
第十章　张量分析
第一节 问题的提出
第二节 矢量的基本运算
第三节 坐标变换及张量的定义

问题的提出

自然法则与坐标无关，坐标系的引入方便分析，但也掩盖了物理本质；

坐标系引入后的相关表达式冗长

如何解决?

引入张量方法

§A－1 指标符号

$x_1, x_2 \cdots x_n$ 记作 $x_i (i = 1,2,\cdots n)$

下标符号 $\boldsymbol{i}$ 称为指标；n 为维数

指标 $\boldsymbol{i}$ 可以是下标，如 x_i

也可以是上标，如 x^i

指标的取值范围如不作说明，均表示从1~3

定义这类符号系统为指标符号，一般采用下标

x_i（$i=1,2,3$）～x_1，x_2，x_3～x, y, z

u_i（$i=1,2,3$）～u_1，u_2，u_3～u, v, w

$$\sigma_{ij}(i, j = 1,2,3) \sim \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$

一. 若干约定 哑标和自由标

1. *Einstein*求和约定

凡在某一项内，重复一次且仅重复一次的指标，表示对该指标在它的取值范围内求和，并称这样的指标为哑指标。如：

$$a_i x_i (i = 1, 2, \cdots n) \Rightarrow$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

又如：

$$\sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

注意：

1 求和约定仅对字母指标有效，如$\sigma_{33}=\sigma_z$

2 重复不止一次的指标，求和约定失败

3 同一项内二对哑标应使用不同指标，如

$$a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$$

4 哑标可以换用不同的字母指标

2. 求导记号的缩写约定

$$(\ )_{,j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\ ) \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$(\quad)_{,ij} = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_i \partial x_j} \qquad u_{k,ij} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

3. 自由标

定义：凡在同一项内不重复出现的指标。如

$$a_{ji}x_i = b_j \qquad \boldsymbol{j}\ \text{为自由标}$$

$$\boldsymbol{j}=1 \longrightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

注意：

1. 同一个方程中各项自由标必须相同

2. 不能改变某一项的自由标，但所有项的自由标可以改变

如： $a_{ji}x_i = b_j$

$a_{ki}x_i = b_j$ → *wrong*

$a_{ki}x_i = b_k$ → *right*

二．克罗内克（*Kronecker-δ*）符号

定义：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当 i=j\\ 0 & 当 i\neq j\end{cases}$$

由定义

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\left[\delta_{ij}\right]$$

$$\delta_{ij}A_i = \delta_{1j}A_1 + \delta_{2j}A_2 + \delta_{3j}A_3 = \begin{cases} A_1 & j = 1 \\ A_2 & j = 2 \\ A_3 & j = 3 \end{cases}$$

$$= A_j$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j$$

性质：

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = A_{jj} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl} = \delta_{il}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = x_{i,j} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}} = \delta_{jk}$$

§A－2 张量的定义和代数运算

1. 矢量的基本运算

矢量$\boldsymbol{a} \Rightarrow$ 分量a_i

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_i\boldsymbol{e}_i$$

基矢量$\boldsymbol{e}_1$ $\boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{e}_3$ （3个坐*标方向的单位矢量*）

说明

1. 任意矢量可以表示为基矢量的线性组合

2. 基矢量不是唯一的

点积

1. 基矢量点积

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

2. 任意两矢量的点积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \cdot b_j \boldsymbol{e}_j = a_i b_j \delta_{ij}$$

$$= a_i b_i = a_j b_j$$

3. 矢量的基本运算还有叉积 、混合积等

并矢（并乘）

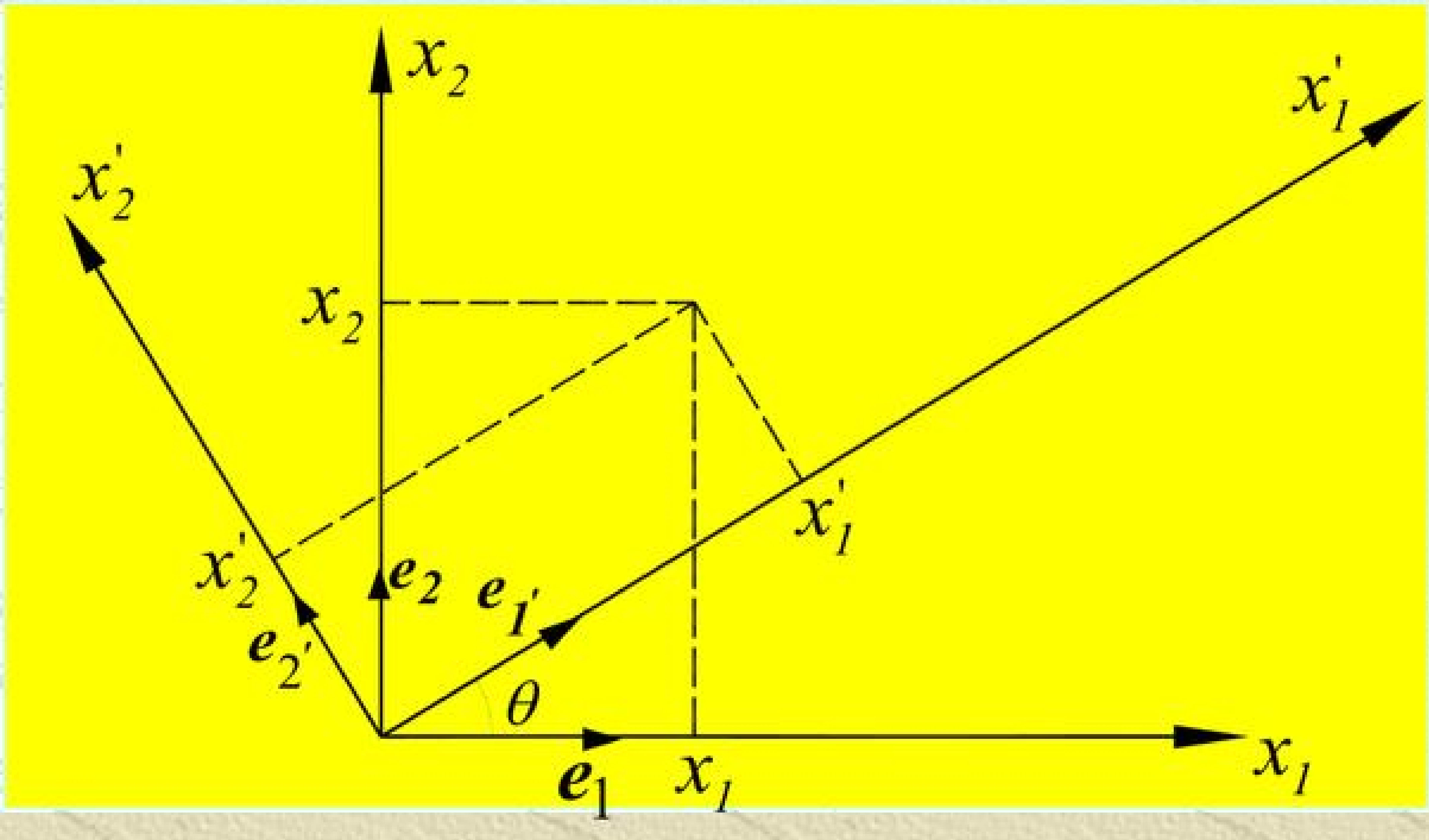
定义：

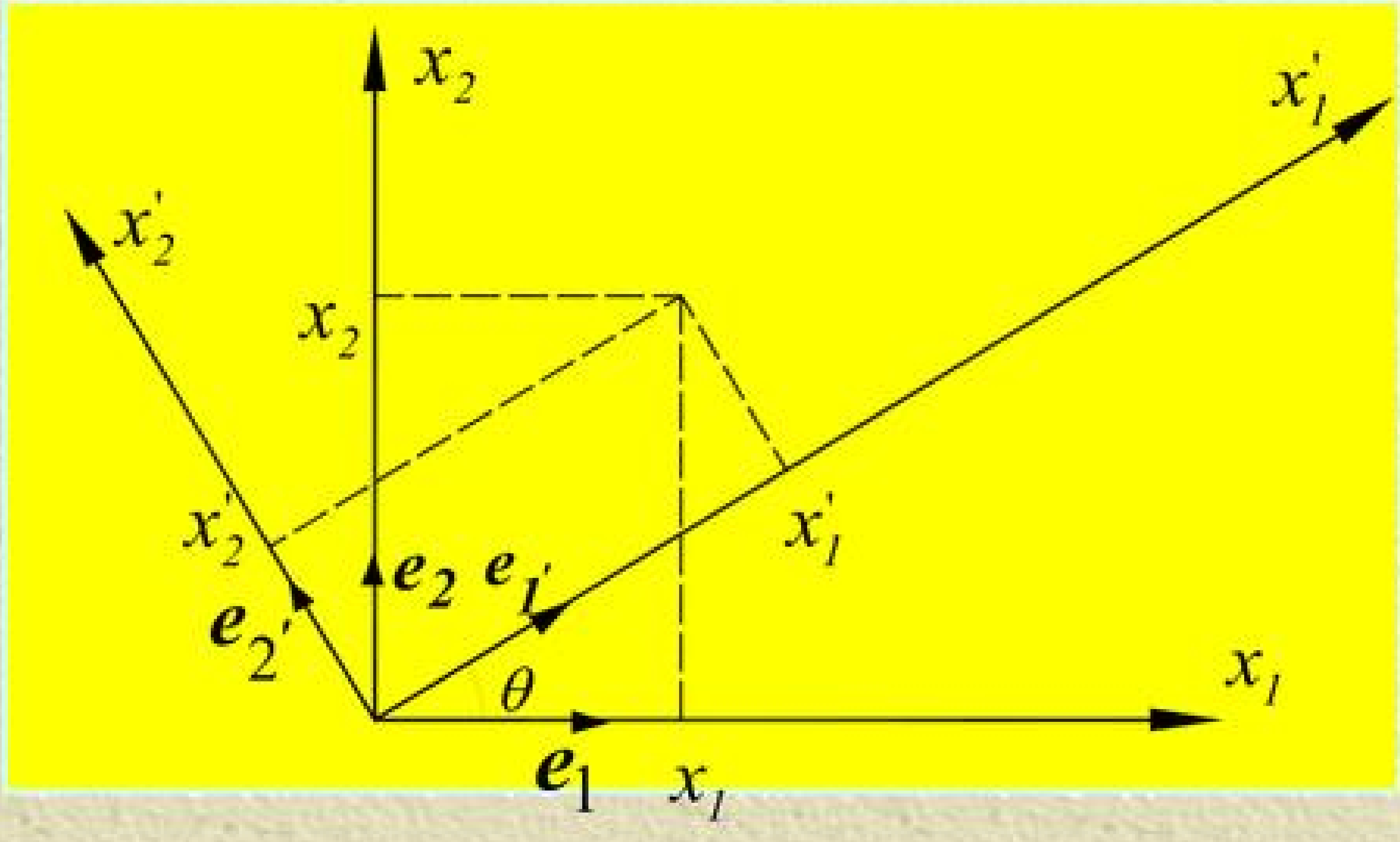
$$\boldsymbol{ab} = a_i \boldsymbol{e_i} b_j \boldsymbol{e_j} = a_i b_j \boldsymbol{e_i e_j}$$

展开共9项， $\boldsymbol{e_i e_j}$ 可视为并矢的基

$a_i b_j$为并矢的分解系数或分量

2. 平面笛卡儿坐标系旋转变换





令： $\alpha_{i'j} = cos(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_j) \quad (i', j = 1,2)$

则：$$\left[\alpha_{i'j}\right] = \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_1) & \cos(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_2) \\ \cos(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_1) & \cos(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

于是: $$\begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i'j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

同样: $$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11'} & \alpha_{12'} \\ \alpha_{21'} & \alpha_{22'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i'j} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \end{Bmatrix}$$

由（*）式得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i'j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \end{Bmatrix}$$

比较: $$\begin{bmatrix} \alpha_{i'j} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{i'j} \end{bmatrix}^{-1}$$

$[\alpha_{i'j}]$ 为正交矩阵