		
(1) 直线	 $y = \tan\alpha \cdot x$ $\theta = \alpha$	 $x = a$ $\rho = a\sec\theta$	 $y = a$ $\rho = a\csc\theta$
(2) 圆	 $x^2 + y^2 = R^2$ $\rho = R$	 $x^2 + y^2 = 2Rx$ $\rho = 2R\cos\theta$	 $x^2 + y^2 = 2Ry$ $\rho = 2R\sin\theta$

续表

曲线	极坐标方程	
	 $x^2+y^2=-2Rx$ $\rho=-2R\cos\theta$	 $x^2+y^2=-2Ry$ $\rho=-2R\sin\theta$
(3) 心形线	 $\rho=a(1-\cos\theta)$	 $\rho=a(1+\cos\theta)$
(4) 螺线	 阿基米德螺线(等速螺线) $\rho=a\theta$	 对数螺线(等角螺线) $\rho=e^{a\theta}$
(5) 玫瑰线	 三叶玫瑰线 $\rho=a\cos3\theta$	 四叶玫瑰线 $\rho=a\cos2\theta$